Darstellung der Intervalle der temperierten Stimmung durch Kettenbrüche

Georg Glöckler hat sich viel mit Kettenbrüchen beschäftigt und mit deren Beziehung zu Musik. Denn die Kettenbrüche liefern ja bekannter Weise die besten Näherungsbrüche, insbesondere für die irrationalen Zahlen, die als Tonfrequenzen der gleichstufig temperierten Stimmung erscheinen. Da die gleichstufige Stimmung nur wenig von der reinen Stimmung abweicht, befinden sich unter den Näherungsbrüchen der Tonfrequenzen auch die Frequenzverhältnisse der reinen Stimmung.

Erläuterung der Tabelle Eine Oktave enthält 12 Töne, sie entsprechen den 12 Tasten (7 weiße und 5 schwarze) einer Klaviatur. Zwei benachbarte Tasten erzeugen ein Halbton-Intervall. Jeder Ton hat eine bestimmte Frequenz. Es ist erstaunlich, dass unser Ohr gerade die Intervalle derjenigen beiden Töne als schön und rein empfindet, deren Frequenzverhältnis das Verhältnis der ersten 10 natürlichen Zahlen ist. So hat die reine Stimmung einer Dur Tonleiter folgende Frequenzen (hier etwas kleiner als normal) und Frequenzverhältnisse:

	c		d		e		f		g		a		h		c’
Frequenz in Hz	240		270		300		320		360		400		450		480
Frequenzverhältnis zum Grundton c	$\frac{1}{1}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{5}{4}$		$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{3}$		$\frac{15}{8}$		$\frac{2}{1}$
Frequenzverhältnis benachbarter Töne		$\frac{9}{8}$		$\frac{10}{9}$		$\frac{16}{15}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{10}{9}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{16}{15}$	

Die beiden Halbtöne e-f und h-c’ haben dasselbe Frequenzverhältnis $\frac{f}{e} = \frac{c'}{h} = \frac{16}{15}$, während es in der reinen Stimmung zwei verschiedene Ganztöne gibt, den kleinen Ganzton $\frac{e}{d} = \frac{a}{g} = \frac{10}{9}$ und den großen Ganzton $\frac{d}{c} = \frac{h}{a} = \frac{9}{8}$.
Um die Intervalle zu addieren, muss man die entsprechenden Frequenzverhältnisse multiplizieren: die beiden Ganztöne c-d und d-e ergeben die große Terz c-e, und es ist $\frac{9}{8} \cdot \frac{10}{9} = \frac{5}{4}$. Will man also erreichen, dass 12 gleiche Halbtöne eine Oktave ergeben, muss das Halbtonintervall x der Gleichung $x^{12} = 2$ genügen, also ist $x = \sqrt[12]{2}$. Damit erhält man das gleichstufige Tonsystem, das in der Tabelle dargestellt ist.
Für jeden Frequenzwert ist der Anfang des unendlichen Kettenbruchs angegeben, aus dem man dann die besten Näherungsbrüche berechnen kann, welche ebenfalls jeweils in der Tabelle für jede Frequenz notiert sind.

Beispiel:

$$\sqrt[12]{2} = 1 + \cfrac{1}{16 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}}} = [1; 16, 1, 4, 2, 7, 1, \cdots]$$

und

$$\sqrt[12]{2} \approx 1 + \frac{1}{16} = \frac{17}{16} \qquad \sqrt[12]{2} \approx 1 + \frac{1}{16 + \frac{1}{1}} = \frac{18}{17} \qquad \sqrt[12]{2} \approx 1 + \frac{1}{16 + \frac{1}{1+\frac{1}{4}}} = \frac{89}{84}$$

Peter Baum

Darstellung der Intervalle der temperierten Stimmung durch Kettenbrüche

d:	$1:1$	$=1$	Prim
dis:	$\sqrt[12]{2}:1$	$=1;\ 16,\ 1,\ 4,\ 2,\ 7,\ 1,\ \ldots$	Kl. Sekunde
	$=\sqrt[12]{2}$	$=\frac{1}{1};\frac{17}{16};\frac{18}{17};\frac{89}{84};\ldots$	
e:	$\sqrt[12]{2^2}:1$	$=1;\ 8,\ 6,\ 31,\ 1,\ \ldots$	Gr. Sekunde
	$=\sqrt[6]{2}$	$=\frac{1}{1};\frac{9}{8};\frac{55}{49};\frac{1714}{1527};\ldots$	
f:	$\sqrt[12]{2^3}:1$	$=1;\ 5,\ 3,\ 1,\ 1,\ 40,\ \ldots$	Kl. Terz (Mollterz)
	$=\sqrt[4]{2}$	$=\frac{1}{1};\frac{6}{5};\frac{19}{16};\frac{25}{21};\frac{44}{37};\frac{1785}{1501};\ldots$	
fis:	$\sqrt[12]{2^4}:1$	$=1;\ 3,\ 1,\ 5,\ 1,\ 1,\ 4,\ \ldots$	Gr. Terz (Durterz)
	$=\sqrt[3]{2}$	$=\frac{1}{1};\frac{4}{3};\frac{5}{4};\frac{29}{23};\frac{34}{27};\frac{63}{50};\frac{286}{227};\ldots$	
g:	$\sqrt[12]{2^5}:1$	$=1;\ 2,\ 1,\ 73,\ \ldots$	Quarte
	$=\sqrt[3]{32}$	$=\frac{1}{1};\frac{3}{2};\frac{4}{3};\frac{295}{221};\ldots$	
gis:	$\sqrt[12]{2^6}:1$	$=1;\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ \ldots$	Tritonus
	$=\sqrt{2}$	$=\frac{1}{1};\frac{3}{2};\frac{7}{5};\frac{17}{12};\ldots$	
a:	$\sqrt[12]{2^7}:1$	$=1;\ 2,\ 147,\ \ldots$	Quinte
	$=\sqrt[12]{128}$	$=\frac{1}{1};\frac{3}{2};\frac{442}{295};\ldots$	
ais:	$\sqrt[12]{2^8}:1$	$=1;\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 1,\ 3,\ \ldots$	Kl. Sexte
	$=\sqrt[3]{4}$	$=\frac{1}{1};\frac{2}{1};\frac{3}{2};\frac{8}{5};\frac{19}{12};\frac{27}{16};\frac{100}{63};\ldots$	
h:	$\sqrt[12]{2^9}:1$	$=1;\ 1,\ 2,\ 7,\ 81,\ \ldots$	Sexte
	$=\sqrt[4]{8}$	$=\frac{1}{1};\frac{2}{1};\frac{5}{3};\frac{37}{22};\frac{3002}{1785}\ldots$	
c:	$\sqrt[12]{2^{10}}:1$	$=1;\ 1,\ 3,\ 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 1,\ 15\ \ldots$	Kl. Septime
	$=\sqrt[6]{32}$	$=\frac{1}{1};\frac{2}{1};\frac{7}{4};\frac{9}{5};\frac{16}{9};\frac{41}{23};\frac{57}{32};\frac{89}{55};\frac{1527}{857}\ldots$	
cis:	$\sqrt[12]{2^{11}}:1$	$=1;\ 1,\ 7,\ 1,\ 9,\ \ldots$	Gr. Septime
	$=\sqrt[12]{2048}$	$=\frac{1}{1};\frac{2}{1};\frac{15}{8};\frac{17}{9};\frac{168}{89};\ldots$	
d':	$\sqrt[12]{2^{12}}:1$	$=2\ =\frac{2}{1}$	Oktave