Aufgaben und Anwendungsgebiete der Kettenbrüche

I. Die große Konjunktion von Jupiter und Saturn

Die Konjunktion von Jupiter und Saturn gilt seit je her als eines der eindrucksvollsten Ereignisse am Sternenhimmel und wird deshalb "große Konjunktion" genannt. Aus den Umlaufszeiten läßt sich der Rhythmus dieser Konstellation leicht bestimmen.

Jupiter:	**11,8622** Jahre siderischer Umlauf
Saturn:	**29,4577** Jahre siderischer Umlauf

Daraus läßt sich der Zeitpunkt ausmachen, an dem Jupiter Saturn wieder eingeholt hat:

$$11{,}8622 : 29{,}4577 + x : 29{,}4577 = x : 11{,}8622$$

$$11{,}8622^2 : (29{,}4577 - 11{,}8622) = x = \underline{7{,}9970}$$

7,9970 Jahre nach dem ersten Umlauf Jupiters treffen die Planeten wieder zusammen.

$11{,}8622 + 7{,}9970 = \underline{\mathbf{19{,}8592}}$ Jahre ist der Rhythmus der Konjunktion

1. Der Konjunktion im gleichen Sternbild gilt ein besonderes Interesse. Saturn und Jupiter sind zum Beispiel dann wiederum im Sternbild des Stieres, wenn ihre Rhythmen der siderischen Umlaufszeiten zusammenklingen, sich sehr nach kommen:

Kettenbruchentwicklung:

$$\frac{11{,}8622}{29{,}4577} = [2, 2, 14, 2, 33, \ldots]$$

Näherungsbrüche: $\frac{1}{2} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{29}{72} \quad \frac{60}{149}$

$5 \cdot 11{,}8622$ Jahre $= 59{,}31$ Jahre
$2 \cdot 29{,}4577$ Jahre $= 58{,}92$ Jahre

Man sieht, daß Saturn ca. 5 Monate früher an seinem ursprünglichen Ort ist, sodaß Jupiter noch etwas braucht, um Saturm einzuholen. Dies kann wie oben berechnet werden. Konjunktion erfolgt nach **59,85** Jahren. Jeweils die dritte Konjunktion ist somit wieder im gleichen Sternbild. Die Konjunktionen markieren am Himmel ein großes Dreieck, ein Trigon innerhalb dieser fast 60 Jahre. Da die Konjunktion aber erst ein halbes Jahr nach dem vollen Umlauf der beiden Planeten eintritt, verschiebt sich die Trigonspitze etwa um die halbe Breite eines Sternzeichens.

2. Wann hat sich diese Verschiebung so aufsummiert, daß eine große Konjunktion an der gleichen Himmelsstelle auftritt? Nehmen wir die nächst genauere Approximation:

72 · 11,8622 Jahre = 854,27 Jahre
29 · 29,4577 Jahre = 854,07 Jahre

3. Der Frühlingspunkt wandert gegen die Bahnrichtung der Planeten pro Jahr ca. 50"). Wenn eine große Konjunktion im Frühlingspunkt eintritt, wann folgt dies Ereignis erneut? Dazu muß jetzt nicht von den siderischen Umläufen der Kettenbruch entwickelt werden, sondern von dem Verhältnis der "tropischen" Umläufe, die durch die Gegenbewegung des Frühlingspunktes etwas kürzer sind:

Jupiter:	**11,8567** Jahre tropischer Umlauf
Saturn	**29,4242** Jahre tropischer Umlauf

Kettenbruchentwicklung:

$$\frac{11{,}8567}{29{,}4242} = [2, 2, 13, 7, 1, \ldots]$$

Näherungsbrüche: $\frac{1}{2} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{27}{67} \quad \frac{191}{474}$

67 · 11,8567 Jahre = 794,39 Jahre
27 · 29,4242 Jahre = 794,45 Jahre

60 Jahre später ist die Konjunktion wieder vor dem gleichen Sternenhimmel, das heißt, daß sich der Frühlingspunkt in den 800 Jahren um den gleichen Betrag verschoben hat, wie die Jupiter-Saturn Konjunktion nach den 60 Jahren. Dies ist bemerkenswert.

