DER GRÖßTE GEMEINSAME TEILER UND DAS KLEINSTE GEMEINSAME VIELFACHE ZWEIER ZAHLEN

1. Die Teiler einer Zahl

Eine Zahl[1], etwa 80, hat stets endlich viele Teiler und unbegrenzt viele Vielfache. Will man etwa alle Teiler einer Zahl ermitteln dann bietet sich das Verfahren «Komplementärer Teilerbildung» an. Für die Zahl 80 sieht dies wie folgt aus:

	80	
1	·	80
2	·	40
4	·	20
5	·	16
8	·	10

Dies sind tatsächlich alle Teiler der Zahl 80. Bemerkenswert dabei ist: Es gibt stets einen größten (in diesem Fall 80) und einen kleinsten (in diesem Fall 1) Teiler. Zahlen, die nur einen größten Teiler und einen kleinsten Teiler haben und somit keine weiteren nennt man *Primzahlen*. Weitere Beispiele:(Wir lassen im Folgenden bei der komplementären Teilung die Punkte weg)

432		60		496		28		103	
1	432	1	60	1	496	1	28	1	103
2	216	2	30	2	248	2	14		
3	144	3	20	4	124	4	7		
4	108	4	15	8	62				
6	72	5	12	16	31				
8	54	6	10						
9	48								
12	36								
16	27								
18	24								

---

1 Unter "Zahl" wollen wir im Folgenden stets natürliche Zahlen 1, 2, 3, ... verstehen

2. Die Vielfachen einer Zahl

Jede Zahl, etwa 12, hat unbegrenzt viele Vielfache:

$$\begin{aligned} 12 &= 1 \cdot 12 \\ 24 &= 2 \cdot 12 \\ 36 &= 3 \cdot 12 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Bemerkenswert bdabei ist: Unter den Vielfachen einer zahl gibt es stets ein *kleinstes Vielfaches,* nähmlich sich selbst, aber ein größtes Vielfaches existiert nicht. Die zahl selbst als Vielfaches seiner selbst anzusprechen ist zwar möglich, aber etwas abstrakt.

3. Gemeinsame Teiler und der größte gemeinsame Teiler zweier Zahlen.

Zwei Zahlen, etwa 60 und 84, haben stets gemeinsame Teiler. Im Extremfall ist 1 der einzige gemeinsame Teiler, wie zum Beispiel bei den beiden Zahlen 49 und 60. In diesem Falle nennen wir die beiden Zahlen teilerfremd. Alle Primzahlen sind zueinander teilerfremd. Sind zwei Zahlen nicht zueinander teilerfremd, dann existieren stets endlich viele gemeinsame Teiler, wobei es stets einen kleinsten (nämlich 1) und einen größten gemeinsamem Teiler gibt. Dieser größte gemeinsame Teiler ist nun für viele praktische Rechnungen von Bedeutung. Im Folgenden sei mit t irgendein gemeinsamer Teiler der beiden Zahlen bezeichnet, mit T jedoch der größte unter ihnen.

An den folgenden Beispielen soll gezeigt werden, wie man durch den Vergleich der beiden Teilerfolgen gemeinsame Teiler erkennt und insbesondere den größten unter ihnen. Gemeinsame Teiler sind im Folgenden durch einen Stern, der größte gemeinsame Teiler durch einen horizontalen Strich gekennzeichnet.

60		84		56		84	
** 1	60	* 1	84	* 1	56	* 1	84
* 2	30	* 2	42	* 2	$\underline{28}$	* 2	42
* 3	20	* 3	28	* 4	* 14	3	$\underline{28}$
* 4	15	* 4	21	* 7	8	* 4	21
5	$\underline{12}$	* 6	14			6	* 14
* 6	10	7	$\underline{12}$			* 7	12

gemeinsame Teiler t: 1, 2, 3, 4, 6, 12
größter gemeinsamer Teiler : $\underline{\underline{T = 12}}$

gemeinsame Teiler t: 1, 2, 4, 7
$\underline{\underline{T = 28}}$

180	
* 1	180
* 2	90
* 3	60
* 4	45
* 5	36
* 6	30 *
9	20
* 10	18
* 12	15 *

420	
* 1	420
* 2	210
* 3	140
* 4	105
* 5	84
* 6	70
7	60
* 10	42
* 12	35
14	* 30
* 15	28
* 20	21

30	
* 1	30
2	15
3	10
5	6

34	
* 1	34
2	17

gemeinsame Teiler t: 1, 2

T = 2

gemeinsame Teiler t: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10
12, 15, 20, 30, 60

größter gemeinsamer Teiler : $T = 60$

3a. Praktische Anwendungen beim Kürzen von Brüchen

z. B. $\frac{60}{84} \overset{(12)}{=} \frac{5}{7}$ $\frac{56}{84} \overset{(28)}{=} \frac{2}{3}$ $\frac{180}{420} \overset{(60)}{=} \frac{3}{7}$ etc.

