Formeln und Sätze für Kettenbrüche

In diesem gut lesbarem Manuskript hat Georg Glöckler –wahrscheinlich zum eigenen Gebrauch – einige Formeln und Eigenschaften von Kettenbrüchen notiert. Diese sind allgemein bekannt, und wer sich damit beschäftigen will, dem sei das Standardwerk von Oskar Perron: Die Lehre von den Kettenbrüchen, Bd. I und II, Darmstaft 1977 empfohlen.

Hier seien nun kurz die von Glöckler verwendetetn Bezeichnungen erläutert.

Ein Kettenbruch hat die Gestalt

$$x = q_0 + \cfrac{a_1}{q_1 + \cfrac{a_2}{q_2 + \cfrac{a_3}{q_3 + \ldots + \cfrac{a_n}{q_n}}}}$$

Die Näherungsbrüche sind dann

$$\frac{Z_0}{N_0} = \frac{q_0}{1} \quad \frac{Z_1}{N_1} = q_0 + \frac{a_1}{q_1} = \frac{q_1 \cdot q_0 + a_1}{q_1} \quad \frac{Z_2}{N_2} = q_0 + \cfrac{a_1}{q_1 + \cfrac{a_2}{q_2}} = \frac{(q_1 \cdot q_2 + a_2)\, q_0 + q_2 \cdot a_1}{q_1 \cdot q_2 + a_2}$$

und

$$\frac{Z_3}{N_3} = q_0 + \cfrac{a_1}{q_1 + \cfrac{a_2}{q_2 + \cfrac{a_3}{q_3}}} = q_0 + \cfrac{a_1}{q_1 + \cfrac{a_2 q_3}{q_3 q_2 + a_3}} = q_0 + \frac{(q_3 q_2 + a_3)\, a_1}{(q_3 q_2 + a_3)\, q_1 + a_2 q_3}$$

$$\frac{Z_3}{N_3} = \frac{[(q_3 q_2 + a_3)\, q_1 + a_2 q_3]\, q_0 + (q_3 q_2 + a_3)\, a_1}{(q_3 q_2 + a_3)\, q_1 + a_2 q_3} = \frac{q_3\,(q_2\,(q_1 \cdot q_0 + a_1) + a_2 \cdot q_0) + a_3\,(q_1 \cdot q_0 + a_1)}{q_3\,(q_1 \cdot q_2 + a_2) + a_3 \cdot q_1}$$

also

$$\begin{aligned}
Z_0 &= q_0 & N_0 &= 1 \\
Z_1 &= q_1 \cdot q_0 + a_1 & N_1 &= q_1 \\
Z_2 &= (q_1 \cdot q_2 + a_2)\, q_0 + q_2 \cdot a_1 & N_2 &= q_2 \cdot q_1 + a_2 \cdot 1 \\
Z_2 &= q_2\,(q_1 \cdot q_0 + a_1) + a_2 \cdot q_0 & & \\
Z_2 &= q_2 \cdot Z_1 + a_2 \cdot Z_0 & N_2 &= q_2 \cdot N_1 + a_2 \cdot N_0 \\
Z_3 &= q_3 \cdot Z_2 + a_3 \cdot Z_1 & N_3 &= q_3 \cdot N_2 + a_3 \cdot N_1
\end{aligned}$$

und hier erkennt man schon die Rekursionsformel (1).

Peter Baum

Formeln und Sätze für Kettenbrüche

(1) Für allgemeinen Kettenbruch gilt:

$$Z_\nu = q_\nu \cdot Z_{\nu-1} + a_\nu \cdot Z_{\nu-2} \qquad a_\nu, q_\nu > 0$$
$$N_\nu = q_\nu \cdot N_{\nu-1} + a_\nu \cdot N_{\nu-2}$$

wobei $Z_0 = 1 \quad Z_1 = q_1 \quad (a_1 = 1)$
$N_0 = 0 \quad N_1 = 1$

* (1a) Für regulären Kettenbruch $(a_\nu = 1)$

$$Z_\nu = q_\nu \cdot Z_{\nu-1} + Z_{\nu-2}$$
$$N_\nu = q_\nu \cdot N_{\nu-1} + N_{\nu-2}$$

*

(2) Determinante zweier aufeinanderfolgender Näherungs-Brüche eines allgemeinen Kettenbruches.

$$Z_\nu \cdot N_{\nu-1} - N_\nu \cdot Z_{\nu-1} = (-1)^\nu \cdot a_2 a_3 \cdots a_\nu$$

* (2a) Für einen regulären Kettenbruch gilt entsprechend

$$Z_\nu \cdot N_{\nu-1} - N_\nu \cdot Z_{\nu-1} = (-1)^\nu$$

*

* (2b) Alle Näherungsbrüche eines regulären Kettenbruchs sind gekürzt.

