9 Folgen von primitiven pythagoräischen Zahlentripeln

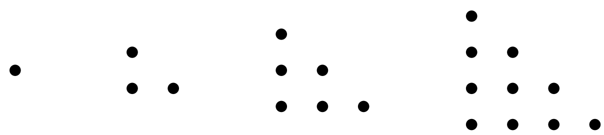
Vorwort

Unter diesem Titel existiert der folgende maschinengeschriebene siebenseitige Artikel in einer nicht korrigierten Fassung vom 08.05.2000. Georg Glöckler hat sich in zahlreichen Papieren mit pythagoräischen Tripeln und Quadrupeln beschäftigt. Dabei hat er solche als einen Keim betrachtet, aus dem nach einem bestimmten Verfahren ganze Folgen von weiteren Tripeln und Quadrupeln hervorgehen können.[1]

In diesem Artikel geht es auch um die Darstellung von natürlichen Zahlen durch Quadratsummen und den Zusammenhang mit Polygonalzahlen und bestimmten Primzahlen.

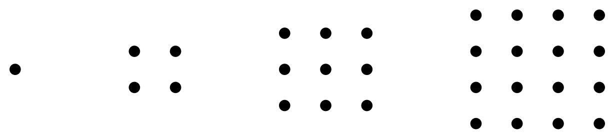
Primzahlen $p > 2$ lassen bei Division durch vier entweder den Rest 1 oder den Rest 3. Sie gehören also entweder zur Restklasse 1 oder 3 nodulo 4. Es ist also entweder $p = 4n + 1$ oder $p = 4n + 3$. Gewisse Eigenschaften einer Primzahl hängen nun davon ab, in welcher der beiden Restklassen sie sich befindet. Dies gilt auch für die vier Restklassen modulo 8, in denen sich die Primzahlen befinden.

Polygonalzahlen hängen mit den verschiedenen Polygonen zusammen. Ein Dreieck kann folgendermaßen regelmäßig wachsen:



usw. Die Anzahl der Punkte ist der Reihe nach 1, 3, 6, 10, ... Diese Zahlen nennt man Dreieckszahlen und bezeichnet sie mit $P_n(3) = d_n$.

Die Viereckszahlen sind offenbar die Quadratzahlen $P_1(4) = 1$, $P_2(4) = 4$, $P_3(4) = 9$, ... , $P_n(4) = n^2$:



usw. Die Polygonalzahlen $P_n(m)$ eines Polygons mit der Seitenzahl m bilden eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung, stellen daher die Summe $S_n = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n)$ einer arithmetischen Reihe 1. Ordnung mit der konstanten Differenz $d = a_{n+1} - a_n$ dar. Wegen $a_n = a_1 + (n-1)d$, $a_1 = 1$ und $d = m - 2$ ist daher

$$P_n(m) = \frac{1}{2}n\left[2 + (n-1)(m-2)\right]$$

Peter Baum

[1] Eine umfassende Zusammenschau solcher Papiere hat Albrecht Häberlein in seinem Artikel „Rekursive Erzeugung der pythagoräischen Quadrupel nach Georg Glöckler“ unternommen.

9 FOLGEN VON PRIMITIVEN[1] PYTHAGORÄISCHEN ZAHLENTRIPELN

a) Die folgenden Rekursionsformeln lassen aus jedem gegebenen pythagoräischen Zahlentripel jeweils 3 neue solcher Tripel hervorgehen. Es sei x_n, y_n, z_n ein solches pythagoräisches Zahlentripel. Es gilt also $x_n^2 + y_n^2 = z_n^2$ mit x_n, y_n und z_n als natürliche Zahlen.

