Georg Glöckler

$n = a^2 + b^2$

Welche natürlichen Zahlen sind durch eine Quadratsumme darstellbar?

Mathematisch-Astronomische Sektion am Goetheanum

Georg Glöckler : Welche natürlichen Zahlen sind durch eine Quadratsumme darstellbar ?

Herausgegeben von der Mathematisch-Astronomischen Sektion der Freien Hochschule
für Geisteswissenschaft am Goetheanum, Dornach (Schweiz). 19.Juni 2000.
Skript: Vivian Kilchherr, Basel.
Satz, Layout und Überarbeitung: Michael Bader, Mathematisch-Astronomische Sektion, Dornach.
Druck: Kurt Peter, Druckerei am Goetheanum, Dornach.

mail to: math.astr.sektion@goetheanum.ch

Georg Glöckler

Welche natürlichen Zahlen sind
durch eine Quaratsumme darstellbar ?

Mathematisch-Astronomische Sektion am Goetheanum, Dornach (Schweiz)
Juni 2000

Welche natürlichen Zahlen sind durch eine Quadratsumme darstellbar ?

A.) Es gibt natürliche Zahlen, die sich als Summe von verschiedenen Quadratzahlen natürlicher Zahlen darstellen lassen. Die Zahlen **a** und **b** sollen dabei selbst natürliche Zahlen sein. Diese Voraussetzung ist wichtig wie das folgende Beispiel zeigt:

$$5 = 0{,}4^2 + 2{,}2^2$$

In der folgenden Tabelle sind die ersten natürlichen Zahlen mit den oben festgelegten Eigenschaften registriert.

$5 = 1^2 + 2^2$
$10 = 1^2 + 3^2 = 2 \cdot 5$
$13 = 2^2 + 3^2$
$17 = 1^2 + 4^2$
$20 = 2^2 + 4^2 = 2^2 \cdot 5$
$25 = 3^2 + 4^2 = 5^2$
$26 = 1^2 + 5^2 = 2 \cdot 13$
$29 = 2^2 + 5^2$
$34 = 3^2 + 5^2 = 2 \cdot 17$
$37 = 1^2 + 6^2$
$40 = 2^2 + 6^2 = 2^3 \cdot 5$
$41 = 4^2 + 5^2$
$45 = 3^2 + 6^2 = 3^2 \cdot 5$
$50 = 1^2 + 7^2 = 2 \cdot 5^2$
$52 = 4^2 + 6^2 = 2^2 \cdot 13$
$53 = 2^2 + 7^2$
$58 = 3^2 + 7^2 = 2 \cdot 29$
$61 = 5^2 + 6^2$
$65 = 1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2 = 5 \cdot 13$
$68 = 2^2 + 8^2 = 2^2 \cdot 17$
$73 = 3^2 + 8^2$
$74 = 5^2 + 7^2 = 2 \cdot 37$
$80 = 4^2 + 8^2 = 2^4 \cdot 5$
$82 = 1^2 + 9^2 = 2 \cdot 41$
$85 = 2^2 + 9^2 = 6^2 + 7^2 = 5 \cdot 17$
$89 = 5^2 + 8^2$
$90 = 3^2 + 9^2 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$
$97 = 4^2 + 9^2$
$100 = 6^2 + 8^2 = 2^2 \cdot 5^2$
$101 = 1^2 + 10^2$
$104 = 2^2 + 10^2 = 2^3 \cdot 13$
$106 = 5^2 + 9^2 = 2 \cdot 53$
$109 = 3^2 + 10^2$
$113 = 7^2 + 8^2$
$116 = 4^2 + 10^2 = 2^2 \cdot 29$
$117 = 6^2 + 9^2 = 3^2 \cdot 13$
$122 = 1^2 + 11^2 = 2 \cdot 61$
$125 = 2^2 + 11^2 = 5^2 + 10^2 = 5^3$
$130 = 3^2 + 11^2 = 2 \cdot 5 \cdot 13$

Ein erster Blick in diese Tabelle vermittelt schon eine Reihe von bemerkenswerten Einsichten, die als solche natürlich allgemein bewiesen werden müssen.[1]

B.) Im Folgenden versuchen wir mit ganz elementaren Mitteln einen Zugang zu den hier obwaltenden Gesetzen zu finden. Die erste Tabelle weist schon auf folgende Tatsachen hin:

1.) Ist n eine Primzahl, so ist sie eine solche von der Form $p = 1 + 4m$, d.h. sie lässt bei Division durch 4 den Rest 1.
2.) Alle Vielfachen von p der Form $2^n \cdot p$ lassen sich als Summe zweier Quadratzahlen darstellen.
3.) Alle Zahlen n, die in ihrer kanonischen Darstellung nicht mindestens einen Faktor p haben, sind nicht als Quadratsumme darstellbar.

