Quadratsummen aus aufeinanderfolgenden Quadratzahlen

In diesem Text wird eine bemerkenswerte Zahlenbeziehung vorgestellt und mathematisch weiter verfolgt. Die Frage, wann die Summe der ersten n Quadratzahlen wieder eine Quadratzahl a^2 ist, scheint in der Literatur nicht behandelt worden zu sein. Glöcklers Aussage, dass das einzig für $n = 24$ mit $a = 70$ (und $n = 1,\ a = 1$) eintritt, konnte auch nicht direkt verifiziert werden. Immerhin kann man durch theoretische Überlegungen und geringen Rechenaufwand zeigen, dass der nächste Wert jedenfalls $n > 10^{12}$ sein müsste. Derartige große Zahlenwerte wären für qualitative Betrachtungen aber nicht mehr von Interesse.

Dagegen legt jenes exzeptionelle Phänomen der Verbindung der Zahlen 24 und 70 tieferliegende Zusammenhänge nahe. Dies bestätigen zunächst weitere mathematische Eigenschaften. Zum einen gibt es genau 24 zu 70 relativ prime Zahlen. Sodann haben beide Zahlen jeweils 8 Teiler: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 bzw. 1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70. (Nebenbei bemerkt ist das kleinste gemeinsame Vielfache von 24 und 70 die Zahl 840 und das ist die kleinste durch 1,2,...,8 teilbare Zahl.) Die Summe dieser Zahlen ist im ersten Fall $60 = 5 \cdot 12$, im zweiten Fall $144 = 12 \cdot 12$. 24 und 70 bilden daher mit den Zahlen 8 und 12 eine Zahlengemeinschaft.

Einen grundlegenden außermathematischen Zusammenhang von 24 und 70 haben Glöckler und seine Frau in einem Artikel, auf den bereits im Vorwort hingewiesen wurde, herausgearbeitet ("Das Goetheanum" Nr. 66, S. 729-730 (2.4.1995)). Es geht dabei um die bedeutsame Zahl 25920 – die Anzahl der Jahre des platonischen Weltenjahres, die durchschnittliche Anzahl der täglichen Atemzüge, etc. Sie hat 70 Teiler. 8 sind es zwischen 24 und 48: 24, 27, 30, 32, 36, 40, 45, 48. Deren jeweiliges Verhältnis zur Anfangszahl 24 beschreibt nun gerade alle Intervalle der Durtonleiter: 24:24 (Prim), 24:27 (Sekund), 24:30 (große Terz), 24:32 (Quart), ..., 24:48 (Oktave). Das Zahlenpaar 24, 70 verweist somit auf die Verbindung von Kosmos und Musik, in ihm spricht sich die Sphärenharmonie in abstrakter numerischer Weise aus. Diese Sinndeutung wird durch die Faktorisierung der Zahl 24 noch zusätzlich gestützt. $24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ stellt ja das multiplikative Analogon der Zahl $10 = 1 + 2 + 3 + 4$ dar und diese ist Ausdruck der pythagoräischen Tetraktys. Ihre Verehrung verdankt sie unter anderem der Tatsache, dass in ihr die Intervalle Quart, Quint, Oktav (1:2, 2:3, 3:4) zum Ausdruck kommen. Diese Eigenschaft gilt aber nun geradeso für die Zahl 24. Was sich als Ganzheit im Verhältnis der Zahlen 70 und 24 ausspricht, spiegelt sich verkleinert in der 24 wider.

Schließlich sei noch auf das beachtenswerte Auftreten der Zahlen 70 und 24 in der Bibel hingewiesen. Im Alten Testament werden 70 Älteste ge-

nannt, die das Volk Israel repräsentieren. Jahwe verlangte von Moses sowohl beim Bundesschluss (Ex 24,1.9), als auch bei der Bestrafung des Volkes (Num11,16.24), dass er eine solche Schar mitführe. Dagegen sind es beim Jüngsten Gericht 24 Älteste vor dem Throne des Höchsten, die das Lamm anbeten und der Öffnung des Buches mit den sieben Siegeln beiwohnen (Offb 5,6-8).

G. Kowol

Quadratsummen aus aufeinanderfolgenden Quadratzahlen

Georg Glöckler*

Text von Georg Glöckler

Unter den Quadratsummen von aufeinanderfolgenden Quadratzahlen gibt es solche mit bemerkenswerten Eigenschaften.

Wir wollen der Reihe nach einige solche Quadratsummen charakterisieren.

a) Die Summe aus den erten 24 Quadratzahlen ist die Quadratzahl 70^2:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 23^2 + 24^2 = 70^2$$

Keine andere Summe aus den <u>ersten</u> aufeinanderfolgenden Quadratzahlen ergibt wieder eine Quadratzahl. Dagegen gibt es unbegrenzt viele Quadratzahlen, die sich als Summe von 24 aufeinanderfolgenden Quadratzahlen ergeben. Dies zeigt die folgende Rechnung, die auf eine erweiterte Pell'sche Gleichung führt:

$$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 + \cdots + (x+23)^2 = q^2$$

Daraus folgt

$$q^2 - 6\,(2x+23)^2 = 1150$$

Diese Gleichung hat die folgenden Lösungspaare:

q	2x+23	x	q	2x+23	x
34	1	-11	182	73	25
38	7	-8	274	111	44
50	15	-4	430	175	76
70	25	1	650	265	121
106	41	9	1022	417	197
158	63	20	⋮	⋮	⋮