Beispiel: $x_n, y_n, z_n \equiv 3, 4, 5$

$$x_n^2 + y_n^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2 = z_n^2$$

I

$$x_{n+1} = x_n - 2y_n + 2z_n$$
$$y_{n+1} = 2x_n - y_n + 2z_n$$
$$z_{n+1} = 2x_n - 2y_n + 3z_n$$

II

$$x_{n+1} = -2x_n + y_n + 2z_n$$
$$y_{n+1} = -x_n + 2y_n + 2z_n$$
$$z_{n+1} = -2x_n + 2y_n + 3z_n$$

$$x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = z_{n+1}^2$$

III

$$x_{n+1} = 2x_n + y_n + 2z_n$$
$$y_{n+1} = x_n + 2y_n + 2z_n$$
$$z_{n+1} = 2x_n + 2y_n + 3z_n$$

Beispiel: Wir wählen die Formeln III mit $x_n, y_n, z_n \equiv 3, 4, 5$

$$x_{n+1} = 2 \cdot 3 + 4 + 2 \cdot 5 = 20$$
$$y_{n+1} = 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 21$$
$$z_{n+1} = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 29$$
$$20^2 + 21^2 = 29^2$$

$$x_{n+2} = 2 \cdot 20 + 21 + 2 \cdot 29 = 119$$
$$y_{n+2} = 20 + 2 \cdot 21 + 2 \cdot 29 = 120$$
$$z_{n+2} = 2 \cdot 20 + 2 \cdot 21 + 3 \cdot 29 = 169$$

etc.

Bemerkung: Bei dieser speziellen Folge ist immer $y_n - x_n = 1$, was aus III folgt.

Aus dem zuletzt Dargestellten sieht man schon eine der vielen Möglichkeiten aus einem pythagoräischen Zahlentripel eine ganze Folge von solchen Tripeln hervorgehen zu lassen.

b) Eine ganz andere Möglichkeit solche Tripelfolgen zu bilden besteht im Folgenden:

Massgebend für die Beurteilung der Frage unter welchen Voraussetzungen eine natürliche Zahl sich als Summe zweier Quadratzahlen darstellen lässt ist der folgende Satz:

Eine natürliche Zahl ist dann und nur dann durch eine Summe von zwei Quadratzahlen darstellbar, wenn in ihrer kanonischen Darstellung alle Potenzen der Primzahlen der Form $3 + 4m$ nur in gerader Ordnung vorkommen und wenn mindestens eine Primzahl der Form $1 + 4m$ in der kanonischen Darstellung als Faktor enthalten ist.

[1] primitiv werden solche Tripel genannt, deren natürlichen Zahlen untereinander teilerfremd sind.

Beispiele:
$$
\begin{aligned}
n_1 &= 3^2 \cdot 5 = 3^2 + 6^2\\
n_2 &= 7^2 \cdot 13 = 14^2 + 21^2\\
n_3 &= 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 3^2 + 9^2\\
n_4 &= 2 \cdot 5 \cdot 13 = 3^2 + 11^2 = 7^2 + 9^2
\end{aligned}
$$

Die Frage nach der Anzahl der möglichen Darstellungen einer natürlichen Zahl durch eine Quadratsumme bedarf einer besonderen Untersuchung.
Wir wenden uns nun denjenigen natürlichen Zahlen zu, welche die Form $1 + 4m$ haben. Sind das Primzahlen oder Produkte von Primzahlen der angegebenen Form, so lassen sie sich sicher als Summe zweier Quadratzahlen darstellen.

Beispiele:
$$
\begin{aligned}
1 + 7 \cdot 4 &= 29 = 2^5 + 5^2\\
1 + 4 \cdot 16 &= 65 = 5 \cdot 13 = (1 + 4 \cdot 1)(1 + 4 \cdot 3)\\
&= 1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2
\end{aligned}
$$

| 4·7 etc.

$$
\begin{aligned}
1 + 25 \cdot 4 &= 101 = 1^2 + 10^2\\
1 + 616 \cdot 4 &= 2465 = 5 \cdot 17 \cdot 29 = (1 + 4 \cdot 1)(1 + 4 \cdot 4)(1 + 7 \cdot 4)\\
&= 16^2 + 47^2 = 8^2 + 49^2\\
&= 28^2 + 41^2 = 23^2 + 44^2
\end{aligned}
$$