Wir registrieren die ersten dieser Art in einer Tabelle

1	18	38	62	84	112
2	19	42	63	86	114
3	21	43	64	88	118
4	22	44	66	92	121
6	23	46	67	93	124
7	24	47	71	94	126
8	27	48	72	96	127
9	28	49	76	98	128
11	31	54	77	99	129
12	32	56	79	103	131
14	33	57	81	107	132
16	36	59	83	108	133
					:

Die in dieser Tabelle registrierten Primzahlen sind solche von der Form $q = 3 + 4m$, d.h. sie lassen bei Division durch vier den Rest 3.

4.) Unter den nicht durch eine Quadratsumme darstellbaren Zahlen gibt es sehr wohl solche, die in ihrer Kanonischen Darstellung Faktoren der Form $p = 1 + 4m$ haben, evtl. sogar in potenzierter Form. Die ersten dieser Art seien wieder in einer Tabelle registriert:

15 =	$3 \cdot 5$	75 =	$3 \cdot 5^2$	111 =	$3 \cdot 37$
30 =	$2 \cdot 3 \cdot 5$	78 =	$2 \cdot 3 \cdot 13$	115 =	$23 \cdot 5$
35 =	$7 \cdot 5$	87 =	$3 \cdot 29$	119 =	$7 \cdot 17$
39 =	$3 \cdot 13$	91 =	$7 \cdot 13$	120 =	$2^3 \cdot 3 \cdot 5$
51 =	$3 \cdot 17$	95 =	$19 \cdot 5$	123 =	$3 \cdot 41$
55 =	$11 \cdot 5$	102 =	$2 \cdot 3 \cdot 17$	130 =	$2 \cdot 5 \cdot 13$
60 =	$2^2 \cdot 3 \cdot 5$	105 =	$3 \cdot 7 \cdot 5$	135 =	$3^3 \cdot 5$
70 =	$2 \cdot 7 \cdot 5$	110 =	$2 \cdot 11 \cdot 5$	136 =	$2^3 \cdot 17$
				:	:

[1] Man findet solche Beweise z.B. in dem Buch Hardy - Wright: Einführung in die Zahlentheorie (1958 R. Oldenbourg, München: S. 340 ff). Diese Beweise setzen allerdings einige Grundkenntnisse im Bereich der elementaren Zahlentheorie voraus.

Man erkennt unmittelbar: In den Spalten stehen ganz rechts die Primzahlen der Form $p = 1 + 4m$, evtl. mehrere dieser Art mit sogar irgend welchen Potenzen von p. Die in der jeweiligen kanonischen Darstellung davor stehenden Faktoren sind abgesehen von 2^l Primzahlen der Form $q = 3 + 4m$, bzw. deren Potenzen ungerader Ordnung. Dies führt zu der Einsicht, dass im Falle der Darstellbarkeit einer natürlichen Zahl n in ihrer kanonischen Darstellung nur Potenzen von q vorkommen, die gerader Ordnung sind.

Beispiele:

$$117 = 3^2 \cdot 13 = 3^2(2^2+3^2) = (2 \cdot 3)^2 + (3 \cdot 3)^2 = 6^2+9^2$$
$$637 = 7^2 \cdot 13 = 14^2+21^2$$
$$405 = 3^4 \cdot 5 = 9^2+18^2$$
$$2205 = 3^2 \cdot 7^2 \cdot 5 = 21^2+42^2$$
$$585 = 3^2 \cdot 5 \cdot 13 = 3^2+24^2 = 12^2+21^2$$
$$4165 = 7^2 \cdot 5 \cdot 17 = 14^2+63^2 = 42^2+49^2$$

Diese Einsicht ist natürlich eher trivial zu nennen. Denn wenn n eine Darstellung der Form $n = a^2 + b^2$ besitzt, dann ist $q^2 \cdot n = (qa)^2 + (qb)^2 = q^2 \cdot (a^2 + b^2)$

5.) Gibt es für n mehrere Darstellungen der Form $n = a^2 + b^2$, so ändert sich die Anzahl der Darstellungen nicht wenn anstelle von n die natürliche Zahl

$n_0 = q_1^{2\alpha_1} \cdot q_2^{2\alpha_2} \cdot q_3^{2\alpha_3} \cdots\cdots q_\gamma^{2\alpha_\gamma} \cdot (a^2+b^2)$ tritt.

6.) Besitzt n eine Darstellung der Form $n = a^2 + b^2$
dann hat $2n = 2(a^2+b^2)$ die Darstellung
$2n = (a-b)^2 + (a+b)^2 = 2\,(a^2+b^2)$

Darüber hinaus ändert sich nichts an der Anzahl der Darstellungen für $n = a^2+ b^2$ wenn anstelle von n die natürliche Zahl $2^l \cdot n = 2^l \cdot (a^2+b^2)$ tritt.