*Undatierte Handschrift Nr. 196 aus dem Nachlass, übertragen von Peter Baum

Bemerkenswert bei solchen Tabellen sind die rekursiven Beziehungen. Im obigen Fall gilt:

$$\begin{aligned}
182 &= 24 \cdot 1 + 158 \\
274 &= 24 \cdot 7 + 106 \\
430 &= 24 \cdot 15 + 70 \\
650 &= 24 \cdot 25 + 50 \\
1022 &= 24 \cdot 41 + 38 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Insgesamt ergeben sich also unbegrenzt viele Summen von 24 aufeinanderfolgenden Quadratzahlen deren Summenwert wieder eine Quadratzahl ist:

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 23^2 + 24^2 &= 70^2 \\
9^2 + 10^2 + 11^2 + \cdots + 31^2 + 32^2 &= 106^2 \\
20^2 + 21^2 + 22^2 + \cdots + 42^2 + 43^2 &= 158^2 \\
25^2 + 26^2 + 27^2 + \cdots + 47^2 + 48^2 &= 182^2 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

b) Eine ganz andere Kategorie von aufeinanderfolgenden Quadratzahlen führt zur Gleichheit von Quadratsummen. Die folgende Darstellung spricht zunächst ganz für sich:

$$\begin{aligned}
3^2 + 4^2 &= & 5^2 = 25 &= 5 \cdot 5 \\
10^2 + 11^2 + 12^2 &= & 13^2 + 14^3 = 365 &= 5 \cdot 73 \\
21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 &= & 25^2 + 26^2 + 27^2 = 2030 &= 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 29 \\
36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 &= & 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2 &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 241 \\
55^2 + 56^2 + 57^2 + 58^2 + 59^2 + 60^2 &= & 61^2 + 62^2 + 63^2 + 64^2 + 65^2 &= 5 \cdot 11 \cdot 19^2 \\
&\vdots & \vdots & \vdots
\end{aligned}$$

Anmerkung: Die Basiszahlen 3, 10, 21, 38, 55, 78, ... sind Dreieckszahlen der Form $d_{2n} = n\,(n+1)$.

c) Eine gewisse Modifikation der Quadratsummen unter b) zeigt die folgende Darstellung:

$$\begin{array}{rrr} & & \Sigma \\ 4^2+5^2= & 1^2+2^2+6^2 & 9 \\ 9^2+10^2+11^2= & 4^2+5^2+6^2+15^2 & 30 \\ 16^2+17^2+18^2+19^2= & 9^2+10^2+11^2+12^2+28^2 & 70 \\ 25^2+26^2+27^2+28^2+29^2= & 16^2+17^2+18^2+19^2+20^2+45^2 & 135 \\ 36^2+37^2+38^2+39^2+40^2+41^2= & 25^2+26^2+27^2+28^2+29^2+30^2+66^2 & 231 \end{array}$$

Anmerkung: Diese Folge vereinigt eine ganze Reihe an Eigenschaften:

1. Die Basissummen links und rechts sind gleich. Daraus folgt z.B. die folgende Darstellung:

$$\begin{array}{rr} 41= & 4^2+5^2=1^2+2^2+6^2 \\ 62= & 1^2+5^2+6^2=2^2+3^2+7^2 \\ 89= & 2^2+6^2+7^2=3^2+4^2+8^2 \\ 122= & 3^2+7^2+8^2=4^2+5^2+9^2 \\ 161= & 4^2+8^2+9^2=5^2+6^2+10^2 \end{array}$$

2. Links und rechts sind die Anfangszahlen selbst Quadratzahlen.
3. Die Darstellungen links und rechts sind zueinander komplementär, was z.B. bei

$$9^2+10^2+11^2=4^2+5^2+6^2+15^2$$

besagt

$$\begin{array}{lccccccccccc} & 0^2 & + & 9^2 & + & 10^2 & + & 11^2 & = & 4^2 & + & 5^2 & + & 6^2 & + & 15^2 \\ \text{Differenzen:} & & & 9 & & 1 & & 1 & & & & 1 & & 1 & & 9 \end{array}$$

4. Die Endbasiszahlen rechts sind Dreieckszahlen der Form d_{2n+1} oder Hexagesimalzahlen h_n.

d) Auch im Bereich der Aufeinanderfolge von nur zwei Quadratzahlen gibt es bemerkenswerte Tatsachen.
Ausgangspunkt sei das ägyptische Zahlentripel 3, 4 und 5 mit $3^2+4^2=5^2$.
Wir können die Frage stellen: Welche 2 aufeinanderfolgende Quadratzahlen ergeben als Summe wieder eine Quadratzahl?
Die folgende Aufstellung zeigt das Ergebnis.:

$$\begin{array}{cc} 0^2+1^2=1^2 & 4059^2+4060^2=5741^2 \\ 3^2+4^2=5^2 & 23\,660^2+23\,661^2=33\,461 \\ 20^2+21^2=29^2 & 137903^2+137\,904^2=195\,025^2 \\ 119^2+120^2=169^2 & 803\,760^2+803\,761^2=1\,136\,689^2 \\ 696^2+697^2=985^2 & 4\,684\,659^2+4\,684\,660^2=6\,625\,109^2 \end{array}$$

die praktische Berechnung der pythagoräischen Zahlentripel kann zum Beispiel durch den folgenden Ansatz geschehen:

$$x^2 + (x+1)^2 = q^2$$

was zu der klassischen Pell'schen Gleichung führt:

$$2q^2 - (2x+1)^2 = 1$$

n	q_n	$2x_n + 1$	x_n
1	1	1	0
2	5	7	3
3	29	41	20
4	169	239	119
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Bemerkenswert ist hier noch die Rekursionsformel

$$q_n = 6 \cdot q_{n-1} - q_{n-2}$$

e) Ein dem Bereich d) entsprechende aber wieder ganz andere Kategorie von nur zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen ergibt die folgende Aufstellung, die wir sogleich etwas systematisieren:

$$\begin{aligned} 4^2 + 5^2 &= 1^2 + 2^2 + 6^2 & \qquad 4^2 + 5^2 &= 1^2 + 2^2 + 6^2 \\ 7^2 + 8^2 &= 2^2 + 3^2 + 10^2 & 11^2 + 12^2 &= 2^2 + 6^2 + 15^2 \\ 10^2 + 11^2 &= 3^2 + 4^2 + 14^2 & 18^2 + 19^2 &= 3^2 + 10^2 + 24^2 \\ 13^2 + 14^2 &= 4^2 + 5^2 + 18^2 & 25^2 + 26^2 &= 4^2 + 14^2 + 33^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9^2 + 10^2 &= 1^2 + 6^2 + 12^2 & \qquad 9^2 + 10^2 &= 1^2 + 6^2 + 12^2 \\ 16^2 + 17^2 &= 2^2 + 10^2 + 21^2 & 22^2 + 23^2 &= 2^2 + 15^2 + 28^2 \\ 23^2 + 24^2 &= 3^2 + 14^2 + 30^2 & 35^2 + 36^2 &= 3^2 + 24^2 + 44^2 \\ 30^2 + 31^2 &= 4^2 + 18^2 + 39^2 & 48^2 + 49^2 &= 4^2 + 33^2 + 60^2 \end{aligned}$$

Die Tabellen insgesamt erfassen bedeutet, das von jeder Grunddarstellung der Form

$$\left(n^2\right)^2 + \left(n^2+1\right)^2 = 1^2 + \left(n^2-n\right)^2 + \left(n^2+n\right)^2 \tag{1}$$

jeweils zwei Folgen von Quadratsummen mit gleicher jeweils gleichen Basissummen mit gleichen Quadratsummen ausgehen:

$$\begin{aligned} y_{n\nu}^2 + z_{n\nu}^2 &= u_{n\nu}^2 + v_{n\nu}^2 + w_{n\nu}^2 \\ y_{n\nu} + z_{n\nu} &= u_{n\nu} + v_{n\nu} + w_{n\nu} \end{aligned}$$

1. Folge:

$$\begin{aligned} y_{n\nu} &= \left[n^2 + \nu\left(n^2 - n + 1\right)\right] & u_{n\nu} &= (\nu + 1) \\ z_{n\nu} &= \left[n^2 + \nu\left(n^2 - n + 1\right) + 1\right] & v_{n\nu} &= \left[n^2 - n + \nu\,(n-1)^2\right] \\ & & w_{n\nu} &= \left[n^2 + n + \nu \cdot n^2\right] \end{aligned} \tag{2}$$

2.Folge:

$$\begin{aligned} y_{n\nu} &= \left[n^2 + \nu\left(n^2 + n + 1\right)\right] & u_{n\nu} &= (\nu + 1) \\ z_{n\nu} &= \left[n^2 + \nu\left(n^2 + n + 1\right) + 1\right] & v_{n\nu} &= \left[n^2 - n + \nu \cdot n^2\right] \\ & & w_{n\nu} &= \left[n^2 + n + \nu\,(n+1)^2\right] \end{aligned} \tag{3}$$

für $n = 1, 2, 3, \cdots$ und $\nu = 1, 2, 3, \cdots$.
Einige Beispiele für die ersten Mehrfachdarstellungen:

Zu I	$n = 5$	$\nu = 2$	$67^2 + 68^2 = 3^2 + 52^2 + 80^2$
Zu II	$n = 2$	$\nu = 9$	$67^2 + 68^2 = 10^2 + 38^2 + 87^2$
Zu I	$n = 2$	$\nu = 21$	$67^2 + 68^2 = 22^2 + 23^2 + 90^2$

Entsprechend ergeben sich für die ersten Darstellungen dieser Art (mit der Basissumme BS):

BS	
33	$16^2 + 17^2 = 1^2 + 12^2 + 20^2 = 2^2 + 10^2 + 21^2 = 5^2 + 6^2 + 22^2$
51	$25^2 + 26^2 = 1^2 + 20^2 + 30^2 = 4^2 + 19^2 + 33^2 = 8^2 + 9^2 + 34^2$
135	$67^2 + 68^2 = 3^2 + 52^2 + 80^2 = 10^2 + 38^2 + 87^2 = 22^2 + 23^2 + 90^2$
159	$79^2 + 80^2 = 2^2 + 66^2 + 91^2 = 11^2 + 46^2 + 102^2 = 26^2 + 27^2 + 106^2 = 4^2 + 60^2 + 95^2$

Kombiniert man die Aussagen der verschiedenen Folgen, so ergibt sich z.B. folgende bemerkenswerte Summengleichheit:

$$\begin{aligned} 364^2 + 365^2 &= 121^2 + 122^2 + 486^2 \\ &= 40^2 + 41^2 + 162^2 + 486^2 \\ &= 13^2 + 14^2 + 54^2 + 162^2 + 486^2 \\ &= 4^2 + 5^2 + 18^2 + 54^2 + 162^2 + 486^2 \\ &= 1^2 + 2^2 + 6^2 + 18^2 + 54^2 + 162^2 + 486^2 \end{aligned}$$

Dabei sind die jeweiligen Basissummen gleich der Quadratzahl $27^2 = 364 + 365$.