...

c) Es ist nun bemerkenswert, dass man natürliche Zahlen der zuletzt beschriebenen Form auf 3-fach verschiedene Art ermitteln kann, und zwar für:

$m = P_n(3)$ Dreieckszahlen
$m = P_n(4)$ Quadratzahlen
$m = P_n(7)$ Siebeneckzahlen

Für die Berechnung dieser Zahlen gelten die folgenden Formeln:

$$
\begin{aligned}
P_n(3) &= 1 + 2 + 3 + \ldots + n &&= \frac{n}{2}(n+1)\\
P_n(4) &= 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) &&= n^2\\
P_n(7) &= 1 + 6 + 11 &&= \frac{n}{2}(5n - 3)
\end{aligned}
$$

(Polygonalzahlen im allgemeinen sind Teilsummen von arithmetischen Reihen 2. Ordnung)

Im Folgenden ermitteln wir drei Folgen, deren Glieder sich jeweils als Summe zweier Quadratzahlen darstellen lassen:

1.) $p_n = 1 + 4 \cdot P_n(3) = 1 + 2n + 2n^2 = n^2 + (n+1)^2$

2.) $q_n = 1 + 4 \cdot P_n(4) = 1 + 4n^2 = 1^2 + (2n)^2$

3.) $r_n = 1 + 4 \cdot P_n(7) = 1 - 6n + 10n^2 = n^2 + (3n-1)^2$

Eine kleine Tabelle soll eine erste Einsicht ermitteln:

n	p_n	q_n	r_n
1	$5 = 1^2 + 2^2$	$5 = 1^2 + 2^2$	$5 = 1^2 + 2^2$
2	$13 = 2^2 + 3^2$	$17 = 1^2 + 4^2$	$29 = 2^2 + 5^2$
3	$25 = 5^2 = 3^2 + 4^2$	$37 = 1^2 + 6^2$	$73 = 3^2 + 8^2$
4	$41 = 4^2 + 5^2$	$65 = 1^2 + 8^2$ $= 4^2 + 7^2$	$137 = 4^2 + 11^2$
5	$61 = 5^2 + 6^2$	$101 = 1^2 + 10^2$	$221 = 13 \cdot 17 = 5^2 + 14^2$
6	$85 = 5 \cdot 17 = 6^2 + 7^2$	$145 = 5 \cdot 29 = 1^2 + 12^2$ $= 4^2 + 11^2$	$325 = 5^2 \cdot 13 = 6^2 + 17^2$ $= 1^2 + 18^2$ $= 10^2 + 15^2$
7	$113 = 7^2 + 8^2$	$197 = 1^2 + 14^2$	$449 = 7^2 + 20^2$
8	$145 = 5 \cdot 29 = 8^2 + 9^2$ $= 1^2 + 12^2$	$257 = 1^2 + 16^2$	$593 = 8^2 + 23^2$
9	$181 = 9^2 + 10^2$	$325 = 5^2 \cdot 13 = 1^2 + 18^2$ $= 6^2 + 17^2$ $= 10^2 + 15^2$	$757 = 9^2 + 26^2$
10	$221 = 13 \cdot 17 = 10^2 + 11^2$ $= 5^2 + 14^2$	$401 = 1^2 + 20^2$	$941 = 10^2 + 29^2$
11	$265 = 5 \cdot 53_{(1)} = 11^2 + 12^2$ $= 3^2 + 16^2$	$485 = 5 \cdot 97_{(1)} = 1^2 + 22^2$ $= 14^2 + 17^2$	$1145 = 5 \cdot 229 = 11^2 + 32^2$ $= 19^2 + 22^2$
...			
15	$481 = 13 \cdot 37 = 15^2 + 16^2$ $= 9^2 + 20^2$	$901 = 17 \cdot 53 = 1^2 + 30^2$ $= 15^2 + 26^2$	$2161 = 15^2 + 44^2$
16	$545 = 5 \cdot 109_{(1)} = 16^2 + 17^2$	$1025 = 5^2 \cdot 41 = 1^2 + 32^2$ $= 8^2 + 31^2$ $= 20^2 + 25^2$	$2465 = 5 \cdot 17 \cdot 29 = 16^2 + 17^2$ $= 8^2 + 49^2$ $= 28^2 + 41^2$ $= 23^2 + 44^2$
17	$= 17^2 + 18^2$	$1157 = 13 \cdot 89_{(1)} = 1^2 + 34^2$ $= 14^2 + 31^2$	$2789 = 17^2 + 50^2$
...			

