Zu den Primzahltypen

Glöckler unterscheidet die Primzahlen nach 4 Typen nach ihren Resten modulo 8. Das Motiv ist wohl die Möglichkeit, daraus Quadrat-n-tupel zu erzeugen, denn zu den 4 Typen gehören verschiedene Pell'sche Gleichungen – im allgemeinsten Sinne – : $x^2 - d \cdot y^2 = p$, diophantische Gleichungen, für die es in einigen Fällen für d und p Lösungsmethoden gibt.

Die 4 Typen nach Resten mod 8 haben verschiedene Darstellungen durch Quadratsummen:
Rest 5: $p = x^2 + y^2$ Rest 3: $q = x^2 + 2 \cdot y^2$ Rest 7: $r = x^2 - 2 \cdot y^2$ [so und nicht anders]
Rest 1: $u = x^2 + y^2$ oder $u = x^2 + 2 \cdot y^2$ oder $u = x^2 - 2 \cdot y^2$ oder $u = 2 \cdot x^2 - 1$
[universell: alle 3 Typen].

Beispiele:

Eine größere Tabelle, ganz in Glöcklers Sinne:

m	8m+1				Typ u				8m+3		Typ q		8m+5		Typ p		8m+7		Typ r	
		u	$= x^2 + 2y^2$		$= x^2 + y^2$		$= x^2 - 2y^2$			q	$= x^2 + 2y^2$			p	$= x^2 + y^2$			r	$= x^2 - 2y^2$	
			x	y	x	y	x	y			x	y			x	y			x	y
0	**1**		1	0	1	0	1	0	**3**	prim	1	1	**5**	prim	1	2	**7**	prim	3	1
1	9	3^2	1	2	3	0	3	0	**11**	prim	3	1	**13**	prim	3	2	15	3·5	------	
2	**17**	prim	3	2	1	4	5	2	**19**	prim	1	3	21	3·7	------		**23**	prim	5	1
3	25	5^2	5	0	3	4	5	0	27	3^3	5	1	**29**	prim	5	2	**31**	prim	7	3
4	33	3·11	1	4	------		------		35	5·7	------		**37**	prim	1	6	39	3·13	------	
5	**41**	prim	3	4	5	4	7	2	**43**	prim	5	3	45	$3^2 \cdot 5$	3	6	**47**	prim	7	1
6	49	7^2	7	0	7	0	7	0	51	3·17	7	1	**53**	prim	7	2	55	5·11	------	
7	57	3·19	5	4	------		------		**59**	prim	3	5	**61**	prim	5	6	63	$3^2 \cdot 7$	9	3
8	65	5·13	------		1	8	------		**67**	prim	7	3	69	3·23	------		**71**	prim	11	5
9	**73**	prim	1	6	3	8	9	2	75	$3 \cdot 5^2$	5	5	77	7·11	------		**79**	prim	9	1
10	81	3^4	3	6	9	0	9	0	**83**	3·29	9	1	85	5·17	9	2	87	3·29	------	
11	**89**	prim	9	2	5	8	11	4	91	7·13	------		93	3·31	------		95	5·19	------	
12	**97**	prim	5	6	9	4	13	6	99	$3^2 \cdot 11$	9	3	**101**	prim	1	10	**103**	prim	11	3
13	105	3·5·7	------		------		------		**107**	prim	3	7	**109**	prim	3	10	111	3·37	------	
14	**113**	prim	9	4	7	8	11	2	115	5·23	------		117	$3^2 \cdot 13$	9	6	119	7·17	11	1
15	121	11^2	7	6	11	0	11	0	123	3·41	11	1	125	5^3	11	2	**127**	prim	15	7
16	129	3·43	1	8	------		------		**131**	prim	9	5	133	7·19	------		135	$3^3 \cdot 5$	------	
17	**137**	prim	3	8	11	4	13	4	**139**	prim	11	3	141	3·47	------		143	11·13	------	
18	145	5·29	------		1	12	------		147	$3 \cdot 7^2$	7	7	**149**	prim	7	10	**151**	prim	13	3
19	153	$3^2 \cdot 17$	5	8	3	12	15	6	155	5·31	------		**157**	prim	11	6	159	3·53	------	
20	161	7·23	------		------		13	2	**163**	prim	1	9	165	3·5·11	------		**167**	prim	13	1
21	169	13^2	13	0	5	12	13	0	171	$3^2 \cdot 19$	13	1	**173**	prim	13	2	175	$5^2 \cdot 7$	15	5
22	177	3·59	7	8	------		------		**179**	prim	9	7	**181**	prim	9	10	183	3·61	------	
23	185	5·37	------		11	8	------		187	11·17	13	3	189	$3^3 \cdot 7$	------		**191**	prim	17	7
24	**193**	prim	11	6	7	12	15	4	195	3·5·13	------		**197**	prim	1	14	**199**	prim	19	9
25	201	3·67	13	4	------		------		203	7·29	------		205	5·41	3	14	207	$3^2 \cdot 23$	15	3
26	209	11·19	3	10	------		------		**211**	prim	7	9	213	3·71	------		215	5·43	------	
27	217	7·31	------		------		15	2	219	3·73	13	5	221	13·17	5	14	**223**	prim	15	1
28	225	$3^2 \cdot 5^2$	5	10	9	12	15	0	**227**	prim	15	1	**229**	prim	15	2	231	3·7·11	------	