3

$$4^2+5^2 = 1^2+2^2+6^2$$
$$7^2+8^2 = 2^2+3^2+10^2$$
$$10^2+11^2 = 3^2+4^2+14^2$$
$$13^2+14^2 = 4^2+5^2+18^2$$
$$16^2+17^2 = 5^2+6^2+22^2$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

7

$$4^2+5^2 = 1^2+2^2+6^2$$
$$11^2+12^2 = 2^2+6^2+15^2$$
$$18^2+19^2 = 3^2+10^2+24^2$$
$$25^2+26^2 = 4^2+14^2+33^2$$
$$32^2+33^2 = 5^2+18^2+42^2$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

7

$$9^2+10^2 = 1^2+6^2+12^2$$
$$16^2+17^2 = 2^2+10^2+21^2$$
$$23^2+24^2 = 3^2+14^2+30^2$$
$$30^2+31^2 = 4^2+18^2+39^2$$
$$37^2+38^2 = 5^2+22^2+48^2$$

13

$$9^2+10^2 = 1^2+6^2+12^2$$
$$22^2+23^2 = 2^2+15^2+28^2$$
$$35^2+36^2 = 3^2+24^2+44^2$$
$$48^2+49^2 = 4^2+33^2+60^2$$
$$61^2+62^2 = 5^2+42^2+76^2$$

$$9^2+10^2 = 1^2+6^2+12^2$$
$$18^2+19^2 = 3^2+10^2+24^2$$
$$30^2+31^2 = 6^2+15^2+40^2$$
$$45^2+46^2 = 10^2+21^2+60^2$$
$$62^2+64^2 = 15^2+28^2+84^2$$

13

$$16^2+17^2 = 1^2+12^2+20^2$$
$$29^2+30^2 = 2^2+21^2+36^2$$
$$42^2+43^2 = 3^2+30^2+52^2$$
$$55^2+56^2 = 4^2+39^2+68^2$$
$$68^2+69^2 = 5^2+48^2+84^2$$

21

$$16^2+17^2 = 1^2+12^2+20^2$$
$$37^2+38^2 = 2^2+28^2+45^2$$
$$58^2+59^2 = 3^2+44^2+70^2$$
$$79^2+80^2 = 4^2+60^2+95^2$$
$$100^2+101^2 = 5^2+76^2+120^2$$

21

$$25^2+26^2 = 1^2+20^2+30^2$$
$$46^2+47^2 = 2^2+36^2+55^2$$
$$67^2+68^2 = 3^2+52^2+80^2$$
$$88^2+89^2 = 4^2+68^2+105^2$$
$$109^2+110^2 = 5^2+84^2+130^2$$

21

$$25^2+26^2 = 1^2+20^2+30^2$$
$$56^2+57^2 = 2^2+45^2+66^2$$
$$87^2+88^2 = 3^2+70^2+102^2$$
$$118^2+119^2 = 4^2+95^2+138^2$$
$$149^2+150^2 = 5^2+120^2+174^2$$

21

$$36^2+37^2 = 1^2+30^2+42^2$$
$$67^2+68^2 = 2^2+55^2+78^2$$
$$98^2+99^2 = 3^2+80^2+114^2$$
$$129^2+130^2 = 4^2+105^2+150^2$$
$$160^2+161^2 = 5^2+130^2+186^2$$

43

$$36^2+37^2 = 1^2+30^2+42^2$$
$$79^2+80^2 = 2^2+66^2+91^2$$
$$122^2+123^2 = 3^2+102^2+140^2$$
$$165^2+166^2 = 4^2+138^2+189^2$$
$$208^2+209^2 = 5^2+174^2+238^2$$

Tabelle 1: Folgen von Quadratsummen 1

$$5^2+7^2 = 1^2+3^2+8^2$$
$$6^2+9^2 = 1^2+4^2+11^2$$
$$7^2+11^2 = 1^2+5^2+12^2$$
$$8^2+13^2 = 1^2+6^2+14^2$$

413

$$4^2+5^2 = 1^2+2^2+6^2$$

$$5^2+8^2 = 2^2+2^2+9^2$$
$$6^2+11^2 = 3^2+2^2+12^2$$
$$7^2+14^2 = 4^2+2^2+15^2$$
$$8^2+17^2 = 5^2+2^2+18^2$$

$$8^2+10^2 = 2^2+4^2+12^2 \; i$$
$$15^2 = 9^2+12^2 = 2^2+5^2+14^2$$
$$10^2+14^2 = 2^2+6^2+16^2 \; i$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

5000

$$7^2+8^2 = 2^2+3^2+10^2$$

$$7^2+15^2 = 3^2+3^2+16^2$$
$$8^2+19^2 = 4^2+3^2+20^2$$
$$9^2+23^2 = 5^2+3^2+24^2$$
$$37^2 = 12^2+35^2 = 8^2+3^2+36^2$$

$$11^2+18^2 = 3^2+5^2+16^2$$
$$12^2+15^2 = 3^2+6^2+18^2 \; i$$
$$13^2+17^2 = 3^2+7^2+20^2$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

666

$$10^2+11^2 = 3^2+4^2+14^2$$

$$9^2+24^2 = 4^2+4^2+25^2$$
$$10^2+28^2 = 5^2+4^2+30^2$$
$$\cancel{10^2+16^2 = 4^2+4^2+18^2}$$
$$\cancel{11^2+19^2 = 5^2+4^2+21^2}$$
$$\cancel{12^2+22^2 = 6^2+4^2+24^2}$$
$$11^2+34^2 = 6^2+4^2+35^2$$

$$14^2+16^2 = 4^2+6^2+20^2 \; i$$
$$15^2+18^2 = 4^2+7^2+22^2$$
$$16^2+20^2 = 4^2+8^2+24^2 \; i$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