Die Primzahlen der Form $p_v = 1 + 4m$ sind der Reihe nach: $p_1 = 5$, $p_2 = 13$, $p_3 = 17$, $p_4 = 29$, $p_5 = 37$, $p_6 = 41$, $p_7 = 53$, $p_8 = 61$, $p_9 = 73$, $p_{10} = 89$, $p_{11} = 97$, $p_{12} = 101$, $p_{13} = 109$, $p_{14} = 113$, $p_{15} = 137$... Sie treten in der Tabelle meist unmittelbar auf. Ausnahmen betreffen die Primzahlen 53, 89, 97, 109... Diese treten dann aber mittelbar als Primfaktoren in der jeweiligen kanonischen Zerlegung in Erscheinung. In der Tabelle ist ihr erstes Auftreten durch den Index (1) gekennzeichnet (z.B. $53_{(1)}$ für $n = 11$).

d) Berechnung der zu p_n, q_n, r_n gehörigen pythagoräischen Tripel:
Unter Zuhilfenahme der Formeln

$$c = a^2 + b^2$$

und $$c^2 = \left(a^2 - b^2\right)^2 + \left(2ab\right)^2$$

gilt dann

$$p_n^2 = [2n+1]^2 + [2n^2 + 2n]^2$$
$$q_n^2 = [4n^2 - 1]^2 + [4n]^2$$
$$r_n^2 = [8n^2 - 6n + 1]^2 + [6n^2 - 2n]^2$$

Damit erhalten wir zunächst 3 verschiedene Tripelfolgen in expliziter Form, für die jeweils $x_{vn}^2 + y_{vn}^2 = z_{vn}^2$ $(v = 1, 2, 3)$

Formeln (a)

$$x_{1n} = 2n + 1$$
$$y_{1n} = 2n^2 + 2n$$
$$p_n = z_{1n} = n^2 + (n+1)^2 = 2n^2 + 2n + 1$$

Formeln (b)

$$x_{2n} = 4n^2 - 1$$
$$y_{2n} = 4n$$
$$q_n = z_{2n} = 4n^2 + 1$$

Formeln (c)

$$x_{3n} = 8n^2 - 6n + 1$$
$$y_{3n} = 6n^2 - 2n$$
$$r_n = z_{3n} = n^2 + (3n-1)^2 = 10n^2 - 6n + 1$$

Beispiele zu den Formeln (a)

n	x_{1n}	y_{1n}	z_{1n}
1	3	4	5
2	5	12	13
3	7	24	25
4	9	40	41
5	11	60	61

Immer ist dabei $x_{1n}^2 + y_{1n}^2 = z_{1n}^2$
mit $z_{1n} - y_{1n} = 1$ oder auch $y_{1n} + z_{1n} = x_{1n}^2$

e) Nun unterwerfen wir die x_{vn}, y_{vn}, z_{vn} als pythagoräischen Zahlentripel den Rekursionsformeln I, II und III. Dadurch erhalten wir insgesamt 9 explizit dargestellte Tripelfolgen.

