Pythagoras und der Kreis

oder die Folge primitiver pythagoreischer Zahlentripel*

1 Einführung

Ist $P\,(x/y)$ ein Punkt auf dem Kreis mit der Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$, so ist $P\left(\frac{x}{r}/\frac{y}{r}\right)$ ein Punkt auf dem Einheitskreis.

Sind x, y und r natürliche Zahlen, so nennt man (x,y,r) ein pythagoreisches Zahlentripel (PZT). Dann ist offenbar auch $(2x,\, 2y, 2r)$ oder allgemein $(n \cdot x,\, n \cdot y,\, n \cdot r)$ mit $n \in \mathbb{N}$ ein PZT. Sind die drei Zahlen teilerfremd, ist also der größte gemeinsame Teiler $ggT\,(x, y, r) = 1$, so nennt man (x, y, r) ein primitives PZT.

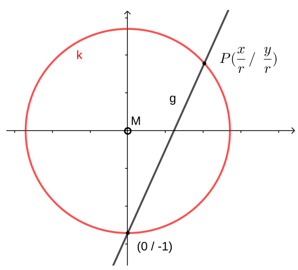

Abbildung 1: Einheitskreis

Wie gewinnt man alle primitiven pythagoreischen Zahlentripel?

Ist $P\left(\frac{s}{t}/\frac{u}{v}\right)$ irgend ein Punkt mit rationalen Koordinaten auf dem Einheitskreis, so ist

$$\left(\frac{s}{t}\right)^2 + \left(\frac{u}{v}\right)^2 = 1$$
$$(s \cdot v)^2 + (u \cdot t)^2 = (t \cdot v)^2$$

also (x, y, z) mit $x = s \cdot v$, $y = u \cdot t$, $z = t \cdot v$ ein PZT.

Somit gehört zu jedem Punkt P mit rationalen Koordinaten auf dem Einheitskreis ein PTZ und umgekehrt.

Die Verbindungsgerade zweier solcher Punkte hat dann eine rationale Steigung, und jede Sekante mit rationaler Steigung, die durch einen Punkt P des Einheitskreises mit rationalen Koordinaten geht, trifft den Einheitskreis in einem zweiten Punkt P', der ebenfalls rationale Koordinaten besitzt.

*p.baum@posteo.de, 22.06.2019

Insbesondere liefert also die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{m}{n} \cdot x - 1$ und $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$ stets einen Punkt des Einheitskreises mit rationalen Koordinaten im 1. Quadranten (Abb. 1). Wir berechnen seine Koordinaten:

$$\begin{aligned} x^2 + \left(\frac{m}{n} \cdot x - 1\right)^2 &= 1 \\ x^2 \left(1 + \left(\frac{m}{n}\right)^2\right) - 2\frac{m}{n} \cdot x &= 0 \\ x\left(\left(m^2 + n^2\right) x - 2m \cdot n\right) &= 0 \end{aligned}$$

und man erhält die beiden Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{2mn}{m^2+n^2}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} y_2 &= \frac{m}{n} \cdot \frac{2mn}{m^2 + n^2} - 1 \\ y_2 &= \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} \end{aligned}$$

Zu dem Punkt $P_2\left(\frac{2mn}{m^2+n^2} / \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}\right)$ des Einheitskreises gehört offenbar das PZT (x, y, z) mit

$$\begin{aligned} x &= 2mn \\ y &= m^2 - n^2 \\ z &= m^2 + n^2 \end{aligned} \tag{1}$$

x	y	z		
4	3	5		
12	5	13		
8	15	17		
24	7	25		5^2
20	21	29		
12	35	37		
40	9	41		
28	45	53		
60	11	61		
16	63	65		5 * 13
56	33	65		
48	55	73		
36	77	85		5 * 17
84	13	85		
80	39	89		
72	65	97		
20	99	101		
60	91	109		
112	15	113		
44	117	125		5^3
88	105	137		
24	143	145		5 * 29
144	17	145		
140	51	149		