II. Merkur- und Venusdurchgänge

Die Bahnen der beiden inneren oder untersonnigen Planeten Merkur und Venus sind gegenüber der Ekliptik etwas geneigt. Daraus folgt, daß wenn z. B. Venus zwischen Erde und Sonne tritt, sie nicht zwangsläufig als schwarzer Punkt vor der Sonnenscheibe erscheinen muß. In der Regel wandert sie etwas ober- oder unterhalb der Sonne vorbei. Nur dann, wenn die untere Konjunktion in die Nähe eines der Knoten der Venusbahn fällt, sie also in ihrer Jahresbahn die Ekliptik schneidet, tritt der sogenannte "Venusdurchgang" ein. Gleiches gilt für Merkur. Der Zusammenklang der siderischen Umläufe von Erde und Venusbzw Merkur liefert den Rhythmus der Durchgänge dieser Planeten.

Merkur:	87,97 Tage siderischer Umlauf
Venus:	224,70 Tage siderischer Umlauf
Erde:	365,26 Tage siderischer Umlauf

1. Venus

$$\frac{224{,}70}{365{,}26} = [1, 1, 1, 1, 2, 28, \ldots]$$

Näherungsbrüche: $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{8}{13}$ $\frac{227}{369}$

8/13 ist schon eine brauchbare Näherung, sodaß nach 8 Erdjahren schon ein zweiter Venusdurchgang kommen kann. Für einen weiteren reicht die Näherung aber nicht aus. Wir müssen jetzt 227 Jahre = 369 Venusumläufe warten. Dieser Rhythmus bezieht sich aber nur auf einen Knoten. Durchgänge können auch beim gegenüberliegenden Knoten eintreten. Dieser hat natürlich den gleichen Rhythmus, sodaß je zwei Venusdurchgänge mit Abstand von 8 Jahren alle 113 Jahre stattfinden. Da diese Näherung nicht exakt ist, können mitunter die Durch-gänge 8 Jahre früher oder später stattfinden.

Venusdurchgänge:	9. 6. 1761	absteigender Knoten
	2. 6. 1769	
	9.12. 1874	aufsteigender Knoten
	6.12. 1882	
	7. 6. 2004	absteigender Knoten
	5. 6. 2012	
	10.12. 2117	aufsteigender Knoten
	8.12. 2125	

Da der Knoten der Venusbahn sich nur wenig verschiebt, kann dieses kosmische Schauspiel nur im Juli und Dezember stattfinden.

2. Merkur

$$\frac{87{,}97}{365{,}26} = [4, 6, 1, 1, 2, 1, \ldots]$$

Näherungsbrüche: $\frac{1}{4}$ $\frac{6}{25}$ $\frac{7}{29}$ $\frac{15}{54}$ $\frac{33}{137}$ $\frac{46}{191}$

Es gibt hier nicht einen ausgezeichneten Näherungsbruch, sodaß mehrere Zwischenzeiten für Durchgänge des Merkurs vorkommen, nämlich 6, 7, 13, 33 und 46 Jahre. Auch hier kommen die halben Perioden wegen des anderen Knotens in Frage. Nach 46 Jahren kehren die Durchgänge in gleicher Reihenfolge wieder:

Nov.1848 - 13J - Nov.1861 - 7J - Nov.1868 - 9,5 (13-3,5) - Mai 1878 - 3,5J - Nov.1881 - 9,5J - Mai.1891 - 3,5J - Nov.1894
Nov.1894 - 13J - Nov.1907 - 7J - Nov.1914 - 9,5 (13-3,5) - Mai 1924 - 3,5J - Nov.1927 - 9,5J - Mai.1937 - 3,5J - Nov.1940

Nächster Durchgang ist 15. November 1999

III. Saroszyklus

Eine Sonnenfinsternis tritt dann ein, wenn sich der Mond zwischen Erde und Sonne stellt. Da seine Bahn aber um 6° gegenüber der Erdbahn geneigt ist, muß

er außerdem noch mit der Erde in einer Ebene liegen, um seinen schatten auf sie werden zu können. Dies tritt dann ein, wenn er die Ekliptik schneidet, wenn er sich also in der Nähe seines Knoten befinden.
Es muß also der Zusammenklang zwischen synodischem Mondumlauf (Periode von einem Neumond zum nächsten) und dem drakonischen Monat (Dauer des Mondlaufes zwischen zwei Durchgängen durch den gleichen Knoten) gefunden werden, will man die Zeitspanne zwischen zwei Sonnenfinsternissen am gleichen Ort gewinnen.

Synodischer Monat: 29,5306 Tage
Drakonischer Monat: 27,2122 Tage

$$\frac{29{,}5306}{27{,}2122} = [1, 11, 1, 2, 1, 4, 4, \ldots]$$

Näherungsbrüche: $\frac{1}{1}$ $\frac{12}{11}$ $\frac{13}{12}$ $\frac{38}{35}$ $\frac{51}{47}$ $\frac{242}{223}$

$242 \cdot 27{,}2122 = 6585{,}3524$
$242 \cdot 29{,}5306 = 6585{,}323$

6585,3 Tagen $\approx$ 18 Jahre und 11 Tage ist die Dauer des Saroszyklus.