30^2

$$13^2+14^2 = 4^2+5^2+18^2$$

$$11^2+35^2 = 5^2+5^2+36^2$$
$$12^2+41^2 = 6^2+6^2+42^2$$
$$13^2+47^2 = 7^2+6^2+48^2$$

$$17^2+19^2 = 5^2+7^2+24^2 \; i$$
$$18^2+21^2 = 5^2+8^2+26^2$$
$$19^2+23^2 = 5^2+9^2+28^2 \; i$$

$$16^2+17^2 = 5^2+6^2+22^2$$

$$\cancel{24^2+39^2 = 6^2+6^2+45^2}$$
$$13^2+48^2 = 6^2+6^2+49^2$$
$$14^2+55^2 = 7^2+6^2+56^2$$
$$15^2+62^2 = 8^2+6^2+63^2$$

$$20^2+22^2 = 6^2+8^2+28^2 \; i$$
$$21^2+24^2 = 6^2+9^2+30^2 \; i$$
$$22^2+26^2 = 6^2+10^2+32^2 \; i$$
$$23^2+28^2 = 6^2+11^2+34^2$$

$$19^2+20^2 = 6^2+7^2+26^2$$

$$15^2+68^2 = 7^2+7^2+69^2$$
$$16^2+71^2 = 8^2+7^2+72^2$$
$$17^2+79^2 = 9^2+7^2+80^2$$

$$5^2+8^2 = 54^2$$
$$6^2+8^2 = 62^2$$
$$7^2+8^2 = 72^2$$

$$23^2+25^2 = 7^2+9^2+32^2$$
$$24^2+27^2 = 7^2+10^2+34^2$$
$$25^2+29^2 = 7^2+11^2+36^2$$

$$22^2+23^2 = 7^2+8^2+30^2$$

$$17^2+80^2 = 8^2+8^2+81^2$$
$$18^2+89^2 = 9^2+8^2+90^2$$
$$19^2+98^2 = 10^2+8^2+99^2$$

Tabelle 2: Folgen von Quadratsummen 2

$$14^2+17^2 = 2^2+8^2+20^2 \quad 17^2+22^2 = 2^2+12^2+25^2 \quad 20^2+27^2 = 2^2+15^2+30^2$$

$$\leftarrow \quad 11^2+12^2 = 2^2+6^2+15^2 \quad \rightarrow$$

$$8^2+6^2+18^2 = 12^2+15^2 \quad 4^2+6^2+21^2 = 13^2+18^2 \quad 5^2+6^2+24^2 = 14^2+21^2 \quad 6^2+6^2+27^2 = 15^2+24^2$$

$$28^2+27^2 = 3^2+15^2+32^2 \quad 28^2+33^2 = 3^2+20^2+40^2 \quad 33^2+43^2 = 3^2+25^2+48^2 \quad 38^2+51^2 = 3^2+30^2+56^2$$

$$\leftarrow \quad 18^2+19^2 = 3^2+10^2+24^2 \quad \rightarrow$$

$$8^2+10^2+27^2 = 19^2+22^2 \quad 6^2+10^2+30^2 = 20^2+25^2 \quad 6^2+10^2+33^2 = 21^2+28^2 \quad 7^2+10^2+36^2 = 24^2+31^2$$

$$32^2+37^2 = 4^2+28^2+41^2 \quad 39^2+48^2 = 4^2+38^2+55^2 \quad 46^2+55^2 = 4^2+35^2+66^2$$

$$\leftarrow \quad 25^2+26^2 = 4^2+14^2+33^2 \quad \rightarrow$$

$$5^2+14^2+36^2 = 26^2+29^2 \quad 6^2+14^2+38^2 = 27^2+32^2 \quad 7^2+14^2+42^2 = 28^2+35^2 \quad 8^2+14^2+45^2 = 31^2+38^2$$

$$14^2+23^2 = 1^2+8^2+15^2 \quad 16^2+16^2 = 1^2+10^2+18^2 \quad 16^2+18^2 = 1^2+12^2+24^2$$

$$\leftarrow \quad 5^2+10^2 = 1^2+6^2+12^2 \quad \rightarrow$$

$$2^2+6^2+16^2 = 10^2+14^2 \quad 3^2+6^2+20^2 = 11^2+18^2 \quad 4^2+6^2+24^2 = 12^2+22^2$$

$$20^2+23^2 = 2^2+14^2+27^2 \quad 24^2+28^2 = 2^2+18^2+32^2 \quad 28^2+35^2 = 2^2+22^2+39^2$$

$$\leftarrow \quad 16^2+17^2 = 2^2+10^2+21^2 \quad \rightarrow$$

$$10^2 = 15^2+21^2 \quad \cancel{16^2+23} \quad 3^2+10^2+26^2 = 16^2+34^2 \quad 4^2+10^2+38^2 = 17^2+40^2 \quad 5^2+10^2+42^2 = 17^2+40^2$$

$$28^2+33^2 = 3^2+20^2+39^2 \quad 35^2+42^2 = 3^2+26^2+48^2 \quad 44^2+54^2 = 3^2+32^2+57^2$$

$$\leftarrow \quad 23^2+24^2 = 3^2+14^2+30^2 \quad \rightarrow$$

$$4^2+14^2+49^2 = 20^2+46^2 \quad 5^2+14^2+56^2 = 21^2+54^2 \quad 6^2+14^2+64^2 = 22^2+62^2$$

$$\cancel{14^2+22^2 = 1^2+15^2+24^2} \quad 19^2+25^2 = 1^2+16^2+27^2 \quad \cancel{22^2+33^2 = 1^2+20^2+34^2} \quad 22^2+41^2 = 1^2+20^2+42^2 \quad 28^2+65^2 = 1^2+24^2$$

$$\leftarrow \quad 16^2+17^2 = 1^2+12^2+20^2$$

$$P_4(n) = \frac{(n-2)n^2+(n-1)n}{2}$$

Tabelle 3: Folgen von Quadratsummen 3

Kommentar (PB)

Das Manuskript endet mit diesen drei Tabellen. Zunächst folgen Bemerkungen zur Pell'schen Gleichung, dann zu den Tabellen.