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= 2n + 1 - 2\cdot\left(2n^2 + 2n\right) + 2\cdot\left(1 + 2n + 2n^2\right) = 2n + 3 \\ y_{n+1} &= 2\cdot\left(2n + 1\right) - 2\left(2n^2 + 2n\right) + 2\left(1 + 2n + 2n^2\right) = 2n^2 + 6n + 4 \\ z_{n+1} &= 2\cdot\left(2n + 1\right) - 2\left(2n^2 + 2n\right) + 3\left(1 + 2n + 2n^2\right) = 2n^2 + 6n + 5 \end{aligned}\right\} \mathrm{I_a}$$

Wir erhalten so die Tripelfolge $\mathrm{I_a}$. Dabei bedeutet z.B. $\mathrm{I_a}$: Das Tripel x_{1n}, y_{1n}, z_{1n} der Gleichungen (a) ~~werden~~ wird in die Gleichungen I eingesetzt:[2]

	$n =$	0	1	2	3	4		
$x_{n+1} = 2n + 3$		3	5	7	9	11	...	
$y_{n+1} = 2n^2 + 6n + 4$		4	12	24	40	60	...	$\mathrm{I_a}$
$z_{n+1} = 2n^2 + 6n + 5$		5	13	25	41	61	...	

[2] Streng genommen müssten wir hier 9 verschiedene Indizes für die Tripel x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1} einführen.

Entsprechend erhält man nun die übrigen 8 Tripelfolgen:

	$n =$	0	1	2	3	4 ...	
$x_{n+1} =$	$6n^2 + 2n$	0	8	28	60	104 ...	
$y_{n+1} =$	$8n^2 + 6n + 1$	1	15	45	91	153 ...	II_a
$z_{n+1} =$	$10n^2 + 6n + 1$	1	17	53	109	185 ... $= 5 \cdot 37$	

	$n =$	0	1	2	3	4 ...	
$x_{n+1} =$	$6n^2 + 10n + 4$	4	20	48	88	140 ...	
$y_{n+1} =$	$8n^2 + 10n + 3$	3	21	55	105	171 ...	III_a
$z_{n+1} =$	$10n^2 + 14n + 5$	5	29	73	137	221 ... $= 13 \cdot 17$	

	$n =$	0	1	2	3	4 ...	
$x_{n+1} =$	$12n^2 - 8n + 1$	1	5	33	85	161 ...	
$y_{n+1} =$	$16n^2 - 4n$	0	12	56	132	240 ...	I_b
$z_{n+1} =$	$20n^2 - 8n + 1$	1	13	65	157	289 ... $= 17^2$	

	$n =$	0	1	2	3	4 ...	
$x_{n+1} =$	$4n+4$	4	8	12	16	20 ...	
$y_{n+1} =$	$4n^2 + 8n + 3$	3	15	35	63	99 ...	II_b
$z_{n+1} =$	$4n^2 + 8n + 5$	5	17	37	65	101 ...	

	$n =$	0	1	2	3	4 ...	
$x_{n+1} =$	$16n^2 + 4n$	0	20	72	156	272 ...	
$y_{n+1} =$	$12n^2 + 8n + 1$	1	21	65	133	225 ...	III_b
$z_{n+1} =$	$20n^2 + 8n + 1$	1	29	97	205	353 ...	

	$n =$	0	1	2	3	4 ...	
$x_{n+1} =$	$16n^2 - 14n + 3$	3	5	39	105	203 ...	
$y_{n+1} =$	$30n^2 - 22n + 4$	4	12	80	208	396 ...	I_c
$z_{n+1} =$	$34n^2 - 26n + 5$	5	13	89	233	$445 = 5 \cdot 89$ ...	

	$n =$	0	1	2	3	4 ...	
$x_{n+1} =$	$10n^2 - 2n$	0	8	36	84	152 ...	
$y_{n+1} =$	$24n^2 - 10n + 1$	1	15	77	187	345 ...	II_c
$z_{n+1} =$	$26n^2 - 10n + 1$	1	17	85	205	377 ... $= 13 \cdot 29$	

	$n =$	0	1	2	3	4 ...	
$x_{n+1} =$	$42n^2 - 26n + 4$	4	20	120	304	572 ...	
$y_{n+1} =$	$40n^2 - 22n + 3$	3	21	119	297	555 ...	III_c
$z_{n+1} =$	$58n^2 - 34n + 5$	5	29	169	425	797 ...	