m	8m+1				Typ u				8m+3		Typ q		8m+5		Typ p		8m+7		Typ r	
		u	$= x^2 + 2y^2$		$= x^2 + y^2$		$= x^2 - 2y^2$			q	$= x^2 + 2y^2$			p	$= x^2 + y^2$			r	$= x^2 - 2y^2$	
			x	y	x	y	x	y			x	y			x	y			x	y
33	265	5·53	- - -	- - -	3	16	- - -	- - -	267	3·89	13	7	**269**	prim	13	10	**271**	prim	17	3
34	273	3·7·13	- - -	- - -	- - -	- - -	- - -	- - -	275	5^2·11	15	5	**277**	prim	9	14	279	3^2·31	21	9
35	**281**	prim	9	10	5	16	17	2	**283**	prim	11	9	285	3· 5·19	- - -	- - -	287	7·41	17	1
36	289	17^2	1	12	15	8	17	0	291	3·97	17	1	**293**	prim	17	2	295	5·59	- - -	- - -
37	297	3^3·11	3	12	- - -	- - -	- - -	- - -	299	13·23	- - -	- - -	301	7·43	- - -	- - -	303	3·101	- - -	- - -
38	305	5·61	- - -	- - -	7	16	- - -	- - -	**307**	prim	17	3	309	3·103	- - -	- - -	**311**	prim	19	5
39	**313**	prim	5	12	13	12	21	8	315	3^2·5·7	- - -	- - -	**317**	prim	11	14	319	11·29	- - -	- - -
40	321	3·107	11	10	- - -	- - -	- - -	- - -	323	17·19	15	7	325	5^2·13	1	18	327	3·109	- - -	- - -
41	329	7·47	- - -	- - -	- - -	- - -	19	4	**331**	prim	13	9	333	3^2·37	3	18	335	5·67	- - -	- - -
42	**337**	prim	7	12	9	16	25	12	339	3·113	17	5	341	11·31	- - -	- - -	343	7^3	19	3
43	345	3·5·23	- - -	- - -	- - -	- - -	- - -	- - -	**347**	prim	3	13	**349**	prim	5	18	351	3^3·13	- - -	- - -
44	**353**	prim	15	8	17	8	19	2	355	5·71	- - -	- - -	357	3·7·17	- - -	- - -	**359**	prim	19	1
45	361	19^2	17	6	19	0	19	0	363	3·11^2	19	1	365	5·73	19	2	**367**	prim	23	9
46	369	3^2·41	9	12	15	12	21	6	371	7·53	- - -	- - -	**373**	prim	7	18	375	3·5^3	- - -	- - -
47	377	13·29	- - -	- - -	11	16	- - -	- - -	**379**	prim	19	3	381	3·127	- - -	- - -	**383**	prim	25	11
48	385	5·7·11	- - -	- - -	- - -	- - -	- - -	- - -	387	3^2·43	17	7	**389**	prim	17	10	391	17·23	21	5
49	393	3·131	1	14	- - -	- - -	- - -	- - -	395	5·79	- - -	- - -	**397**	prim	19	6	399	3·7·19	- - -	- - -
50	**401**	prim	3	14	1	20	23	8	403	13·31	- - -	- - -	405	3^4·5	9	18	407	11·37	- - -	- - -
51	**409**	prim	11	12	3	20	21	4	411	3·137	19	5	413	7·59	- - -	- - -	415	5·83	- - -	- - -
52	417	3·139	5	14	- - -	- - -	- - -	- - -	**419**	prim	9	13	**421**	prim	15	14	423	3^2·47	21	3
53	425	5^2·17	15	10	5	20	25	10	427	7·61	- - -	- - -	429	3·11·13	- - -	- - -	**431**	prim	23	7
54	**433**	prim	19	6	17	12	21	2	435	3·5·29	- - -	- - -	437	19·23	- - -	- - -	**439**	prim	21	1
