Die Zahl 70

Aufzeichnungen von Georg Glöckler aus dem Nachlass*

Georg Glöckler (1933 – 2019) hat sich Zeit seines Lebens mit dem Wesen der Zahlen beschäftigt. In seinem Nachlass finden sich zahlreiche Notizen über einzelne Zahlen, die Zahl 70, das platonische Weltenjahr 25 920, verschiedene biblische Zahlen. Hier sollen die Eigenschaften der Zahl 70 zusammengestellt werden. Auf die Reihenfolge kommt es dabei nicht an. Wo ein zusammenhängender Text zu finden war, wurde er aufgenommen.

Vorbetrachtung

Die Bedeutung einer Zahl erkennt man an den Beziehungen, die sie zu anderen Zahlen bzw. Zahlprozessen einzugehen vermag! Darüber hinaus charakterisieren Zahlen Ereignise in der Welt.In der neueren Literatur gibt es eine ganze Reihe von Darstellungen, welche sich diesem Bereich sehr umfassend widmen. Ein dritter Aspekt betrifft die geistigen Grundlagen der Zahlen. Als einführend in dieses Gebiet ist das Werk von Ernst Bindel zu nennen: Die geistigen Grundlagen der Zahlen. Besonders anregend zu lesen ist auch die kleine Schrift von L. Locher-Ernst: Die natürlichen Zahlen als Geistkunstwerk.

Von der Bedeutung der Zahl 70 in der Welt

Die folgende Auswahl betrifft eine Reihe von möglichst charakteristischen Beispielen vor allem aus dem alten und neuen Testment. Sie erhebt nicht den Anspruch auf irgendeine Vollständigkeit.

A) Die Zahl 70 im alten Testament.

1. Die Völkertafel (1 Mose 10) nennt 70 Völker.
2. 70 Älteste standen Moses beim Richteramt zur Seite (2 Mosee 24).
3. 70 Älteste sollte Moses auswählen, damit sie auf Geheiß des Herrn weissagen sollten (4 Mose 11).
4. Die heute als Septuaginta bekannte Version des alten Testaments soll von 70 Gelehrten auf Befehl des ägyptischen Königs Ptolemäus II (285–247 v. Chr.) ins Griechische übersetzt worden sein.

*Aus den Manuskripten Nr. 5 und 6 zusammengestellt von Peter Baum, p.baum@posteo.de, 19.05.2020

5. Die sog. babylonische Gefangenschaft der Juden betreffend: In 2 Chronik 36,21 heißt es: „Daß erfüllt werde das Wort des Herrn durch den Mund Jeremias, bis das Land an seinen Sabbaten genug hätte. Denn die ganze Zeit über, da es wüste lag, hatte es Sabbat, bis daß 70 Jahre voll wurden.“
   Anmerkung: Historisch weiß man, dass diese Gefangenschaft im Jahre 539 v. Chr. durch den Perserkönig Kyros beendet wurde. 587 v. Chr. erobert Nebukadnezzar II Jerusalem und führt die Juden in die babylonische Gefangenschaft. Offensichtlich hat sich die Rückkehr der Juden nach 539 v. Chr.noch um 2 Jahrzehnte verzögert.
6. Im Psalm 90 10 des alten Testaments heißt es: „Unser Leben währet 70 Jahre, und wenns hoch kommt, so sinds 80 Jahre.“

B) Ein Beispiel für die Zahl 70 aus dem Neuen Testament: „Danach berief der Herr noch eine Schar von 70 und sandte sie paarweise (!) aus um seinem Geistwillen in allen Städten und Orte, wohin er kommen würde, den Weg zu bereiten.“ (Lukas 10)

Diese Beispiele machen deutlich, dass die Zahl 70 auf übergeordnete Zusammenhänge, diese ordnend, hinweist. Zum einen auf Aufgabenstellungen, mit denen 70 Menschen betraut wurden, zum anderen auf Zeiträume von 70 Jahren. Was das Letzte betrifft, so können wir ein Beispiel aus der jüngsten Vergangenheit aufgreifen: 1917 war die Oktoberrevolution in Russland. 1987 wurde deutlih, dass das Sowjetsystem auseinanderbricht.