1. Bemerkung: Es gilt jeweils $x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = z_{n+1}^2$

2. Bemerkung: Die Tripel *0 1 1* und *1 0 1* können als "Einheitskeim" aufgefasst werden, aus denen alle übrigen Tripel hervorgehen:

$$0^2 + 1^2 = 1^2 \qquad 1^2 + 0^2 = 1^2$$

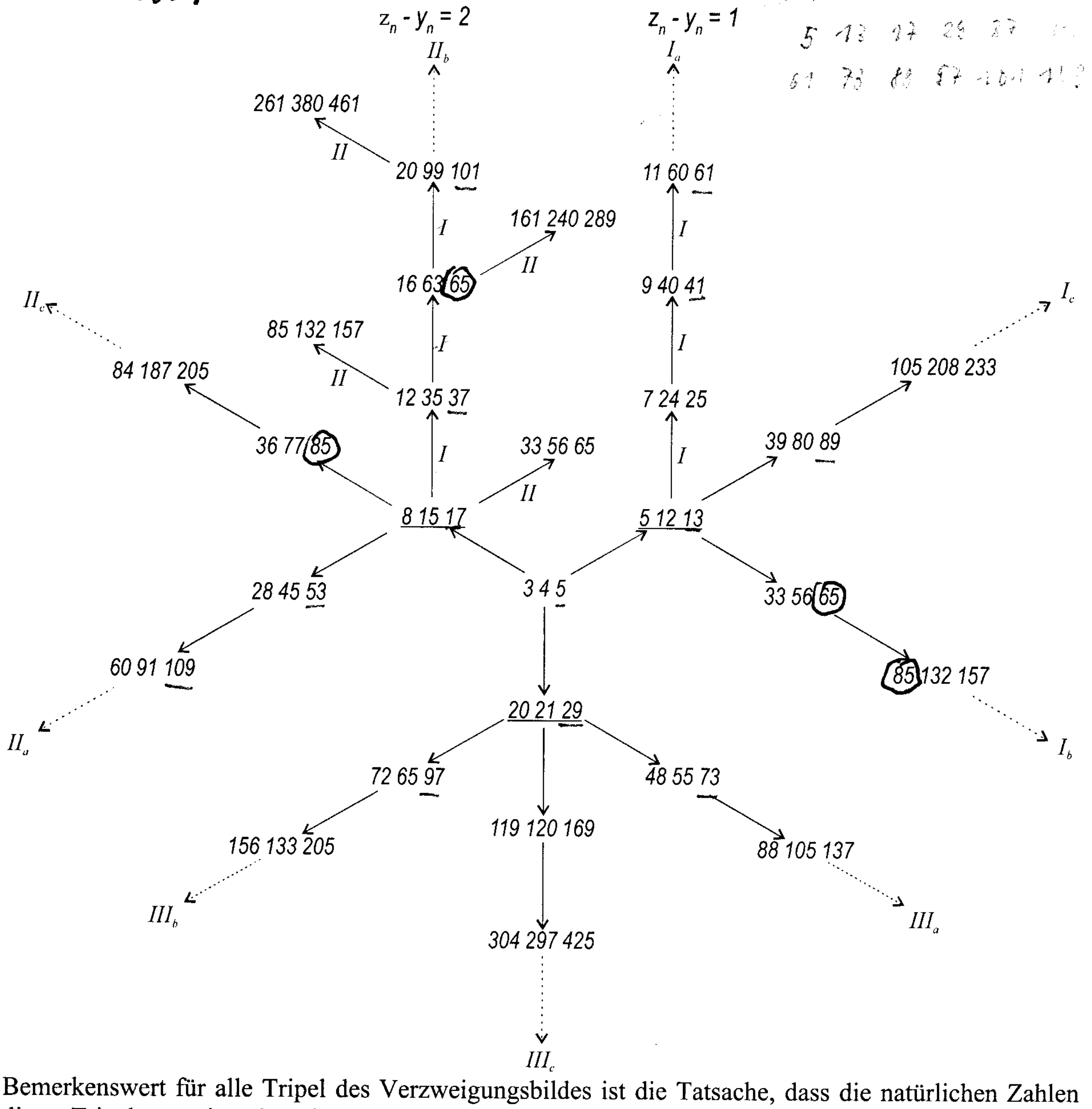
3. Bemerkung: Für $n=1$ ergeben sich die drei Tripel *5, 12, 13;* *8, 15,17;* *20, 21, 29* auf jeweils 3 verschiedene Arten.