Tabelle 1: PZT

Bemerkung 1. Diese Überlegung lässt sich auf den Raum mit der Einheitskugel übertragen. Aus den drei natürlichen Zahlen p, q, r erhält man mit der Geraden $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ den Schnittpunkt $\left(\frac{2pr}{s} / \frac{2qr}{s} / \frac{r^2-p^2-q^2}{s}\right)$, $s = p^2 + q^2 + r^2$ mit der Einheitskugel und somit das pythagoreische Quadrupel

$$\begin{aligned} x &= 2rp \\ y &= 2rq \\ z &= r^2 - p^2 - q^2 \\ s &= p^2 + q^2 + r^2 \end{aligned}$$

mit $x^2 + y^2 + z^2 = s^2$. Die Herleitung und die Bedingung für $ggT\,(x, y, z, s) = 1$ findet man im Anhang (Abschnitt 5.2).[1]

Welche Bedingung müssen die beiden natürlichen Zahlen m und n erfüllen, damit $\left(2mn,\, m^2 - n^2,\, m^2 + n^2\right)$ ein *primitives* PZT ist?[2]

Offenbar müssen m und n teilerfremd sein, also $ggT\,(m, n) = 1$. Sind m und n ungerade Zahlen, so sind auch m^2 und n^2 ungerade und folglich $y = m^2 - n^2$ und $z = m^2 + n^2$ gerade Zahlen, und alle drei Zahlen x, y und z sind durch 2 teilbar.

Die Formeln (1) liefern also genau dann alle primitiven PZT, wenn $ggT\,(m, n) = 1$ und m oder n gerade ist. Dann ist aber $x = 2mn$ sogar durch 4 teilbar.

Sind m und n teilerfremd und beide ungerade, so ist (x,y,z) mit

$$\begin{aligned} x &= m \cdot n \\ y &= \frac{1}{2}\left(m^2 - n^2\right) \\ z &= \frac{1}{2}\left(m^2 + n^2\right) \end{aligned} \tag{2}$$

ein primitives PZT.[3] Es gilt also folgender

Satz. *Durch die Formeln* (1) *erhält man alle primitiven pythagoreischen Zahlentripel* $(x,\, y,\, z)$*, falls* $ggT\,(m, n) = 1$ *und entweder m oder n gerade ist, und durch die Formeln* (2) *erhält man alle primitiven PZT, wenn* $ggT\,(m, n) = 1$ *und sowohl m als auch n ungerade ist. Jedes primitive PZT enthält genau eine durch 4 teilbare Zahl.*

In der Tabelle 1 sind die ersten primitiven pythagoreischen Zahlentripel nach der Hypotenusengröße gelistet. In der ersten Spalte stehen die durch 4 teilbaren Katheten, in der zweiten Spalte die ungeraden Katheten und in der dritten Spalte die Hypotenuse. Man bemerkt folgende Eigenschaften:

- eine der beiden Katheten ist immer durch 3 teilbar,
- eine der drei Zahlen ist immer durch 5 teilbar,
- die um 1 verminderte Hypotenuse ist immer durch 4 teilbar

[1] Im Nachlass von Georg Glöckler befindet sich eine Handschrift, die den Zusammenhang zwischen den drei Darstellungen $n = a^2 + b^2$, $x^2 + y^2 = z^2$ und $u^2 + v^2 + w^2 = t^2$ untersucht. Sie wurde von mir unter dem Titel „Drei elementare Quadratsummen“ in eine Datei übertragen.

[2] Die Formel (1) steht schon in den Elementen des Euklid, Buch X, § 28a, und auch Francois Vieta war sie bekannt (Einführung in die neue Algebra, übersetzt und erläutert von Karin Reich und Helmuth Gericke, München 1973).

[3] In Anlehnung an den Satz des Pythagoras nennen wir die Zahlen x und y Katheten und die Zahl z Hypotenuse.

2 Folgen pythagoreischer Tripel

Für $m = 2$ und $n = 1$ erhält man aus (1) das PZT (4, 3, 5).