Elementar-arithmetische Betrachtungen zur Zahl 70

Wie eingangs schon erwähnt treten Eigenschaften von Zahlen dann erst richtig hervor,wenn man sie in Beziehung zu anderen Zahlen bzw. zu Zahlenprozessen setzt. Charakteristisch ist dabei auch, zu welchen Zahlen bzw.Prozessen eine bestimmte Zahl keinerlei Beziehung eingeht. So gehört die Zahl 70 nicht zu den sog. vollkommenen Zahlen wie 6, 28, 496, 8128, ... , bei denen die Teilersumme mit Ausnahme der Zahl selbst die Ausgangszahl ergibt (wie z.B. $6 = 1 + 2 + 3$ oder $28 = 1 + 2 + 7 + 14$). Auch lässt sich die Zahl 70 weder als Summe noch als Differenz zweier Quadratzahlen darstellen. Eine umfassende Charakteristik hängt jeweils davon ab, wie differenziert und unter welchen Gesichtspunkten man sie im Kosmos der Zahlen darstellen kann. In Bezug auf die Zahl 70 kann man z.B. die einfache Frage stellen: Welche aufenanderfolgende Zahlen ergeben als Summe die Zahl 70? Diese Frage lässt sich schon durch bloßes Probieren beantworten. Es gibt drei Möglichkeiten.

70 als Summe von aufeinanderfolgenden Zahlen

70 lässt sich auf dreifache Art als Summe aufeinanderfolgender Zahlen darstellen:

$$70 = 16 + 17 + 18 + 19$$
$$70 = 12 + 13 + 14 + 15 + 16$$
$$70 = 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13$$

70 ist mit 4 Zahlen befreundet

Grundlagen: Befreundet nennt man Zahlen mit gleicher Teilersumme. Diese Teilersumme läßt sich leicht durch das Verfahren der komplementären Multiplikation ermitteln, das wir im Folgenden handhaben:

	66				94				115				119				70	
1	·	66		1	·	94		1	·	115		1	·	119		1	·	70
2	·	33		2	·	47		5	·	23		7	·	17		2	·	35
3	·	22														5	·	14
6	·	11														7	·	10
12	+	132		3	+	141		6	+	138		8	+	136		15	+	119

Alle 5 Zahlen haben die gleiche Teilersumme $S_n = 144 = 12^2$. Diese Quadratzahl wird in der Apokalypse des Johannes als die Zahl eines Engels charakterisiert. Überdies ist 144 die einzige Quadratzahl in der Folge der Fibonacci-Zahlen.[1] Setzt man aus dieser Folge aufeinanderfolgende Zahlen ins Verhältnis, so nähert sich dieser Wert dem goldenen Schnitt.

70 ist die erste sogenannte Schicksalszahl

Grundlagen: Addiert man alle Teiler einer Zahl n, sie selbst ausgeschlossen, so nennt man die Summe ihren Inhalt i_n. Je nachdem dieser Inhalt kleiner, größer oder gleich der Zahl selbst ist, nennt man sie arm, reich oder vollkommen. Reiche Zahlen, die sich nicht als Summe ihrer Teiler darstellen lassen, nennt man Schicksalszahlen. In der Reihe dieser Zahlen ist 70 die erste. Ein diesbezüglicher Vergleich reicher Zahlen bringt uns dem Verständnis dieser Tatsache näher.

	60				80				70	
1		60		1		80		1		70
2		30		2		40		2		35
3		20		4		20		5		14
4		15		5		16		7		10
5		12		8		10				
6		10								
21	+	87		20	+	96		15	+	59
=	108	>60		=	115	>80		=	74	>70

[1] Beweis?

$$
\begin{aligned}
60 &= 10+20+30 \\
&= 1+2+3+4+20+30 \\
&=\text{etc}
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
80 &= 2+8+10+20+40 \\
&= 2+4+8+10+16+40 \\
&= \text{etc}
\end{aligned}
$$