f) Das folgende Verzweigungsbild der 9 Tripelfolgen zeigt sehr schön die Charakteristik der Aufspaltung. Im Zentrum steht das Tripel *3 4 5* als "Keim". Man erkennt auch, dass alle Primzahlen der Form $p = 1 + 4m$ in dem Verzweigungsbild enthalten sein müssen: Im Verzweigungsbild ...

Darüber hinaus ...

5 13 17 29 37 ...

61 73 89 97 101 109 ...



Bemerkenswert für alle Tripel des Verzweigungsbildes ist die Tatsache, dass die natürlichen Zahlen dieser Tripel untereinander teilerfremd sind. Man nennt solche Tripel primitiv.

g) Der unter e) begonnene Prozess des Einsetzens der Tripel x_n, y_n, z_n in die Rekursionsformeln I, II und III kann natürlich fortgesetzt werden. Setzen wir z.B. die Werte $x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}$ der Tripelfolge I_a in die Gleichungen I ein, so erhalten wir wieder eine neue Tripelfolge. Wir wollen diese mit I I_a bezeichnen. Insgesamt würden wir so in einem nächsten Schritt $9 \cdot 3=27$ neue Tripelfolgen erhalten, usw. Zum Abschluss wollen wir nur 3 verschiedene der letztgenannten kurz charakterisieren:

I I_a, III II_a und III III_a.

Zugehörige Tabelle für den Kernbereich

I I_a:

$$x_{n+1} = 2n + 5$$
$$y_{n+1} = 2n^2 + 10n + 12$$
$$z_{n+1} = 2n^2 + 10n + 13$$

Die Tripelfolge ist zu sich selbst symmetrisch.

n	x_{n+1}	y_{n+1}	z_{n+1}
...			
1	7	24	25
0	5	12	13
-1	3	4	5
-2	1	0	1
-3	-1	0	1
-4	-3	4	5
-5	-5	12	13
-6	-7	24	25
...			

III II_a:

$$x_{n+1} = 40n^2 + 22n + 3$$
$$y_{n+1} = 42n^2 + 26n + 4$$
$$z_{n+1} = 58n^2 + 34n + 5$$

n	x_{n+1}	y_{n+1}	z_{n+1}
...			
2	207	224	305
1	65	72	97
0	3	4	5
-1	21	20	29
-2	119	120	169

III III_a:

$$x_{n+1} = 40n^2 + 58n + 21$$
$$y_{n+1} = 42n^2 + 58n + 20$$
$$z_{n+1} = 58n^2 + 82n + 29$$

n	x_{n+1}	y_{n+1}	z_{n+1}
...			
2	297	304	425
1	119	120	169
0	21	20	29
-1	3	4	5
-2	65	72	97
-3	207	224	305
...			

Die beiden letzten Tripelfolgen sind zueinander symmetrisch.

Alle solchen Tripelfolgen gehen nach rückwärts verfolgt durch einen “Keim” hindurch: Entweder in der Form $1^2 + 0^2 = 1^2$ oder $3^2 + 4^2 = 5^2$. Mit diesem Ausblick wollen wir unsere Betrachtungen beenden.