Pell'sche Gleichung

a) *In seinem Artikel „Die Pellsche Gleichung und Kettenbruchentwicklungen"*[1] *beschreibt Georg Glöckler, wie man die Lösungen der Pellschen Gleichung* $x^2 - dy^2 = \pm 1$ *berechnet. Sind* $\frac{Z_n}{N_n}$ *die Näherungsbrüche aus dem Kettenbruch* $\sqrt{d} = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$ *so gewinnt man sie durch die Rekursionsformeln*

$$\begin{aligned} Z_n &= a_n \cdot Z_{n-1} + Z_{n-2} \\ N_n &= a_n \cdot N_{n-1} + N_{n-2} \end{aligned} \tag{4}$$

mit den Anfangswerten $\begin{pmatrix} Z_{-2} & Z_{-1} \\ N_{-2} & N_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Der Kettenbruch einer Wurzel aus einer ganzen Zahl ist periodisch:
$\sqrt{d} = [a_0, \overline{a_1, a_2, \ldots a_k}]$. *Die Pellsche Gleichung* $x^2 - dy^2 = -1$ *hat nach einem Satz der Zahlentheorie*[2] *genau dann Lösungen, wenn* k *ungerade ist, und die Lösungen sind die Näherungsbrüche* $\frac{Z_{nk-1}}{N_{nk-1}}$ *des Kettenbruchs von* $\sqrt{d}$ *für* $n = 1, 3, 5, 7, \cdots$. *Wegen* $\sqrt{2} = \left[1, \overline{2}\right]$ *ist* $k = 1$ *und man erhält nach diesem Verfahren aus* (4) *die roten Lösungen aus der folgenden Tabelle.*

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
a_n			1	2	2	2	2	2	2	2	2	$\cdots$
Z_n	0	1	1	3	**7**	17	**41**	99	**239**	577	**1393**	$\cdots$
N_n	1	0	1	2	**5**	12	**29**	70	**169**	408	**985**	$\cdots$

Die von Glöckler angegebene Rekursionsformel $q_n = 6q_{n-1} - q_{n-2}$, *die sich in den Indizes hier nur auf die Reihe der roten Zahlen bezieht, folgt in der Tat aus* (4), *wenn man die schwarzen Zahlen mit einbezieht. Dann lautet sie nämlich* $N_n = 6N_{n-2} - N_{n-4}$, *und wegen* (4) *ist*

$$\begin{aligned} N_n &= 2N_{n-1} + N_{n-2} \\ N_n &= 2\left(2N_{n-2} + N_{n-3}\right) + N_{n-2} \\ N_n &= 6N_{n-2} + 2N_{n-3} - N_{n-2} \\ N_n &= 6N_{n-2} + 2N_{n-3} - \left(2N_{n-3} + N_{n-4}\right) \\ N_n &= 6N_{n-2} - N_{n-4} \end{aligned}$$

[1] *Mathematisch-Physikalische Korrespondenz Heft 210, Michaeli 2002*
[2] *Oskar Perron: Die Lehre von den Kettenbrüchen, Bd 1 S. 93*

b) *Vermutlich hat Georg Glöckler die Lösungen der Pellschen Gleichung* $x^2 - 6y^2 = 1150$ *empirisch gefunden. Wie kann man sie berechnen? Es ist*

$$\begin{aligned} x^2 - 6y^2 &= 1150 \\ \left(x - \sqrt{6}y\right)\left(x + \sqrt{6}y\right) &= 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 23 \end{aligned}$$

Die Zerlegung der Primzahlen 2, 5 und 23 im Integritätsring $\mathbb{Z}\left(\sqrt{6}\right)$ *ergibt*

$$\begin{aligned} 2 &= \left(\sqrt{6} - 2\right)\left(\sqrt{6} + 2\right) \\ 5 &= \left(\sqrt{6} - 1\right)\left(\sqrt{6} + 1\right) \\ 23 &= \left(2\sqrt{6} - 1\right)\left(2\sqrt{6} + 1\right) \end{aligned}$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{6} - 2 & b &= \sqrt{6} - 1 & c &= 2\sqrt{6} - 1 \\ A &= \sqrt{6} + 2 & B &= \sqrt{6} + 1 & C &= 2\sqrt{6} + 1 \end{aligned}$$

und erhalten

$$(a \cdot A)(b \cdot B)(b \cdot B)(c \cdot C) = 1150$$

und weiter

$$\begin{aligned} a \cdot b \cdot b \cdot c &= 158 - 63\sqrt{6} & a \cdot b \cdot b \cdot C &= 106 - 41\sqrt{6} & a \cdot b \cdot B \cdot c &= 70 - 25\sqrt{6} \\ A \cdot B \cdot B \cdot C &= 158 + 63\sqrt{6} & A \cdot B \cdot B \cdot c &= 106 + 41\sqrt{6} & A \cdot B \cdot b \cdot C &= 70 + 25\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cdot b \cdot b \cdot c &= 34 + \sqrt{6} & a \cdot b \cdot B \cdot C &= 50 - 15\sqrt{6} & A \cdot b \cdot b \cdot C &= 38 + 7\sqrt{6} \\ a \cdot B \cdot B \cdot C &= 34 - \sqrt{6} & A \cdot B \cdot b \cdot c &= 50 + 15\sqrt{6} & a \cdot B \cdot B \cdot c &= 38 - 7\sqrt{6} \end{aligned}$$

Hieraus gewinnen wir somit folgende 6 Lösungen:

$$(158, 63) \qquad (106, 41) \qquad (70, 25) \qquad (34, 1) \qquad (50, 15) \qquad (38, 7)$$