Dieser Fall ist in Abb. 2 dargestellt. Die Gerade $y = 2x - 1$ schneidet den Einheitskreis also im Punkt $P\left(\frac{4}{5}/\frac{3}{5}\right)$ und geht auch durch den Punkt $A\,(1/1)$). Der Punkt $P\left(\frac{4}{5}/\frac{3}{5}\right)$ liefert ein „pythagoreisches Rechteck“ mit den Eckpunkten $P_1\left(-\frac{4}{5}/\frac{3}{5}\right)$, $P_2\left(-\frac{4}{5}/-\frac{3}{5}\right)$ und $P_3\left(\frac{4}{5}/-\frac{3}{5}\right)$ auf dem Einheitskreis. Verbindet man diese durch Geraden mit A, so erhält man drei weitere rationale Schnittpunkte $P_i\left(\frac{u}{w}/\frac{v}{w}\right)$ mit dem Einheitskreis, die neue pythagoreische Zahlentripel (u, v, w) liefern. Mit jeder der drei Geraden erhält man so Formeln, mit denen die neuen PZT (u, v, w) aus den alten PZT (a, b, c) berechnet werden können.[4]

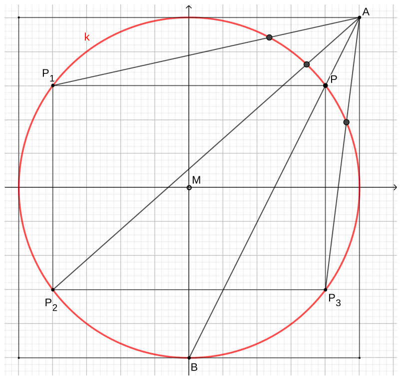

Abbildung 2: Folgetripel

Die Formeln lauten

$$\begin{aligned} u &= 2\,(c-b)+a \\ v &= 2\,(a+c)-b \\ w &= 2\,(a-b)+3c \end{aligned} \quad (3) \qquad \begin{aligned} u &= 2\,(b+c)+a \\ v &= 2\,(a+c)+b \\ w &= 2\,(a+b)+3c \end{aligned} \quad (4) \qquad \begin{aligned} u &= 2\,(b+c)-a \\ v &= 2\,(c-a)+b \\ w &= 2\,(b-a)+3c \end{aligned} \quad (5)$$

Ihre Herleitung findet man im Anhang.

Man kann die Formeln auch in üblicher Weise mit einer Matrix beschreiben:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Bemerkung 2. Man kann die zweite Formel aus der ersten herleiten, indem man gemäß dem Übergang von P_1 zu P_2 b durch $-b$ ersetzt, und die dritte Formel aus der ersten, indem man gemäß dem Übergang von P_1 zu P_3 a durch $-a$ und b durch $-b$ ersetzt. Vertauscht man die ersten beiden Spalten in der Matrix, so vertauscht man lediglich die Reihenfolge der Katheten im PZT.

Bemerkung 3. Georg Glöckler setzt diese Formeln in seinem Artikel „Das ägyptische Dreieck als Keim aller pythagoreischen Dreiecke“, Mathematisch-Physikalische Korrespondenz Nr 206, Michaeli 2001 einfach voraus und schreibt: „Die hier geltenden Rekursionsformeln lassen sich, einmal gefunden, leicht durch Nachrechnen prüfen.“ Aber auch

[4] Roger Vogeler hat gezeigt, dass man mit diesem Verfahren, ausgehend von $P\left(\frac{4}{5}/\frac{3}{5}\right)$ alle pythagoreischen Rechtecke genau einmal erhält (nach J.H. Conway: Zahlenzauber, Basel 1997, S.193).

in den sehr umfassenden Artikeln von Anna Maria Fraedrich über pythagoreische Zahlentripel in DdM 1, 1985 (31 - 49) und DdM 2, 1985 (98-117) und MU 6 1987 (5 - 19) und in „Rekursive Erzeugung der primitiven pythagoreischen Zahlentripel“ (Mathematische Semesterberichte, Band 39, Heft 1 1992) sowie in Harald Scheid: Zahlentheorie, 2.Aufl. Mannheim 1994 werden die Rekursionsformeln nicht hergeleitet.