*

(3) Rekursive Darstellung eines regulären Kettenbruchs:

$$x_0 = (q_1; x_2) = (q_1; q_2, x_3) = \cdots (q_1; q_2, q_3 \cdots q_\nu; x_{\nu+1})$$

mit allgemein $x_n = q_n + \frac{1}{x_{n+1}}$

und
$$x_0 = \frac{x_{\nu+1} Z_\nu + Z_{\nu-1}}{x_{\nu+1} N_\nu + N_{\nu-1}}$$

(4) Fehlerabschätzung des ν-ten Näherungsbruchs:

$$\Delta f = \left| \frac{Z_\nu}{N_\nu} - x_0 \right| < \frac{1}{N_\nu^2}$$

*

$$\Delta f_1 < \frac{1}{q_\nu \cdot N_\nu^2} \quad \text{besser}$$

$$\Delta f_2 < \frac{1}{q_{\nu+1} \cdot N_\nu^2 + N_\nu N_{\nu-1}} \quad \text{noch besser}$$

* (5) zur „Güte" eines Näherungsbruchs eines regulären Kettenbruchs: *

Es gibt keinen Näherungsbruch von x_0 mit kleineren (natürlichen) Zahlen im Zähler und im Nenner, der sich von x_0 weniger unterscheidet als der ν-te Näherungsbruch $\frac{Z_\nu}{N_\nu}$. Alle besseren Näherungsbrüche als $\frac{Z_\nu}{N_\nu}$ haben größere (natürliche) Zahlen im Zähler und im Nenner.

(6) Alternierende Summendarstellung ~~eines regulären~~ eines Näherungsbruchs $\frac{Z_\nu}{N_\nu}$ eines regulären Kettenbruchs.

$$\frac{Z_\nu}{N_\nu} = q_1 + \frac{1}{N_1 \cdot N_2} - \frac{1}{N_2 \cdot N_3} + \frac{1}{N_3 \cdot N_4} - + \cdots \frac{(-1)^\nu}{N_\nu \cdot N_{\nu-1}}$$

(6a) Für einen unendlichen regulären Kettenbruch gilt:

$$x_0 = \lim_{\nu \to \infty} \frac{Z_\nu}{N_\nu} = q_1 + \sum_2^\infty \frac{(-1)^\nu}{N_\nu \cdot N_{\nu-1}}$$

Dabei ist die Teilsummenfolge der unendlichen Reihe identisch mit der Folge der Näherungsbrüche des regulären unendlichen Kettenbruchs.

(7) Es sei

$$y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \quad \text{mit} \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ ganz} > 0$$

y und x sind äquivalente Zahlen, wenn gilt

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$$

Bedeutung äquivalenter Zahlen: Sie haben ab einem bestimmten Teilnenner die gleiche Kettenbruch-Darstellung.

* (8) Alle unendlichen regulären Kettenbrüche sind konvergent.

* (9) Alle quadratischen Irrationalitäten haben einen periodischen unendl. regulären Kettenbruch und jeder ~~periodische reguläre~~ unendliche ~~reguläre Kettenbruch~~ periodische reguläre Kettenbruch entspricht einer quadratischen Irrationalität.

Kettenbrüche: Formeln und Sätze

1. Rekursionsformel eines allgemeinen Kettenbruchs

$$Z_n = q_n \cdot Z_{n-1} + a_n \cdot Z_{n-2}$$

$$N_n = q_n \cdot N_{n-1} + a_n \cdot N_{n-2}$$

mit $a_n > 0$ und $q_n > 0$; $n > 2$

1.a Rekursionsformel eines regulären Kettenbruchs

$$Z_n = q_n \cdot Z_{n-1} + Z_{n-2}$$

$$N_n = q_n \cdot N_{n-1} + N_{n-2}$$

mit $a_n = 1$ und $q_n > 0$; $n > 2$

2. Determinante zweier aufeinanderfolgender Näherungsbrüche eines allgemeinen Kettenbruchs
(bei regulären Kettenbrüchen $a_1, a_2, \ldots a_n = 1$)

$$Z_n \cdot N_{n-1} - N_n \cdot Z_{n-1} = (-1)^n \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots a_n$$

mit $a_i > 0$

3. Alle Näherungsbrüche eines regulären Kettenbruchessind gekürzt

$$\frac{Z_n}{N_n} - \frac{Z_1}{N_1} = \frac{1}{N_1 N_2} - \frac{1}{N_2 N_3} + \cdots - \frac{(-1)^n}{N_n N_{n-1}}$$

für endliche reguläre Kettenbrüche

$$\frac{Z_n}{N_n} = q_1 + \frac{1}{N_1 N_2} - \frac{1}{N_2 N_3} + \cdots - \frac{(-1)^n}{N_n N_{n-1}}$$

für unendliche reguläre Kettenbrüche ; $n \to \infty$: Konvergente unendliche Reihe

Die Teilersummen der unendlichen Reihe ist identisch mit der Folge der Näherungsbrüche des regulären unendlichen Kettenbruchs.

4. Fehlerabschätzung

$$\blacktriangle f = \left| \frac{Z_n}{N_n} - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{N_n^2} \qquad \text{genauer: } \blacktriangle f < \frac{1}{q_n \cdot N_n^2}$$

Bezüglich der "Güte" eines Näherungsbruches eines regulären Kettenbruchs gilt :
Es gibt keinen Näherungsbruch mit kleineren natürlichen Zahlen im Zähler und Nenner, der sich von a/b weniger unterscheidet als

$$\frac{Z_n}{N_n}$$

Alle bessseren Näherungsbrüche haben größere natürliche Zahlen im Zähler und Nenner.