Dies lässt sich mit der Zahl 70 nicht durchführen. Nur die Nachbarzahlen von 70 lassen sich durch Summen der Teiler von 70 erreichen:

$$
\begin{aligned}
69 &= 1+2+7+10+14+35 \\
71 &= 5+7+10+14+35
\end{aligned}
$$

70 gehört zur Famile der Primzahl 43

Grundlagen: Ausgehend von 70 kann man eine Folge von Inhalten bilden. Jedes Folgenglied ist der Inhalt des vorangehenden Inhalts. Für die Zahl 70 lässt sich diese Folge leicht angeben:

$$70 \rightarrow 74 \rightarrow 40 \rightarrow 50 \rightarrow 43$$

denn

$$
\begin{aligned}
74 &= 1\cdot 74 \\
&= 2\cdot 37 \\
40 &= 3+37
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
40 &= 1\cdot 40 \\
&= 2\cdot 20 \\
&= 4\cdot 10 \\
&= 5\cdot 8 \\
50 &= 12+38
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
50 &= 1\cdot 50 \\
&= 2\cdot 25 \\
&= 5\cdot 10 \\
43 &= 8+35
\end{aligned}
$$

Weil noch andere Zahlen, etwa 94 und 185 auf diese Weise zu der Primzahl 43 führen, bilden alle solche Zahlen eine Familie.

70 als Zahl im Pascalschen Dreieck

$$70 = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 4}$$

70 als Polygonalzahl

Die Zahl 70 ist in zweifacher Hinsicht eine Polygnalzahl.

Polygonalzahlen oder figurierte Zahlen wurden schon im klassischen Griechenland beschrieben. Solche Zahlen ergeben sich aus Vielecken. Als Beispiel sei die Bildung eines Dreiecks, Vierecks und Fünfecks dargestellt:

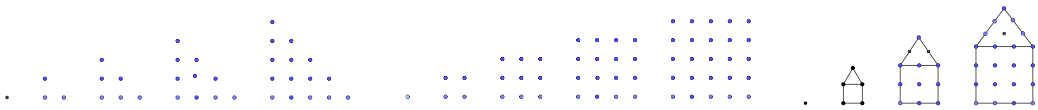

Abbildung 1: Polygonalzahlen

Die Anzahl der Punkte in den Polygonen liefern die Polygonalzahlen.[2]

$$\begin{array}{lll} P_1(3) = 1 & P_1(4) = 1 & P_1(5) = 1 \\ P_2(3) = 1+2 & P_2(4) = 1+3 & P_2(5) = 1+4 \\ P_3(3) = 1+2+3 & P_3(4) = 1+3+5 & P_3(5) = 1+4+7 \\ P_4(3) = 1+2+3+4 & P_4(4) = 1+3+5+7 & P_4(5) = 1+4+7+10 \end{array}$$

Man sieht unmittelbar: Polygonalzahlen sind Teilsummen sog. arithmetischer Reihen 2. Ordnung, die sich dadurch charakterisieren lassen, dass bei ihnen die Differenzen aufeinanderfolgender Summanden konstant ist.
Es ist nun

$$\begin{aligned} 70 &= P_7(5) = P_4(13) \\ P_7(5) &= 1+4+7+10+13+16+19 \\ P_4(13) &= 1+12+23+34 \end{aligned}$$

70 als Summe aufeinanderfolgender Polygonalzahlen

70 lässt sich auf dreifache Art als Summe aufeinanderfolgender erster Polygonalzahlen darstellen.
Es ist

$$\begin{aligned} 70 &= 1+69 \\ 70 &= P_1(69) + P_2(69) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} 70 = 1+8+21+40 & 70 = 1+18+51 \\ 70 = P_1(8)+P_2(8)+P_3(8)+P_4(8) & 70 = P_1(18)+P_2(18)+P_3(18) \end{array}$$

70 als Summe von Dreieckszahlen

70 lässt sich auf zweifache Weise als Tripelsumme von Dreieckszahlen darstellen, und zwar so, dass die jeweiligen Indexsummen zueinander basisinvariant sind:

$$\begin{aligned} 70 &= P_4(3) + P_5(3) + P_9(3) = P_3(3) + P_7(3) + P_8(3) \\ &= 10+15+45 = 6+28+36 \end{aligned}$$

[2]Polygonalzahlen lassen sich allgemein so darstellen;
$P_n(m) = \frac{n}{2}\left[2 + (n-1)(m-2)\right]$

Dabei sind die Summen der Indizes gleich und die Differenzenfolge komplementär:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 4 & + & 5 & + & 9 & = & 3 & + & 7 & + & 8 & = & 18 \\ & 1 & & 4 & & & & 4 & & 1 & & & \end{array}$$