3 Eigenschaften der PZT

Satz. *Eine Kathetenzahl ist immer durch 4 teilbar.*

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus den Formeln (1) und der Bedingung, dass entweder n oder m gerade sein muss. □

Satz. *Eine Kathetenzahl ist immer durch 3 teilbar.*

Beweis. Es ist zu zeigen, dass $y = n^2 - m^2$ durch 3 teilbar ist, wenn $x = 2nm$, also auch n und m nicht durch 3 teilbar sind.
Wegen

$$\begin{aligned}(3k+1)^2 &= 9k^2 + 6k + 1\\ (3k+2)^2 &= 9k^2 + 12k + 4\\ &= 9k^2 + 12k + 3 + 1\\ &= 3\left(3k^2 + 4k + 1\right) + 1\end{aligned}$$

gehört das Quadrat einer nicht durch 3 teilbaren Zahl immer zur Restklasse 1 mod 3. Die Differenz $y = n^2 - m^2$ zweier solcher Zahlen ist also immer durch 3 teilbar, w.z.b.w. □

Satz. *Eine der drei Zahlen $x = 2nm$, $y = n^2 - m^2$, $z = n^2 + m^2$ ist immer durch 5 teilbar.*

Beweis. Es ist zu zeigen, dass $y = n^2 - m^2$ oder $z = n^2 + m^2$ durch 5 teilbar ist, wenn $x = 2nm$, also auch n und m nicht durch 5 teilbar sind und somit entweder durch $5k \pm 1$ oder durch $5k \pm 2$ darstellbar sind.
Wegen

$$\begin{aligned}(5k \pm 1)^2 &= 25k^2 \pm 10k + 1\\ (5k \pm 2)^2 &= 25k^2 \pm 20k + 4\\ (5k \pm 2)^2 &= 5\left(5k^2 \pm 4k + 1\right) - 1\end{aligned}$$

gehört das Quadrat einer nicht durch 5 teilbaren Zahl entweder zur Restklasse 1 oder -1 mod 5. Somit ist entweder die Summe oder die Differenz zweier solcher Zahlen durch 5 teilbar, w.z.b.w. □

Satz. *Die Hypotenuse $z = n^2 + m^2$ hat immer die Gestalt $z = 4k + 1$.*

Beweis. Wegen $n = 2i$ und $m = 2k + 1$ ist

$$z = 4i^2 + 4k^2 + 4k + 1$$
$$z = 4\left(i^2 + k^2 + k\right) + 1$$

w.z.b.w. □

4 $n = a^2 + b^2$

Man kann sich dafür interessieren, welche natürlichen Zahlen überhaupt als Hypotenuse in einem PZT auftreten können, also durch die Summe zweier Quadratzahlen darstellbar sind. Vermutlich war dies der Anlass zu einem Skript aus dem Nachlass von Georg Glöckler.[5]Dort listet er alle Quadratsummen $n = a^2 + b^2$ mit verschiedenen natürlichen Zahlen a und b auf und notiert die Primzahlzerlegung von n. Dann konstatiert er folgende Eigenschaften:[6]

1. Ist n eine Primzahl, so ist sie eine solche der Form $p = 4k + 1$.
2. Alle Vielfachen von p der Form $2^n \cdot p$ lassen sich als Summe zweier Quadratzahlen darstellen.
3. Alle Zahlen n, die in ihrer kanonischen Darstellung nicht mindestens einen Faktor p haben, sind nicht als Quadratsummen darstellbar.

Nach einer Untersuchung der beiden Zahlen 25 920 (Weltenjahr) und 144 000 (Apokalypse ds Johannes) untersucht Glöckler die Darstellung von Primzahlquadraten der Form $p_\gamma^2 = (1 + 4m)^2$und untersucht in einem weiteren Abschnitt die Anzahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl durch Quadratsummen, insbesondere die Abhängigkeit von der kanonischen Darstellung $n = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdots p_\gamma^{\beta_\gamma}$.