IV. Mechanik

Motoren für Kolben-Propellerflugzeuge sind aus Gewichtsgründen in der Regel ohne Getriebe ausgestattet. Da ein Propeller bei etwa 1900 Umdrehungen pro Minute den besten Wirkungsgrad hat, dreht der Motor auch so langsam, obwohl er bei höheren Drehzahlen weniger Kraftstoff verbraucht. Mittlerweile gibt es aber leichte Übersetzungsgetriebe. Wenn nun ein Motor, wie bei Autos, seinen maximalen Wirkungsgrad z.B. bei 5850 U/min hat, wie könnte ein geeignetes Übersetzungsverhältnis aussehen? Dabei ist es wichtig, daß die Zahnräder nicht in der Zahnanzahl einen gemeinsamen Teiler haben, da sonst immer die gleichen Zähne ineinandergreifen und schnell verschleißen.

Kettenbruchentwicklung:

$$\frac{5850}{1900} = [3; 12, 1, 2]$$

Näherungsbrüche: $\frac{3}{1}$ $\frac{37}{12}$ $\frac{40}{13}$ $\frac{117}{38}$

V. Historische Anwendung

Christian Hujgens, niederländischer Astronom (1629 - 1695) wollte ein Modell des Sonnensystems bauen. Dazu mußte er die Verhältnisse der Umlaufzeiten der Planeten um die Sonne auf Zahnräder übertragen. Die astronomischen Messungen waren damals schon erstaunlich genau. So wußte man, daß in 365 Tagen die Erde einen Winkel der Größe 359° 45' 40'' 31''' von der Sonne aus gesehen umläuft. Der Saturn legt im gleichen Zeitraum einen Winkel von 12° 13' 34'' 18''' zurück. Das Verhältnis der Umlaufzeiten ist demnach:

$$\frac{359 + \frac{45}{60} + \frac{40}{60^2} + \frac{31}{60^3}}{12 + \frac{13}{60} + \frac{34}{60^2} + \frac{18}{60^3}}$$

Durch erweitern des Bruches mit 60^3 (=216.000) wir daraus:

$$\frac{77\ 708\ 431}{2\ 640\ 858}$$

Zahnräder mit 77.708.431 bzw 2.640.858 Zähnen herzustellen zu wollen, ist illusorisch. Hujgens mußte nun, da dieser monströse Bruch sich nicht kürzen läßt, ihn durch einen anderen Bruch mit hinreichend kleinem Zähler und Nenner möglichst gut approximieren. Eine einfache langweilige Lösung des Problems kennen wir: durch Runden entsteht

$$\frac{77\ 708\ 431}{2\ 640\ 858} \approx \frac{777}{26}$$

Hujgens wählte die Kettenbruchapproximation:

$$\frac{77\ 708\ 431}{2\ 640\ 858} = [\ 29;\ 2,\ 2,\ 1,\ 5,\ 1,\ 4,\ 1,\ \ldots]$$

Der 4. Näherungsbruch ergibt: $\frac{206}{7}$

Das Getriebe des Planetenmodells erhält damnach für das Zahnrad der Erde 7, für das des Saturn 206 Zähne. Wie genau nähert dieses Verhältnis nun das astronomische an? Um dies einzuschätzen, rechnen wir aus, nach wieviel Umdrehungen (x) der Erde um die Sonne das Erdzahnrad zur Korrektur um einen Zahn versetzt werden muß. 206/7 ist als vierte Näherung größer als das wahre Verhältnis. Deshalb muß der Nenner dieses Verhältnisses, das Zahnrad der Erde, um 1 vergrößert werden:

$$\frac{x \cdot 206}{x \cdot 7+1} = \frac{77\ 708\ 431}{2\ 640\ 858}$$

$$206x \cdot 2640858 = 77708431 \cdot 7 \cdot x + 77708431$$

$$x = \underline{\underline{1346{,}04\ldots}}$$

Die oben genannte Korrektur wird gemäß unser Rechnung nach 1346 Erdumläufen fällig. Das ist ungefähr die Größenordnung der Kalenderkorrekturen in den letzten Jahrtausenden. Gegen dies Approximation durch die Kettenbruchentwicklung ist das schlichte Rundungsergebnis äußerst schlecht.