Man nennt den Term $\left(5 + 2\sqrt{6}\right)$ *eine Einheit des Integritätsring* $\mathbb{Z}\left(\sqrt{6}\right)$*, da* $\left(5 + 2\sqrt{6}\right)\left(5 - 2\sqrt{6}\right) = 1$ *ist. Dann ist auch* $\left(5 + 2\sqrt{6}\right)^n \left(5 - 2\sqrt{6}\right)^n = 1$*, und man erhält aus einer Lösung* (x_0, y_0) *weitere Lösungen* (x_n, y_n) *und* (x'_n, y'_n) *durch*

$$\begin{aligned} x_n + y_n\sqrt{6} &= \left(5 + 2\sqrt{6}\right)^n \left(x_0 + y_0\sqrt{6}\right) \\ x'_n + y'_n\sqrt{6} &= \left(5 - 2\sqrt{6}\right)^n \left(x_0 + y_0\sqrt{6}\right) \end{aligned}$$

denn es ist

$$\left(x_n + y_n\sqrt{6}\right)\left(x_n - y_n\sqrt{6}\right) = \left[\left(5+2\sqrt{6}\right)^n\left(x_0 + y_0\sqrt{6}\right)\right]\left[\left(5+2\sqrt{6}\right)^n\left(x_0 - y_0\sqrt{6}\right)\right]$$
$$\left(x_n + y_n\sqrt{6}\right)\left(x_n - y_n\sqrt{6}\right) = \left(x_0 + y_0\sqrt{6}\right)\left(x_0 - y_0\sqrt{6}\right)$$
$$x_n^2 - 6y_n^2 = x_0^2 - 6y_0^2 = 1150$$

Wegen

$$x_n + \sqrt{6}y_n = \left(x_{n-1} + \sqrt{6}y_{n-1}\right)\left(5+2\sqrt{6}\right)$$
$$x_n + \sqrt{6}y_n = \left(5x_{n-1} + 12y_{n_1}\right) + \left(2x_{n-1} + 5y_{n-1}\right)\sqrt{6}$$

erhält man die Rekursionsformeln

$$x_n = 5x_{n-1} + 12y_{n-1}$$
$$y_n = 2x_{n-1} + 5y_{n-1}$$

in Matritzenschreibweise

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

und damit u.a. die weiteren von Glöckler angegebenen 5 Lösungen:

$$\begin{pmatrix} 182 \\ 73 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 34 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 274 \\ 111 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 38 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 430 \\ 175 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 50 \\ 15 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 650 \\ 265 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 70 \\ 25 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1022 \\ 417 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 106 \\ 41 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1546 \\ 631 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 158 \\ 63 \end{pmatrix}$$

Tabelle 1

In Tabelle 1 legt Glöckler die Formeln (2) und (3) zugrunde und sortiert die Folgen nach den in den Gleichungen (2) und (3) enthaltenen Termen $\left(n^2 - n + 1\right)$ in der linken Spalte und $\left(n^2 + n + 1\right)$ in der rechten Spalte. Hierfür erhält er folgende Werte:

n	$n^2 - n + 1$	$n^2 + n + 1$
1	1	3
2	3	7
3	7	13
4	13	21
5	21	31
6	31	43

und damit einerseits aus (2) *die Formeln für die Gleichungen der linken Spalte*

$$
\begin{array}{lr}
n & \\
2 & (4+3\nu)^2+(5+3\nu)^2=(\nu+1)^2+(2+\nu)^2+(6+4\nu)^2 \qquad (5)\\
3 & (9+7\nu)^2+(10+7\nu)^2=(\nu+1)^2+(6+4\nu)^2+(12+9\nu)^2 \qquad (6)\\
4 & (16+13\nu)^2+(17+13\nu)^2=(\nu+1)^2+(12+9\nu)^2+(20+16\nu)^2\\
5 & (25+21\nu)^2+(26+21\nu)^2=(\nu+1)^2+(20+16\nu)^2+(30+25\nu)^2\\
6 & (36+31\nu)^2+(37+31\nu)^2=(\nu+1)^2+(30+25\nu)^2+(42+36\nu)^2
\end{array}
$$

und andererseites aus (3) *die Formeln für die Gleichungen der rechten Spalte*

$$
\begin{array}{lr}
n & \\
1 & (1+3\nu)^2+(2+3\nu)^2=(\nu+1)^2+\nu^2+(2+4\nu)^2\\
2 & (4+7\nu)^2+(5+7\nu)^2=(\nu+1)^2+(2+4\nu)^2+(6+9\nu)^2 \qquad (7)\\
3 & (9+13\nu)^2+(10+13\nu)^2=(\nu+1)^2+(6+9\nu)^2+(12+16\nu)^2\\
4 & (16+21\nu)^2+(17+21\nu)^2=(\nu+1)^2+(12+16\nu)^2+(20+25\nu)^2\\
5 & (25+31\nu)^2+(26+31\nu)^2=(\nu+1)^2+(20+25\nu)^2+(30+36\nu)^2\\
6 & (36+43\nu)^2+(37+43\nu)^2=(\nu+1)^2+(30+36\nu)^2+(42+49\nu)^2
\end{array}
$$

Die Formel (1)

$$\left(n^2\right)^2+\left(n^2+1\right)^2=1^2+\left(n^2-n\right)^2+\left(n^2+n\right)^2$$

gewinnt man aus der Gleichungsform

$$a^2+(a+1)^2=x^2+y^2+z^2$$

durch den Ansatz $x=1$, $y=a+n$ *und* $z=a+m$*:*

$$\begin{gathered}a^2+(a+1)^2=1^2+(a+n)^2+(a+m)^2\\ a+a+1=1+a+n+a+m\end{gathered}$$