Für festes a und b lassen sich damit schöne Darstellungsreihen bilden:

Beispiel:

$$13 = 2^2+3^2$$
$$2 \cdot 13 = (3-2)^2+(3+2)^2 = 1^2+5^2 = 26$$
$$2^2 \cdot 13 = (5-1)^2+(5+1)^2 = 4^2+6^2 = 52$$
$$2^3 \cdot 13 = (6-4)^2+(6+4)^2 = 2^2+10^2 = 104$$
$$2^4 \cdot 13 = (10-2)^2+(10+2)^2 = 8^2+12^2 = 208$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

C.) Eine erste Zusammenfassung

Wir haben zunächst den wesentlichen Unterschied zwischen den Primzahlen $p = 1 + 4m$ und $q = 3 + 4m$ erkannt. Die folgende Tabelle registriert die ersten Primzahlen beider Arten:

$p =$	$1 + 4m$	$q =$	$3 + 4m$
$p_1 =$	5	$q_1 =$	3
$p_2 =$	13	$q_2 =$	7
$p_3 =$	17	$q_3 =$	11
:	29	:	19
	37		23
	41		31
	53		43
	61		47
	73		59
	89		67
	97		71
	101		79
	109		83
	113		103
	137		107
	:		:

Die unterschiedliche Bedeutung der beiden Primzahlentypen drückt sich in der folgenden Tatsache aus: Hat eine natürliche Zahl n eine oder mehrere Darstellungen der Art $n = a^2 + b^2$ dann besitzt n die kanonische Darstellung, wobei nicht alle $\beta_i = 0$ sind.

$$n = 2^l \cdot q_1^{2\alpha_1} \cdot q_2^{2\alpha_2} \cdot q_3^{2\alpha_3} \dots \cdot q_\gamma^{2\alpha_\gamma} \cdot p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot p_3^{\beta_3} \dots \cdot p_\mu^{\beta_\mu}$$

Dies ist nur die explizite Darstellung dessen, was der diesbezügliche fundamentale Satz aussagt: Die natürliche Zahl n ist dann und nur dann von der Form $a^2 + b^2$ wenn

$$n = n_1^2 \cdot n_2$$

ist , wobei n_2 keine Primfaktoren der Form $4m + 3$ enthält.[2]

Als Beispiel wählen wir eine Zahl n, welche 9 verschiedene Darstellungen besitzt. Es ist die ~~zweitkleinste~~ fünfte sechste in der Folge der ~~unter den~~ natürlichen Zahlen n mit 9 Darstellungen: (vgl. S. 19)

$$n = 1\,292\,850 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 13^2 \cdot 17$$

hier ist: $l = 1$

$q_1 = 3$ mit $\alpha_1 = 1$

$p_1 = 5$ mit $\beta_1 = 2$

$p_2 = 13$ mit $\beta_2 = 2$

$p_3 = 17$ mit $\beta_3 = 1$

$n = 801^2 + 807^2$ p

$= 675^2 + 915^2$ i

$= 585^2 + 975^2$ i

$= 543^2 + 999^2$ i

$= 429^2 + 1053^2$ i

$= 327^2 + 1089^2$ i

$= 165^2 + 1125^2$ i

$= 117^2 + 1131^2$ i

$= 9^2 + 1137^2$ i

Dieses Beispiel ist sicher nicht gerade ein einfaches.

[2] Vergleiche Fussnote 1 auf Seite 2.

[3] p ~~bedeutet: Die Basiszahlen des Tripels sind teilerfremd; i bedeutet: Die Basiszahlen~~ des Tripels haben gemeinsame Teiler

Es wirft aber sofort die Frage nach der Anzahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl auf und damit verbunden die Frage, wie man evtl. aus der kanonischen Darstellung einer natürlichen Zahl die Anzahl ihrer Darstellungen ermitteln kann.

Bemerkung zu zwei bedeutenden Zahlen:

25 920 Zahl des platonischen Weltenjahres
144000 Zahl aus der Apokalypse des Johannes.

Aufgrund unserer anfänglichen Einsichten können wir diese Zahlen durch einen rhythmologischen Prozess ermitteln:

$25\,920 = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5$ $\qquad$ $144\,000 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^3$

Nun gibt es für 5 eine Darstellung, für 5^3 schon zwei Darstellungen durch Quadratsummen:

$5 = 1^2+2^2$ $\qquad$ $5^3 = 125 = 2^2+11^2 = 10^2 + 15^2$

Diese beiden Zahlen bilden nun die Basis für die folgenden Prozesse:

25920

$5 =$	$5 =$	1^2+2^2
$3^2 \cdot 5 =$	$45 =$	3^2+6^2
$3^4 \cdot 5 =$	$405 =$	9^2+18^2
$2 \cdot 3^4 5 =$	$810 =$	9^2+27^2
$2^2 \cdot 3^4 \cdot 5 =$	$1620 =$	18^2+36^2
$2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 =$	$3240 =$	18^2+54^2
$2^4 \cdot 3^4 \cdot 5 =$	$6480 =$	36^2+72^2
$2^5 \cdot 3^4 \cdot 5 =$	$12960 =$	36^2+108^2
$2^6 \cdot 3^4 \cdot 5 =$	$25920 =$	72^2+144^2

144 000

$5^3 =$	$125 =$	$2^2+11^2 =$	5^2+10^2
$3^2 \cdot 5^3 =$	$1125 =$	$6^2+33^2 =$	15^2+30^2
$2 \cdot 3^2 \cdot 5^3 =$	$2250 =$	$27^2+39^2 =$	15^2+45^2
$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3 =$	$4500 =$	$12^2+66^2 =$	30^2+60^2
$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 =$	$9000 =$	$59^2+78^2 =$	30^2+90^2
$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 =$	$18\,000 =$	$24^2+13^2 =$	60^2+120^2
$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^3 =$	$36\,000 =$	$108^2+156^2 =$	60^2+180^2
$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^3 =$	$72\,000 =$	$48^2+269^2 =$	120^2+240^2
$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^3 =$	$144\,000 =$	$216^2+312^2 =$	120^2+360^2

D.) Darstellung von Primzahlquadraten der Form $p_\gamma^2 = (1+4m)^2$

Im Folgenden nehmen wir imaginäre Zahlen zu Hilfe.

Ist $p_\gamma = n = a^2 + b^2$ dann gilt: $n = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$

Ist dann $n = (a^2+b^2)$ dann folgt daraus

$$\begin{aligned} n^2 &= (a+bi)(a-bi)(a+bi)(a-bi) \\ &= (a+bi)^2 \cdot (a-bi)^2 \\ &= (a^2-b^2+2abi)(a^2-b^2-2abi) \\ &= (a^2-b^2)^2 + (2ab)^2 \end{aligned}$$

Die Formel $n^2 = (a^2-b^2)^2 + (2ab)^2$ gilt natürlich für alle natürlichen Zahlen n mit $n = a^2 + b^2$, so daß wir in jedem Fall pythagoräische Zahlentripel erhalten. Es kann aber sein, daß es für die Darstellung von n^2 mehrere solcher Tripel gibt.

Ein einfacher Fall zeigt dies sofort:

$n = 25 = 4^2 + 3^2$
hier ist $a = 4, b = 3$
daraus folgt: $n^2 = (4^2-3^2)^2+(2 \cdot 3 \cdot 4)$
$= 7^2 + 24^2$
Es ist aber $25^2 = 7^2+24^2 = 15^2+20^2$

Die mit der Mehrfachdarstellung einer natürlichen Zahl zusammenhängenden Gesetze müssen wir gesondert untersuchen. Im Folgenden registrieren wir die ersten Beispiele für die Tatsache, daß jedes Primzahlenquadrat der Form $p^2 = (1+4m)^2$ zu einem pythagoräischen Zahlentripel gehört.

$$\begin{aligned} p_1 &= 5 = 1^2+2^2 && a=2 \quad b=1 \\ p_1^2 &= (2^2-1^2)^2 + (2 \cdot 2 \cdot 1)^2 \\ &= 3^2 + 4^2 \\ p_2 &= 13 = 2^2+3^2 && a=3 \quad b=2 \\ p_2^2 &= (3^2-2^2)^2 + (2 \cdot 3 \cdot 2)^2 \\ &= 5^2 + 12^2 \\ p_3 &= 17 = 1^2+4^2 && a=4 \quad b=1 \\ p_3^2 &= (4^2-1^2)^2 + (2 \cdot 4 \cdot 1)^2 \\ &= 15^2 + 8^2 \\ &\vdots \\ p_5 &= 37 = 1^2+6^2 && a=6 \quad b=1 \\ p_5^2 &= 37^2 = 12^2+35^2 \end{aligned}$$

(p)

Bemerkung: Die vorangehenden Darstellungen nennt man primitiv weil stets $(a,b) = 1$ ist, das heißt a und b sind teilerfremd.
(i)
Im Gegensatz dazu ist die Darstellung $25^2 = 15^2+20^2$ imprimitiv weil $(a,b) = 5$ ist

F.) Anzahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl n durch Quadratsummen. Dabei entspricht ν aufgrund seiner kanonischen Darstellung immer einem Typus. Diese Typen ordnen wir jeweils in einer Typenfolge und geben die Anzahl der möglichen Darstellungen an:

Anzahl der Primzahlen	Folgentypus	Anzahl der Darstellungsmöglichkeiten durch eine Quadratsumme
2ν	$p_1^{2\nu}$	ν
$2\nu-1$	$p_1^{2\nu-1}$	ν
ν	$p_1^{\nu-1}p_2$	ν
$\nu+1$	$p_1^{\nu-1}p_2p_3$	2ν
$n+\nu+2$	$p_1^{n-1}p_2^2p_3 \cdots p_{\nu+3}$	$3n \cdot 2^{\nu}$
$n+\nu$	$p_1^{n-1}p_2p_3p_4 \ldots p_{\nu+2}$	$n \cdot 2^{\nu}$
$\nu+1$	$p_1p_2 \cdots p_{\nu+1}$	2^{ν}
$\nu+2$	$p_1^3p_2p_3 \cdots p_{\nu}$	2^{ν}
$\nu+3$	$(p_1p_2)^3 \cdot p_3p_4 \cdots p_{\nu-1}$	2^{ν}
$\nu+4$	$p_1^3p_2^2p_3p_4 \cdots p_{\nu+1}$	$3 \cdot 2^{\nu}$
$\nu+5$	$p_1^5p_2p_3 \cdots p_{\nu+1}$	$3 \cdot 2^{\nu}$
$\nu+3$	$p_1^2p_2p_3 \cdots p_{\nu+2}$	$3 \cdot 2^{\nu}$
$\nu+5$	$p_1^4p_2p_3 \cdots p_{\nu+2}$	$5 \cdot 2^{\nu}$
$\nu+7$	$p_1^6p_2p_3 \cdots p_{\nu+2}$	$7 \cdot 2^{\nu}$
$\nu+5$	$p_1^2p_2^2p_3p_4 \cdots p_{\nu+3}$	$3^2 \cdot 2^{\nu}$
$4\nu-2$	$(p_1p_2)^{2\nu-1}$	$2\nu^2$
4ν	$p_1^{2\nu+1}p_2^{2\nu-1}$	$2^2 \cdot d_{\nu}$
$4\nu-2$	$p_1^{2\nu}p_2^{2\nu-2}$	$2\nu^2-1$
$2\nu+1$	$p_1^2p_2^2p_3^2 \cdots p_{\nu}^2 p_{\nu+1}$	3^{ν}
$2\nu+3$	$p_1^3p_2^2p_3^2 \cdots p_{\nu+1}^2$	$2 \cdot 3^{\nu}$
$2\nu-1$	$p_1^{\nu-1}p_2^{\nu-1}p_3$	ν^2
$2\nu-1$	$p_1^{\nu}p_2^{\nu-1}$	d_{ν}
2ν	$p_1^{\nu}p_2^{\nu-1}p_3$	$2d_{\nu}$
$2\nu-1$	$p_1^{\nu+1}p_2^{\nu-2}$	$d_{\nu}-1$
$6\nu+3$	$p_1^{4\nu+2}p_2^{2\nu+1}$	$(\nu+1)(4\nu+3) = 3+11+19+27+\ldots$
$3(\nu+1)$	$p_1^{2\nu+2}p_2^{\nu+1}$	$\nu(4\nu+3) = 7+15+23+31+\ldots$
$d_{\nu-1}$	$p_1p_2^2p_3^3 \ldots p_{\nu-1}^{\nu-1}$	$1/2\ \nu!$
$2\nu+2$	$p_1^2p_2^2 \ldots p_{\nu+1}^2$	$1+3+3^2+\ldots+3^{\nu}=1/2(3^{\nu+1}-1)$

Das sind nur einige Beispiele. Es ist aber bemerkenswert, daß die Zahlenfolgen, welche die jeweilige Anzahl der Darstellungen durch eine Quadratsumme angeben, ganz verschiedenen Charakter haben. Es kommen vor:

Dreieckszahlen (z.B. α_{ν})
Quadratzahlen (z.B. ν^2)
arithmetische Folgen (z.B. 3ν)
arithmetische Reihen (z.B. $\nu(4\nu+3)$)
Potenzfolgen (z.B. $5 \cdot 2^{\nu}$)
Potenzreihen (z.B. $1+3+3^2+\ldots+3^{\nu}$)
Fakultätsfolgen (z.B. $\nu!/2$)

G.) Pythagoräisches Zahlentripel

Den unter F.) angeführten Typenfolgen entsprechen "Typenzahlen", die zu pythagoräischen Zahlentripeln führen. Es sind in der Tabelle die folgenden:

$\alpha_\nu = 2^{2m} \cdot p_1^{2\nu}$ $\qquad \nu = 1,2,3...$

$\beta_\nu = 2^{2m} \cdot (p_1 \cdot p_2)^\nu$ $\qquad \nu = 2,4,6...$

$\gamma_\nu = 2^{2m} \cdot p_1^{2\nu} \cdot p_2^{2\nu-2}$ $\qquad \nu = 1,2,3 \qquad m=0,1,2,3,...$