6. Eine historische Anwendung (17)

Christiaan Hujgens, niederländischer Astronom (1629 - 1695), wollte ein Modell des Sonnensystems bauen. Dazu mußte er die Verhältnisse der Umlaufzeiten der Planeten um die Sonne auf Zahnräder übertragen. Die astronomischen Messungen waren damals schon erstaunlich genau. So wußte man, daß in 365 Tagen die Erde einen Winkel der Größe 359° 45' 40" 31"' von der Sonne aus gesehen umläuft. Der Saturn legt im gleichen Zeitraum einen Winkel von 12° 13' 34" 18"' zurück. Das Verhältnis ihrer Umlaufzeiten ist demnach

$$\frac{359 + \frac{45}{60} + \frac{40}{60^2} + \frac{31}{60^3}}{12 + \frac{13}{60} + \frac{34}{60^2} + \frac{18}{60^3}}$$

Durch Erweitern dieses Bruchs mit 60^3 (= 216000) wird daraus:

$$\frac{77\ 708\ 431}{2\ 640\ 858}$$

Zahnräder mit 77.708.431 bzw 2.640.858 Zähnen herstellen zu wollen, ist wohl illusorisch. Hujgens mußte nun, da dieser monströse Bruch sich nicht kürzen läßt, ihn durch einen anderen Bruch mit hinreichend kleinem Zähler und Nenner möglichst gut approximiernen.

Eine einfache, langweilige Lösung des Problems kennen wir alle. Durch Runden von Zähler und Nenner wird aus

$$\frac{77\ 708\ 431}{2\ 640\ 858} \approx \frac{77\ 700\ 000}{2\ 600\ 000} = \boxed{\frac{777}{26}}$$

♁ 26 Zähne

♄ 777 Zähne

Korrektur um einen
Erd-Zahn nach 2 1/2 Jahren

Hujgens wählte die Kettenbruchentwicklung dieses Verhältnisses als Approximation. Durch den Euklidischen Algorithmus erhält man die Quotienten, so daß

$$\frac{77\ 708\ 431}{2\ 640\ 858} = 29 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}}}$$

Der vollständige Kettenbruch lautet in der verkürzten Schreibweise $[29;2,2,1,5,1,4,1,1,2,1,7,1,5,5,1,1,2]$

Den holländischen Astronomen interessierte aber nur der Anfang des Kettenbruchs, der folgende Näherungen liefert:

$$29 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{1}}} = 29\,\frac{3}{7} = \boxed{\frac{206}{7}}$$

♁ 7 Zähne
♄ 206 Zähne
Korrektur um ein 1 Zahn nach 1346 J.

Das Getriebe des Planetenmodells erhält demnach für das Zahnrad der Erde 7 Zähne, für das des Saturns 206 Zähne. Wie genau nähert dieses Verhältnis nun das astronomische an? Um dies einzuschätzen, rechnen wir aus, nach wieviel Umdrehungen (x) der Erde um die Sonne das Erdzahnrad zur Korrektur um einen Zahn versetzt werden muß.

Da $\frac{206}{7}$ die 4. Näherung durch den Kettenbruch ist, ist sie größer als das wahre Verhältnis. Deshalb muß der Nenner dieses Verhältnisses, das Zahnrad der Erde um 1 vergrößert werden:

$$\frac{x \cdot 206}{x \cdot 7 + 1} = \frac{77\ 708\ 431}{2\ 640\ 858}$$

$$x \cdot 206 \cdot 2640858 = 77708431 \cdot 7 \cdot x + 77708431$$

$$= \frac{77708431}{57731} = \underline{\underline{\mathbf{1346{,}04\ldots}}}$$

Die obengenannte Korrektur wird gemäß unserer Rechnung nach 1346 Erdumläufen fällig. Das ist ungefähr die Größenordnung der Kalenderkorrekturen in den letzten Jahrtausende. Gegen diese Approximation durch die Kettenbruchentwicklung ist das schlichte Rundungsergebnis geradezu dilletantisch.

Schon nach $2\frac{1}{2}$ Erdumdrehungen müßte das Erdzahnrad mit seinen 26 Zähnen um einen versetzt werden. Berücksichtigen wir noch, daß es länger dauert, bis sich bei einem Zahnrad mit 7 Zähnen die Abweichung zu einem Zahn aufsummiert, als bei einem größeren Zahnrad mit 26 Zähnen, so gilt trotzdem: Die Kettenbruchapproximation ist fast 150 mal besser, obwohl ihr Nenner viel kleiner ist.