4. Gemeinsame Vielfache und das kleines gemeinsame Vielfache zweier Zahlen

Unter den möglichen gemeinsamen Vielfachen zweier Zahlen suchen wir das kleinst mögliche. Für das praktische Rechnen ist das kleinste gemeinsame Vielfache zweier Zahlen genau so wesentlich, wie der größte gemeinsame Teiler zweier Zahlen. Es seien etwa die Zahlen 60 und 84 gegeben. Das Produkt der beiden Zahlen $60 \cdot 84$ ist sicher *ein* gemeinsames Vielfaches der beiden Zahlen, denn beide Zahlen sind unmittelbar erkennbar im Produkt enthalten. Größere gemeinsame Vielfache sind leicht zu finden:

$$
\begin{aligned}
60 \cdot 84 &= 5040 \\
2 \cdot 60 \cdot 84 &= 10080 \\
3 \cdot 60 \cdot 84 &= 15230 \\
\vdots \quad & \quad \vdots
\end{aligned}
$$

In unserem Beispiel ist nun das kleinste gemeinsame Vielfache die Zahl 432. Sie ist wesentlich kleiner, als die aufgeschriebenen Vielfachen, läßt sich aber im Endefekt sehr einfach aus den beiden zugehörigen Teilerfolgen und dem größten gemeinsamen Teiler der beiden Zahlen ermitteln. Das soll kurz beispielhaft erläutert werden:

60		84		
* 1	60	* 1	84	
* 2	30	* 2	42	
* 3	20	* 3	28	
* 4	15	* 4	21	$T = 12$
[5	12]	* 6	14	
* 6	10	[7	12]	

Das Produkt der beiden Zahlen läßt damit folgende Darstellung zu:

$$60 \cdot 84 = 5 \cdot 12 \quad \cdot \quad 7 \cdot 12 = 5 \cdot 12^2 \cdot 7 = 5 \cdot T^2 \cdot 7$$

Für das *kleinste* gemeinsame Vielfache der beiden Zahlen darf aber der Doppelfaktor $12 \cdot 12$ nur einfach vorkommen, d.h. das Produkt $60 \cdot 84 = 5 \cdot 12^2 \cdot 7$ muß durch 12 dividiert werden. Wir erhalten also als kleinstes gemeinsames Vielfaches der beiden Zahlen 60 und 84

$$\frac{60 \cdot 84}{12} = 5 \cdot 12 \cdot 7$$

Das Enthaltensein der beiden Ausgangszahlen in diesem Produkt ergibt sich unmittelbar erkennbar durch die folgende Gleichungen.

$$5 \cdot 12 \cdot 7 \;=\; 60 \cdot 7 \;=\; 5 \cdot 84$$

Die Zahl $5 \cdot 12 \cdot 7 = 420$ ist nun unmittelbar aus den Teilerfolgen der beiden Ausgangszahlen ablesbar, nachdem ihr größter gemeinsamer Teiler bestimmt wurde.

Ein weiteres Beispiel: (Im Folgenden wählen wir für die Bezeichnung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen den Buchstaben V)

48		54			
1	48	* 1	54		
2	24	* 2	27	$T =$	6
3	16	* 3	18	$V =$	$8 \cdot T \cdot 9 = 8 \cdot 6 \cdot 9$
4	12	* 6	9	$=$	$48 \cdot 9 \;= 8 \cdot 54$
6	8			$=$	$\underline{\underline{432}}$

2 Anwendungsbeispiele

1. $\frac{1}{48} + \frac{1}{54} = \frac{9}{432} + \frac{8}{432} = \frac{17}{432}$

2. welcher der beiden Brüche $\frac{11}{48}$ und $\frac{13}{54}$ ist der größte?

   Antwort:

   Zunächst ist $\frac{11}{48} = \frac{9 \cdot 11}{432} = \frac{99}{432}$ und $\frac{13}{54} = \frac{8 \cdot 13}{432} = \frac{104}{432}$.

   Damit ist $\frac{13}{54} > \frac{11}{48}$.

5. Algebraische Formulierung der Gesetze

Bemerkenswert bei der Darstellung des letzten Abschnitts ist die Tatsache, daß das Produkt zweier Zahlen die Beziehung zwischen T und V vermittelt. Mit etwas Algebra (a und b bezeichnen irgend zwei verschiedene Zahlen) läßt sich die hier vorliegende Gesetzmäßigkeit in Formeln bringen, die in verschiedener Weise das Gleiche zum Ausdruck zum bringen.

1. Fassung: $\frac{a \cdot b}{T} = V$	Das kleinste gemeinsame Vielfache zweier Zahlen gibt an, wie oft der größte gemeinsame Teiler in dem Produkt der Zahlen enthalten ist.
2. Fassung: $\frac{a \cdot b}{V} = T$	Der größte gemeinsame Teiler zweier Zahlen gibt an, wie oft das kleinste gemeinsame Vielfache in dem Produkt der Zahlen enthalten ist
3. Fassung: $a \cdot b = T \cdot V$	Das Produkt zweier Zahlen ist gleich dem Produkt aus dem größten gemeinsamen Teiler und dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen der
beiden	Zahlen.