$\delta_\nu = 2^{2m} \cdot p_1^2 \cdot p_2^2 \cdot p_3^2 .... p_{\nu+1}^2$ $\qquad \nu = 1,2,3$

(p_1, p_2 sind in diesem Fall Primzahlen der Form $p=1+4t$)

Beispiel:

$\delta_\nu = \delta_2 = 2^{2m} \cdot p_1^4 \cdot p_2^2$

Mit $p_1=5$ $\quad p_2=13$ ist dann $m = 1$

$\delta_2 = 2^2 \cdot 5^4 \cdot 13^2 = 422\,500 = 650^2$

Mit dieser Quadratzahl sind 7 verschiedene pythagoräische Zahlentripel verbunden, die zu 7 verschiedenen Darstellungen der Quadratzahl 650^2 führen:

$$
\begin{aligned}
650^2 &= 72^2 + 646^2 \\
&= 160^2 + 630^2 \\
&= 182^2 + 624^2 \\
&= 250^2 + 600^2 \\
&= 330^2 + 560^2 \\
&= 390^2 + 520^2 \\
&= 408^2 + 506^2
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Pythagoräische Zahlentripel kann man auch auf eine zunächst merkwürdige Weise gewinnen: Für alle rationalen $0 < \lambda < 1$ ist

$$\frac{2\lambda}{1-\lambda^2}$$

eine rationale Zahl $^p/_q$, wobei p^2+q^2 immer eine Quadratzahl ist.

Beispiele:

$\lambda = {}^2/_3$

$\frac{2\lambda}{1-\lambda^2} = \frac{12}{5}$ $\qquad 5^2+12^2 = 13^2$

$\lambda = {}^5/_7$

$\frac{2\lambda}{1-\lambda^2} = \frac{35}{12}$ $\qquad 12^2+35^2 = 37^2$

$\lambda = {}^1/_{13}$

$\frac{2\lambda}{1-\lambda^2} = \frac{13}{84}$ $\qquad 13^2+84^2 = 85^2$

In den folgenden Tabellen sind die jeweils kleinsten unter den natürlichen Zahlen aufgelistet, die m verschiedene Darstellungen haben ($m = 1, 2, \dots, 13; 17$) Die mit p bezeichneten Darstellungen sind primitiv, die übrigen imprimitiv. Die Anzahl der Darstellungen ergibt sich aus der Tabelle für die Folgetypen. Entsprechend ihrer kanonischen Darstellung gehört eine natürliche durch eine Quadratsumme darstellbare Zahl zugleich mehreren verschiedenen Typenfolgen an.

Typen-Zugehörigkeit

$m = 1$

	$5 =$	$1^2 + 2^2$		

$m = 2$

$5 \cdot 13 =$	$65 =$	$1^2 + 8^2$	p	$p_1^{\nu-1} \cdot p_2$
	$=$	$4^2 + 7^2$	p	$p_1^{n-1} \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_{\nu+2}$
				$p_1 \cdot p_2 \cdots p_{\nu+1}$
				$(p_1 p_2)^{2\nu-1}$

$m = 3$

$5^2 \cdot 13 =$	$325 =$	$1^2 + 18^2$	p	$p_1^{\nu-1} p_2$
	$=$	$6^2 + 17^2$	p	$p_1^{n-1} \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_{\nu+2}$
	$=$	$10^2 + 15^2$		$p_1^{2} \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_{\nu+2}$
				$p_1^{\nu} \cdot p_2^{\nu-1}$
				$p_1^{n\nu+2} \cdot p_2^{2\nu+1}$

$m = 4$

$5 \cdot 13 \cdot 17 =$	$1105 =$	$4^2 + 33^2$	p	$p_1^{\nu-1} \cdot p_2 \cdot p_3$
	$=$	$9^2 + 32^2$	p	$p_1^{n-1} \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_{\nu+2}$
	$=$	$12^2 + 31^2$	p	$p_1 \cdot p_2 \cdots p_{\nu+1}$
	$=$	$23^2 + 24^2$	p	$p_1^{\nu-1} \cdot p_2^{\nu-1} \cdot p_3$

$m = 5$

$5^4 \cdot 13 =$	$8125 =$	$5^2 + 90^2$		$p_1^{\nu-1} \cdot p_2$
	$=$	$27^2 + 86^2$	p	$p_1^{4} \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_{\nu+2}$
	$=$	$30^2 + 85^2$		$p_1^{\nu+1} \cdot p_2^{\nu-2}$
	$=$	$50^2 + 75^2$		
	$=$	$58^2 + 69^2$	p	

$m = 6$

$5^2 \cdot 13 \cdot 17 =$	$5525 =$	$7^2 + 74^2$	p	$p_1^{\nu-1} \cdot p_2 \cdot p_3$
	$=$	$14^2 + 73^2$	p	$p_1^{2} \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_{\nu+2}$
	$=$	$22^2 + 71^2$	p	$p_1^{\nu} \cdot p_2^{\nu-1} \cdot p_3$
	$=$	$25^2 + 70^2$		
	$=$	$41^2 + 62^2$	p	
	$=$	$50^2 + 55^2$		

$p \hat{=}$ . . . .