5 Anhang

5.1 Tripel

Die allgemeine Rechnung ergibt mit dem Ausgangspunkt $P\left(\frac{a}{c}/\frac{b}{c}\right)$ und den drei Rechteckpunkten $P_1\left(-\frac{a}{c}/\frac{b}{c}\right)$, $P_2\left(-\frac{a}{c}/-\frac{b}{c}\right)$ und $P_3\left(\frac{a}{c}/-\frac{b}{c}\right)$ die drei Geradengleichungen (6), (7) und (8).

[5]Georg Glöckler: $n = a^2 + b^2$. Welche natürlichen Zahlen sind durch eine Quadratsumme darstellbar? Mathematisch-Astronomische Sektion am Goetheanum, Dornach 2000

[6]Für Beweise verweist Georg Glöckler auf das Buch von Hardy-Wright: Einführung in die Zahlentheorie (1958 R. Oldenbourg, München: S. 340 ff.).

Gerade durch $P_1\left(-\frac{a}{c}/\frac{b}{c}\right)$:

$$\begin{aligned}
\frac{y-1}{x-1} &= \frac{\frac{b}{c}-1}{-\frac{a}{c}-1} \\
\frac{y-1}{x-1} &= \frac{c-b}{a+c} \\
y &= \frac{c-b}{a+c}\cdot x - \frac{c-b}{a+c} + 1 \\
y &= \frac{c-b}{a+c}\cdot x + \frac{a+b}{a+c} \qquad (6)
\end{aligned}$$

Gerade durch $P_2\left(-\frac{a}{c}/-\frac{b}{c}\right)$:

$$\begin{aligned}
\frac{y-1}{x-1} &= \frac{-\frac{b}{c}-1}{-\frac{a}{c}-1} \\
\frac{y-1}{x-1} &= \frac{b+c}{a+c} \\
y &= \frac{b+c}{a+c}\cdot x - \frac{b+c}{a+c} + 1 \\
y &= \frac{b+c}{a+c}\cdot x + \frac{a-b}{a+c} \qquad (7)
\end{aligned}$$

Gerade durch $P_2\left(\frac{a}{c}/-\frac{b}{c}\right)$:

$$\begin{aligned}
\frac{y-1}{x-1} &= \frac{-\frac{b}{c}-1}{\frac{a}{c}-1} \\
\frac{y-1}{x-1} &= \frac{b+c}{c-a} \\
y &= \frac{b+c}{c-a}\cdot x - \frac{b+c}{c-a} + 1 \\
y &= \frac{b+c}{c-a}\cdot x - \frac{a+b}{c-a} \qquad (8)
\end{aligned}$$

Einsetzen von (6) in die Kreisgleichung ergibt unter Berücksichtigung von $a^2+b^2=c^2$

$$\begin{aligned}
x^2 + \left(\frac{c-b}{a+c}\cdot x + \frac{a+b}{a+c}\right)^2 - 1 &= 0 \\
x^2\,(a+c)^2 + x^2\,(c-b)^2 + 2\,(c-b)\,(a+b)\cdot x + (a+b)^2 - (a+c)^2 &= 0 \\
x^2\left(a^2+b^2+2c^2+2ac-2bc\right) + 2\left(bc+ac-ab-b^2\right)\cdot x + b^2 - c^2 + 2a\,(b-c) &= 0 \\
x^2\left[3c^2+2c\,(a-b)\right] + 2\left(bc+ac-ab-b^2\right)x - \left[2a\,(c-b)+a^2\right] &= 0 \qquad (9)
\end{aligned}$$

Es sei $P\left(\frac{u}{w}/\frac{v}{w}\right)$ der zweite Schnittpunkt der Geraden (6) mit dem Einheitskreis. Der Ansatz $\left(x+\frac{a}{c}\right)\left(x-\frac{u}{w}\right)=0$ führt zu

$$cw\cdot x^2 + (aw-cu)\cdot x - au = 0$$

Der Koeffizientenvergleich mit (9) liefert

$$\begin{aligned} c \cdot w &= 3c^2 + 2c\,(a-b) \\ w &= 3c + 2\,(a-b) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} a \cdot u &= 2a\,(c-b) + a^2 \\ u &= 2\,(c-b) + a \end{aligned}$$