70 als Summe von Tetraeder- und Oktaederzahlen

$$1 + 4 + 10 + 20 + 35 = 70 \qquad 1 + 6 + 19 + 44 = 70$$

$$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = 70 \qquad Oct_1 + Oct_2 + Oct_2 + Oct_4 = 70$$

mit[3]

$$T_n = \frac{1}{6} n (n+1)(n+2) \qquad Oct_n = \frac{1}{3} n \left(2n^2 + 1\right)$$

70 als einfache Summe aus einer Dreiecks- und einer Quadratzahl

70 lässt sich auf vierfache Art als einfache Summe aus einer Dreiecks- und einer Quadratzahl darstellen:

$$\begin{aligned} 70 &= 6 + 8^2 = P_3(3) + P_8(4) = P_2(6) + P_8(4) \\ &= 21 + 7^2 = P_6(3) + P_7(4) \\ &= 45 + 5^2 = P_9(3) + P_5(4) = P_5(6) + P_5(4) \\ &= 66 + 2^2 = P_{10}(3) + P_2(4) \end{aligned}$$

Bemerkung: Da 70 eine Fünfeckszahl ist, lässt sich diese immer zumindest durch eine solche Summe darstellen.[4] 70 ist aber die erste unter den Fünfeckzahlen, die sich gleich auf vierfache Weise so darstellen lässt.

Die ersten 7 Zahlen und die Zahl 70

Die ersten sieben Zahlen ergeben addiert die Dreieckszahl 28. Diese ist, wie oben beschrieben, eine vollkommene Zahl. Die ersten 7 Quadratzahlen ergeben addiert die Zahl 140. Daraus folgt die bemerkenswerte Beziehung

$$1^2 + 2^2 + 4^2 + 7^2 = 3^2 + 5^2 + 6^2 = 70$$

wobei die Summen der Basiswerte gleich sind:

$$1 + 2 + 4 + 7 = 3 + 5 + 6 = 14$$

Darüber hinaus ist die Folge der Differenzen der Basiswerte auf beiden Seiten komplementär:

[3] Tetraederzahlen sind Summen aus Dreieckszahlen $d_n = \frac{1}{2} n (n+1)$
$T_n = d_1 + d_2 + \ldots + d_n$

[4] Es ist $P_n(3) + P_{n+1}(4) = P_{n+1}(5)$
und $P_7(5) = 70$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & + & 2 & + & 4 & + & 7 & = & 0 & + & 3 & + & 5 & + & 6 \\
 & 1 & & 2 & & 3 & & & & 3 & & 2 & & 1 &
\end{array}
$$

Da wir immer wieder auf derartige Phänomene stoßen werden, wollen wir solchen Beziehungen einen Namen geben: Die Quadratsummen sind durch eine komplementäre Basis-Invarianz verknüpft.

70 ist auch die Summe folgender Quadratzahlen:

$$1^2 + 4^2 + 6^2 + 4^2 + 1^2 = 70$$

Summe der ersten 24 Quadratzahlen

$$70^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 23^2 + 24^2$$

Die Beziehungen der Zahlen 70 und 72

Zunächst ist

$$
\begin{aligned}
7! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \\
&= 70 \cdot 72
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
(71-1)\,(71+1) &= 7! \\
71^2 &= 7! + 1
\end{aligned}
$$

und des weiteren

$$
\begin{aligned}
70 &= (1 \cdot 2) + (2 \cdot 3) + (3 \cdot 4) + (4 \cdot 5) + (5 \cdot 6) \\
&= (1 \cdot 2) - (2 \cdot 3) + (3 \cdot 4) - (4 \cdot 5) + (5 \cdot 6) - (6 \cdot 7) + (7 \cdot 8) - (8 \cdot 9) + (9 \cdot 10) - (10 \cdot 11) + (11 \cdot 12)
\end{aligned}
$$

und schließlich

$$
\begin{aligned}
70^2 + 72^2 &= 6^2 + 48^2 + 88^2 = 4 \cdot 2521 \\
70 + 72 &= 6 + 48 + 88 = 142 = 2 \cdot 71
\end{aligned}
$$

Die ersten 4 Zahlen und die 70

Es gilt

$$70 = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2$$

Quadratsummen

$$363^2 + 364^2 + 365^2 = 106 \cdot 5^3 \cdot 70$$