E.) Ermittlung der Darstellungen einer natürlichen Zahl n aus deren kanonischer Darstellung und den Darstellungen ihrer Faktoren durch Quadratsummen.

Nach den vorangehenden Darstellungen genügt es sich auf

$$n = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \dots p_\gamma^{\beta_\gamma}$$

zu beschränken.

Wir erläutern das Prinzip der Rechnung ausgehend von dem einfachsten Beispiel:

$n = p_1 p_2$

$p_1 = a^2 + b^2$ $\qquad$ $p_2 = c^2 + d^2$

$p_1 = (a+bi)(a-bi)$ $\qquad$ $p_2 = (c+di)(c-di)$

Dann ist also

$$n = p_1 p_2 = (a+bi)(a-bi)(c+di)(c-di)$$

Ziel solcher Rechnungen ist dabei immer ein Produkt von einer geraden Anzahl von Faktoren in ein einfaches Produkt von 2 Faktoren umzuwandeln, so daß diese beiden Faktoren konjugiert komplexe Zahlen sind. In dem obigen Beispiel gibt es 2 Kombinationsmöglichkeiten:

1.) $n = (a+bi)(c+di) \cdot ((a-bi)(c-di)$
$= [ac-bd+(bc+ad)i] \cdot [ac-bd-(bc+ad))i]$
$= (ac-bd)^2 + (bc+ad)^2$

2.) $n = (a+bi)(c-di) \cdot (a-bi)(c+di)$
$= [ac+bd+(bc-ad)i] \cdot [ac+bd-(bc-ad)i]$
$= (ac+bd)^2+(bc-ad)^2$

Beispiel:

$n = 5 \cdot 13$

$p_1 = 1^2+2^2$ $\qquad$ $p_2 = 2^2+3^2$

$a=2$ $\qquad$ $c=3$

$b=1$ $\qquad$ $d=2$

1.) $n = 65 = (2 \cdot 3-1 \cdot 2)^2 + (1 \cdot 3+2 \cdot 2)^2 = 4^2 + 7^2$

2.) $n = 65 = (2 \cdot 3+1 \cdot 2)^2 + (1 \cdot 3-2 \cdot 2)^2 = 8^2 + 1^2$

Aus dem Vorangehenden ist klar, wie es weitergehen kann:
$n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$ muß $2 \cdot 2$ Darstellungen haben.

Insgesamt folgt daraus, dass
$n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_{\gamma+1}$ $\quad 2^\gamma$ verschiedene Darstellungen besitzt.

Für $p_3 = p_1$ wäre $n = p_1^2 \cdot p_2$

Untersucht man auf entsprechende Weise dieses Produkt, so erkennt man daß es nicht etwa 4 sondern nur 3 Darstellungen hat. Allgemein hat dann
$n = p_1^{\gamma-1} p_2$ genau γ verschiedene Darstellungen.

$m = 7$ (jeweils pythagoräische Zahlentripel)

$5^4 \cdot 13^2 =$	$325^2 =$	$36^2 + 323^2$	p	$p_1^{2\nu} \cdot p_2^{2\nu-2}$
$=$	$105\,625 =$	$80^2 + 315^2$		$p_1^{2\nu+2} \cdot p_2^{\nu+1}$
	$=$	$91^2 + 312^2$		
	$=$	$125^2 + 300^2$		
	$=$	$165^2 + 280^2$		
	$=$	$195^2 + 260^2$		
	$=$	$204^2 + 253^2$	p	

$m = 8$

$5^3 \cdot 13 \cdot 17 =$	$27\,625 =$	$20^2 + 165^2$		$p_1^{\nu-1} \cdot p_2 \cdot p_3$
	$=$	$27^2 + 164^2$	p	$p_1^{n-1} \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_{\nu+2}$
	$=$	$45^2 + 160^2$		$p_1^3 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_\nu$
	$=$	$60^2 + 155^2$		
	$=$	$83^2 + 144^2$	p	
	$=$	$88^2 + 141^2$	p	
	$=$	$101^2 + 132^2$	p	
	$=$	$115^2 + 120^2$		

$m = 9$

$5^2 \cdot 13^2 \cdot 17 =$	$71\,825 =$	$1^2 + 268^2$	p	$p_1^{n-1} \cdot p_2^2 \cdot p_3 \cdots p_{\nu+3}$
	$=$	$40^2 + 265^2$		$p_1^2 \cdot p_2^2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdots p_{\nu+3}$
	$=$	$65^2 + 260^2$		$p_1^2 \cdot p_2^2 \cdot p_3^2 \cdots p_\nu^2 \cdot p_{\nu+1}$
	$=$	$76^2 + 257^2$	p	$p_1^{\nu-1} \cdot p_2^{\nu-1} \cdot p_3$
	$=$	$104^2 + 247^2$		
	$=$	$127^2 + 236^2$	p	
	$=$	$160^2 + 215^2$		
	$=$	$169^2 + 208^2$		
	$=$	$188^2 + 191^2$	p	