Dann ist in der Tat

$$\begin{aligned} aw - cu &= a\,[3c + 2\,(a-b)] - c\,[2\,(c-b) + a] \\ aw - cu &= 3ac + 2a^2 - 2ab - 2c^2 + 2bc - ac \\ aw - cu &= 2ac + 2bc - 2ab - 2\left(c^2 - a^2\right) \\ aw - cu &= 2\left(bc + ac - ab - b^2\right) \end{aligned}$$

der Koeffizient von x.
Einsetzen in die Geradengleichung (6) ergibt

$$\begin{aligned} \frac{v}{w} &= \frac{c-b}{a+c} \cdot \frac{u}{w} + \frac{a+b}{a+c} \\ v\,(a+c) &= (c-b)\,[2\,(c-b) + a] + (a+b)\,[3c + 2\,(a-b)] \\ v\,(a+c) &= 2c^2 - 4bc + +2b^2 + ac - ab + 3ac + 3bc + 2\left(a^2 - b^2\right) \\ v\,(a+c) &= 2c^2 + 4ac + 2a^2 - bc - ab \\ v\,(a+c) &= 2\,(a+c)^2 - b\,(a+c) \\ v &= 2\,(a+c) - b \end{aligned}$$

Aus dem PZT (a, b, c) gewinnt man also durch die Formeln

$$\begin{aligned} u &= 2\,(c-b) + a \\ v &= 2\,(a+c) - b \\ w &= 2\,(a-b) + 3c \end{aligned} \tag{10}$$

das PZT (u, v, w).
Entsprechend erhält man mit der Geraden $g_2 : y = \frac{b+c}{a+c} \cdot x + \frac{a-b}{a+c}$

$$\begin{aligned} x^2 + \left[\frac{b+c}{a+c} \cdot x + \frac{a-b}{a+c}\right]^2 - 1 &= 0 \\ x^2\left(a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bc + c^2\right) + 2\,(b+c)\,(a-b)\,x + (a-b)^2 - (a+c)^2 &= 0 \\ x^2\left(3c^2 + 2c\,(a+b)\right) + 2\left(ab + ac - bc - b^2\right)x + b^2 - c^2 - 2a\,(b+c) &= 0 \\ x^2\left[3c^2 + 2c\,(a+b)\right] + 2\left(ab + ac - bc - b^2\right)x - \left[a^2 + 2a\,(b+c)\right] &= 0 \end{aligned}$$

und mit dem Ansatz

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{a}{c}\right)\left(x-\frac{u}{w}\right)&=0\\ cw\cdot x^2+(aw-uc)\cdot x-au&=0\end{aligned}$$

den Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned}cw&=3c^2+2c\,(a+b)\\ w&=3c+2\,(a+b)\\ au&=a^2+2a\,(b+c)\\ u&=a+2\,(b+c)\end{aligned}$$

und schließlich durch einsetzen

$$\begin{aligned}\frac{v}{w}&=\frac{b+c}{a+c}\cdot\frac{u}{w}+\frac{a-b}{a+c}\\ v\,(a+c)&=(b+c)\,[a+2\,(b+c)]+(a-b)\,[3c+2\,(a+b)]\\ v\,(a+c)&=ab+ac+2b^2+4bc+2c^2+3ac-3bc+2\left(a^2-b^2\right)\\ v\,(a+c)&=ab+4ac+bc+2c^2+2a^2\\ v\,(a+c)&=b\,(a+c)+2\,(a+c)^2\\ v&=2\,(a+c)+b\end{aligned}$$

Somit ergeben sich die Formeln

$$\begin{aligned}u&=2\,(b+c)+a\\ v&=2\,(a+c)+b\\ w&=2\,(a+b)+3c\end{aligned}\tag{11}$$