Verschiedene Kettenbrüche besonderer Zahlen

$$g = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}}}}}}$$

1 1 1 1 1 1 1 1

$N_3 = \frac{3}{5}$ $\blacktriangle f_3 \approx 0{,}018$

Gute Näherung an g

$$\frac{\pi}{\pi+4} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{31+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{13+\ddots}}}}}}}}$$

1 1 1 1 1 1 1 1

$N_3 = \frac{2}{3}$ $\blacktriangle f_3 \approx 0{,}018$

Sehr gute Näherung an g

$$\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+16}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{41+\ddots}}}}}}}}}$$

1 1 1 1 1 1 1 1 1

$N_{10} = \frac{55}{89}$ $\blacktriangle f_{10} \approx 0{,}00038$

$$e = 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cdots}}}}}}}}$$

1 1 1 1 1 1 1 1

$N_3 = \frac{19}{7}$ $\qquad$ $\blacktriangle f_3 < 0{,}004$

$$\frac{e+1}{e-1} = 2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{16+\cfrac{1}{20+\cfrac{1}{24+\cfrac{1}{28+\cfrac{1}{32+\cdots}}}}}}}}$$

1 1 1 1 1 1 1 1

$$\pi = 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}}}}}$$

1 1 1 1 1 1 1 1

$N_3 = \frac{355}{113}$ $\qquad$ $\blacktriangle f_4 < 0{,}00000027$

$$\frac{4}{\pi} = \cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\cfrac{81}{2+\cfrac{121}{2+\cfrac{169}{2+\cfrac{225}{2+\cdots}}}}}}}}$$

1 1 1 1 1 1 1 1

Sehr gute Annäherung an π

$$\sqrt{2}+\sqrt{3} = 3+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}}}}}$$

$N_3 = \dfrac{22}{7}$ $\qquad \blacktriangle f_3 < 0{,}0013$

Kettenbrüche der goldenen Zahlen

$$g^2 = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}}}}}$$

1
1
1
1
1
1
1
1

$$g^3 = \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cdots}}}}}}}}$$

1
1
1
1
1
1
1
1

$$g^4 = \cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}}}}}$$

1
1
1
1
1
1
1
1

$$g^5 = \cfrac{1}{11+\cfrac{1}{11+\cfrac{1}{11+\cfrac{1}{11+\cfrac{1}{11+\cfrac{1}{11+\cfrac{1}{11+\cfrac{1}{11+\cdots}}}}}}}}$$

1
1
1
1
1
1
1
1

Periodische Kettenbrüche von Quadratwurzeln

$$\sqrt{2} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}}}}}}}$$

$N_3 = \frac{17}{12}$ $\qquad \blacktriangle f_4 < 0{,}0025$

$$\sqrt{5} = 2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\ddots}}}}}}}}$$

$$\sqrt{6} = 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\ddots}}}}}}}}$$

$$\sqrt{47} = 6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{12+\ddots}}}}}}}}$$

Reduziert regelmäßige Kettenbrüche

$$\sqrt{3} = 2-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{4-\ddots}}}}}}}}$$

1
1
1
1
1
1
1
1

$$g = 1-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{3-\ddots}}}}}}}}$$

1
1
1
1
1
1
1
1

$$0 = 1-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\ddots}}}}}}}}$$

1
1
1
1
1
1
1
1

$$\pi = 4-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{17-\cfrac{1}{294-\ddots}}}}}}}}$$

1
1
1
1
1
1
1
1

Kettenbrüche mit nächstem Ganzen

$$e = 3-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5-\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{7-\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{9-\cfrac{1}{2+\cdots}}}}}}}}$$

$$\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{array}$$

$$\pi = 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{16-\cfrac{1}{294-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{5-\cfrac{1}{2+\cdots}}}}}}}}$$

$$\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{array}$$

$$\sqrt[3]{2} = 1+\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{7-\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5-\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{9-\cfrac{1}{16-\cfrac{1}{9-\cdots}}}}}}}}$$

$$\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{array}$$

Getriebeberechnung bei gefordertem Übersetzungsverhältnis von 1,172 : 2,64 : 3,01

$$\frac{1{,}172}{2{,}64} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{23+\cdots}}}}$$

$$N_2 = \frac{3}{7} \quad ; \qquad N_3 = \frac{4}{9}$$

$$\frac{2{,}64}{3{,}01} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}}$$

$$N_3 = \frac{7}{8}$$

Approximation des gegebenen Verhältnisses:

1. (mäßige Näherung) 3 : 7 : 8 (= 1,1314 : 2,64 : 3,017)
2. (gute Näherung) 28 : 63 : 72 (= 1,1733 : 2,64 : 3,017)