Hieraus folgt $m=-n$ *und weiter*

$$\begin{gathered}a^2+(a+1)^2=1^2+(a+n)^2+(a-n)^2\\ a=n^2\end{gathered}$$

und damit die Formel (1).
Aus ihr gewinnt er auf einem unbekannten Wege die Darstellung:

$$\begin{gathered}\left(n^2+A\right)^2+\left(n^2+1+A\right)^2=(\nu+1)^2+\left(n^2-n+B\right)^2+\left(n^2+n+C\right)^2 \qquad (8)\\ 2A=\nu+B+C\end{gathered}$$

und findet wahrscheinlich durch probieren

$$\begin{aligned} A_1 &= \nu\left(n^2 - n + 1\right) & & & A_2 &= \nu\left(n^2 + n + 1\right) \\ B_1 &= \nu\left(n-1\right)^2 & & \textit{und} & B_2 &= \nu \cdot n^2 \\ C_1 &= \nu \cdot n^2 & & & C_2 &= \nu\left(n+1\right)^2 \end{aligned}$$

Jede Wahl von n liefert dann zwei Keime für eine Folge F_ν, $\nu = 1, 2, 3 \cdots$ von weiteren Gleichheiten der Quadratsummen, aber auch jede Wahl von ν liefert zwei Keime für eine Folge F_n, $n = 1, 2, 3, \cdots$ von weiteren Gleichheiten von Quadratsummen.

Tabellen 2 und 3

Die Bildungsgesetze der dort notierten Folgen sind jeweils leicht erkennbar. Den Gleichungen der mittleren Spalte von Tabele 2 liegt offenbar die Formel 5 zugrunde. Den Gleichungen der mittleren Spalte oben in Tabelle 3 resultieren aus der Formel (7) *und die unteren Gleichungen aus Formel* (6).
Die linken und rechten Spalten der Tabellen 2 und 3 gewinnt man durch folgende Ansätze:

$$\begin{gathered} (4+a)^2 + (5+b)^2 = 1^2 + (2+c)^2 + (6+d)^2 \\ a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \\ a + b = c + d \end{gathered} \qquad \begin{gathered} (4+a)^2 + (5+b)^2 = (1+c)^2 + 2^2 + (6+d)^2 \\ a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \\ a + b = c + d \end{gathered}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \textit{entweder} \quad & a = c & \textit{oder} \quad & a = d \\ & b = d & & b = c \end{aligned}$$

Somit erhält man im 1. Fall

$$\begin{gathered} 8a + 10b = 4c + 12d \\ 8a + 10b = 4a + 12b \\ 2a = b \end{gathered} \qquad \begin{gathered} 8a + 10b = 2c + 12d \\ 8a + 10b = 2a + 12b \\ 3a = b \end{gathered}$$

und damit die Gleichungsfolgen der linken bzw. rechten Spalte aus Tabelle 2

$$(4+a)^2 + (5+2a)^2 = 1^2 + (2+a)^2 + (6+2a)^2 \qquad (4+a)^2 + (5+3a)^2 = (1+a)^2 + 2^2 + (6+3a)^2$$

wenn a bzw. b die natürlichen Zahlen durchlaufen.
Im 2. Fall wird

$$\begin{gathered} 8a + 10b = 4c + 12d \\ 8a + 10b = 4b + 12a \\ 3b = 2a \end{gathered} \qquad \begin{gathered} 8a + 10b = 2c + 12d \\ 8a + 10b = 2b + 12a \\ 2b = a \end{gathered}$$

Auf der linken Seite setzt man $a = 3n$, auf der rechten Seite $b = n$ und erhält

$$(4+a)^2 + (5+b)^2 = 1^2 + (2+b)^2 + (6+a)^2 \qquad (4+a)^2 + (5+b)^2 = (1+c)^2 + 2^2 + (6+d)^2$$
$$(4+3n)^2 + (5+2n)^2 = 1^2 + (2+2n)^2 + (6+3n)^2 \quad (4+2n)^2 + (5+n)^2 = (1+n)^2 + 2^2 + (6+2n)^2$$

Diese Gleichungsfolgen hat Glöckler in den Tabellen nicht notiert.
Die Folgen der linken und rechten Spalte der Tabelle 3 ehält man durch die gleichen Ansätze mit den beiden anderen Gleichungen:

$$\begin{aligned} (11+a)^2 + (12+b)^2 &= 2^2 + (6+a)^2 + (15+b)^2 \\ 22a + 24b &= 12a + 30b \\ 10a &= 6b \\ 5a &= 3b \end{aligned} \qquad \begin{aligned} (11+a)^2 + (12+b)^2 &= (2+a)^2 + 6^2 + (15+b)^2 \\ 22a + 24b &= 4a + 30b \\ 18a &= 6b \\ 3a &= b \end{aligned}$$

also

$$(11+3n)^2 + (12+5n)^2 = 2^2 + (6+3n)^2 + (15+5n)^2 \quad (11+n)^2 + (12+3n)^2 = (2+n)^2 + 6^2 + (15+3n)^2$$

und damit die linke und rechte Spalte der Tabelle 3 oben.
Ebenso wird

$$\begin{aligned} (9+a)^2 + (10+b)^2 &= 1^2 + (6+a)^2 + (12+b)^2 \\ 18a + 20b &= 12a + 24b \\ 6a &= 4b \\ 3a &= 2b \end{aligned} \qquad \begin{aligned} (9+a)^2 + (10+b)^2 &= (1+a) + 6^2 + (12+b)^2 \\ 18a + 20b &= 2a + 24b \\ 16a &= 4b \\ 4a &= b \end{aligned}$$

und damit

$$(9+2n)^2 + (10+3n)^2 = 1^2 + (6+2n)^2 + (12+3n)^2 \quad (9+n)^2 + (10+4n)^2 = (1+n) + 6^2 + (12+4n)^2$$

also die linke und rechte Spalte in Tabelle 3 unten.