Mit der dritten Geraden g_3 erhält man $y=\frac{b+c}{c-a}\cdot x-\frac{a+b}{c-a}$ und weiter

$$\begin{aligned}x^2+\left(\frac{b+c}{c-a}\cdot x-\frac{a+b}{c-a}\right)^2-1&=0\\ x^2\left[(c-a)^2+(b+c)^2\right]-2\,(b+c)\,(a+b)\cdot x+(a+b)^2-(c-a)^2&=0\\ x^2\left(3c^2-2ac+2bc\right)-2\,(b+c)\,(a+b)\cdot x+b^2-c^2+2ab+2ac&=0\\ x^2\left[3c^2+2c\,(b-a)\right]-2\,(b+c)\,(a+b)\cdot x+\left[2a\,(b+c)-a^2\right]&=0\end{aligned}$$

mit dem Ansatz

$$\begin{aligned}\left(x-\frac{a}{c}\right)\left(x-\frac{u}{w}\right)&=0\\ cw\cdot x^2-(aw+uc)\cdot x+au&=0\end{aligned}$$

und dem Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} cw &= 3c^2 + 2c\,(b-a) \\ w &= 3c + 2\,(b-a) \\ au &= 2a\,(b+c) - a^2 \\ u &= 2\,(b+c) - a \end{aligned}$$

und einsetzen in die Geradengleichung

$$\begin{aligned} \frac{v}{w} &= \frac{b+c}{c-a} \cdot \frac{u}{w} - \frac{a+b}{c-a} \\ v\,(c-a) &= (b+c)\,[2\,(b+c) - a] - (a+b)\,[3c + 2\,(b-a)] \\ v\,(c-a) &= 2b^2 + 4bc + 2c^2 - ab - ac - \left[3ac + 3bc + 2\left(b^2 - a^2\right)\right] \\ v\,(c-a) &= bc + 2c^2 - ab - 4ac + 2a^2 \\ v\,(c-a) &= 2\,(c-a)^2 + b\,(c-a) \\ v &= 2\,(c-a) + b \end{aligned}$$

und damit gewinnt man die Formeln

$$\begin{aligned} u &= 2\,(b+c) - a \\ v &= 2\,(c-a) + b \\ w &= 2\,(b-a) + 3c \end{aligned} \tag{12}$$

5.2 Quadrupel

Es sei (p, q, r) ein Tripel aus natürlichen Zahlen. Die Gerade $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ schneidet dann mit geeignetem λ die Einheitskugel $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ in einem Punkt mit rationalen Koordinaten, die ein pythagoreisches Zahlenquadrupel liefern. Aus $\vec{x}^2 = 1$ folgt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}^2 + 2\lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}^2 &= 1 \\ 1 - 2\lambda r + \lambda^2 \left(p^2 + q^2 + r^2\right) &= 1 \\ \lambda &= \frac{2r}{p^2 + q^2 + r^2} \end{aligned}$$

und weiter mit der Abkürzung $p^2 + q^2 + r^2 = s$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{2r}{s} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$
$$\vec{x} = \frac{1}{s} \begin{pmatrix} 2rp \\ 2rq \\ r^2 - p^2 - q^2 \end{pmatrix}$$

und man erhält so aus den drei natürlichen Zahlen p, q, r das pythagoreische Zahlenquadrupel

$$\begin{aligned} x &= 2rp \\ y &= 2rq \\ z &= r^2 - p^2 - q^2 \\ s &= p^2 + q^2 + r^2 \end{aligned}$$

mit $x^2 + y^2 + z^2 = s^2$.

Die Bedingung $ggT\,(p, q, r) = 1$ ist sicher notwendig für $ggT\,(x, y, z) = 1$. Es muss aber noch ausgeschlossen werden, dass z und s beide gerade sind, damit (x, y, z) ein primitives pythagoräisches Zahlenquadrupel bilden. Dies ist offenbar der Fall, wenn alle drei Zahlen p, q und r oder nur eine von ihnen ungerade sind.

Übrigens erhält man natürlich für $p = 0$ oder für $q = 0$ die Formeln für ein PZT.