$m = 10$

$5^4 \cdot 13 \cdot 17 =$	$138\,125 =$	$22^2 + 371^2$	p	$p_1^{\nu-1} \cdot p_2 \cdot p_3$
	$=$	$35^2 + 370^2$		$p_1^{n-1} \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_{\nu+2}$
	$=$	$70^2 + 365^2$		$p_1^4 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_{\nu+2}$
	$=$	$110^2 + 355^2$		
	$=$	$125^2 + 350^2$		
	$=$	$163^2 + 334^2$	p	
	$=$	$194^2 + 317^2$	p	
	$=$	$205^2 + 310^2$		
	$=$	$218^2 + 301^2$	p	
	$=$	$250^2 + 275^2$		

$m = 11$

$5^{21} = 476\,837\,158\,203\,125 =$ $\qquad p_1^{2\nu-1}$

$= 611\,950^2 + 21\,828\,025^2$
$= 2\,265\,625^2 + 21\,718\,750^2$
$= 3\,906\,250^2 + 21\,484\,375^2$
$= 5\,524\,375^2 + 21\,126\,250^2$
$= 6\,699\,319^2 + 20\,783\,558^2$ p
$= 8\,256\,250^2 + 20\,215\,625^2$
$= 9\,765\,625^2 + 19\,531\,250^2$
$= 11\,218\,750^2 + 18\,734\,375^2$
$= 12\,607\,255^2 + 17\,829\,590^2$
$= 13\,586\,375^2 + 17\,095\,250^2$
$= 14\,843\,750^2 + 16\,015\,625^2$

$m = 12$

$5^3 \cdot 13^2 \cdot 17 = 359\,125 = 18^2 + 599^2$ p $\qquad p_1^{n-1} \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_{\nu+3}$
$= 39^2 + 598^2$ $\qquad p_1^3 \cdot p_2^2 \cdot p_3 \cdots p_{\nu+1}$
$= 105^2 + 590^2$ $\qquad p_1^{\nu} \cdot p_2^{\nu-1} \cdot p_3$
$= 130^2 + 585^2$ $\qquad p_1 \cdot p_2^2 \cdot p_3^3 \cdots p_{\nu-1}^{\nu-1}$
$= 185^2 + 570^2$
$= 194^2 + 567^2$ p
$= 247^2 + 546^2$
$= 266^2 + 537^2$ p
$= 270^2 + 535^2$
$= 345^2 + 490^2$
$= 390^2 + 455^2$
$= 409^2 + 438^2$ p

$m = 13$

(jeweils pythagoräische Zahlentripel)

$5^3 \cdot 13^2 \cdot 17^2 = 1105^2 = 47^2 + 1104^2$ p $\qquad p_1^2 \cdot p_2^2 \cdot p_3^2 \cdots p_{\nu+1}^2$
$= 105^2 + 1100^2$
$= 169^2 + 1092^2$
$= 264^2 + 1073^2$ p
$= 272^2 + 1071^2$
$= 425^2 + 1020^2$
$= 468^2 + 1001^2$
$= 520^2 + 975^2$
$= 561^2 + 952^2$
$= 576^2 + 943^2$ p
$= 663^2 + 884^2$
$= 700^2 + 855^2$
$= 744^2 + 817^2$ p

$m = 17$

(jeweils pythagoräische Zahlentripel)

$5^6\,13^4 = 446\,265\,625 = 21\,125^2$ $\qquad p_1^{2\nu} p_2^{2\nu-2}$

$$
\begin{aligned}
&= 741^2 + 21\,112^2\\
&= 2340^2 + 20\,995^2\\
&= 2900^2 + 20\,925^2\\
&= 3075^2 + 20\,900^2\\
&= 5200^2 + 20\,475^2\\
&= 5915^2 + 20\,280^2\\
&= 7436^2 + 19\,773^2\\
&= 8125^2 + 19\,500^2\\
&= 8643^2 + 19\,276^2 \quad p\\
&= 8804^2 + 19\,203^2 \quad p\\
&= 10\,080^2 + 18\,565^2\\
&= 10\,235^2 + 18\,480^2\\
&= 10\,725^2 + 18\,200^2\\
&= 12\,675^2 + 16\,900^2\\
&= 13\,260^2 + 16\,445^2\\
&= 14\,469^2 + 15\,392^2\\
&= 14\,875^2 + 15\,000^2
\end{aligned}
$$