55	441	3^2·7^2	7	14	21	0	21	0	**443**	prim	21	1	445	5·89	21	2	447	3·149	- - -	- - -
56	**449**	prim	21	2	7	20	29	14	451	11·41	17	9	453	3·151	- - -	- - -	455	5·7·13	- - -	- - -
57	**457**	prim	13	12	21	4	23	6	459	3^3·17	21	3	**461**	prim	19	10	**463**	prim	25	9
58	465	3·5·31	- - -	- - -	- - -	- - -	- - -	- - -	**467**	prim	15	11	469	7·67	- - -	- - -	471	3·157	- - -	- - -
59	473	11·43	9	14	- - -	- - -	- - -	- - -	475	5^2·19	5	15	477	3^2·53	21	6	**479**	prim	23	5
60	481	13·37	- - -	- - -	9	20	- - -	- - -	483	3·7·23	- - -	- - -	485	5·97	1	22	**487**	prim	27	11
61	489	3·163	17	10	- - -	- - -	- - -	- - -	**491**	prim	21	5	493	17·29	3	22	495	3^3·5·11	- - -	- - -
62	497	7·71	- - -	- - -	- - -	- - -	23	4	**499**	prim	7	15	501	3·167	- - -	- - -	**503**	prim	29	13
63	505	5·101	- - -	- - -	19	12	- - -	- - -	507	3·13^2	13	13	**509**	prim	5	22	511	7·73	23	3
64	513	3^3·19	1	16	- - -	- - -	- - -	- - -	515	5·103	- - -	- - -	517	11·47	- - -	- - -	519	3·173	- - -	- - -
65	**521**	prim	3	16	11	20	23	2	**523**	prim	19	9	525	3·5^2·7	- - -	- - -	527	17·31	23	1
66	529	23^2	23	0	23	0	23	0	531	3^2·59	23	1	533	13·41	23	2	535	5·107	- - -	- - -
67	537	3·179	5	16	- - -	- - -	- - -	- - -	539	7^2·11	21	7	**541**	prim	21	10	543	3·181	- - -	- - -
68	545	5·109	- - -	- - -	17	16	- - -	- - -	**547**	prim	23	3	549	3^2·61	15	18	551	19·29	- - -	- - -
69	553	7·79	- - -	- - -	- - -	- - -	25	6	555	3·5·37	- - -	- - -	**557**	prim	19	14	559	13·43	- - -	- - -
70	561	3·11·17	7	16	- - -	- - -	- - -	- - -	**563**	prim	15	13	565	5·113	23	6	567	3^4·7	27	9
71	**569**	prim	21	8	13	20	31	14	**571**	prim	11	15	573	3·191	- - -	- - -	575	5^2· 23	25	5
72	**577**	prim	17	12	1	24	33	16	579	3·193	23	5	581	7·83	- - -	- - -	583	11·53	- - -	- - -
73	585	3^2·5 13	- - -	- - -	3	24	- - -	- - -	**587**	prim	3	17	589	19·31	- - -	- - -	591	3·197	- - -	- - -
74	**593**	prim	9	16	23	8	25	4	595	5·7·17	- - -	- - -	597	3·199	- - -	- - -	**599**	prim	29	11
75	**601**	prim	23	6	5	24	27	8	603	3^2·67	21	9	605	5·11^2	11	22	**607**	prim	25	3
76	609	3·7·29	- - -	- - -	- - -	- - -	- - -	- - -	611	13·47	- - -	- - -	613	prim	17	18	615	3·5·41	- - -	- - -
77	**617**	prim	15	14	19	16	25	2	**619**	prim	13	15	**621**	3^3·23	- - -	- - -	623	7·89	25	1
78	625	5^4	25	0	7	24	25	0	627	3·11·19	25	1	629	17·37	25	2	**631**	prim	27	7

m	8m+ ·				Typ u				8m+3		Typ q		8m+5		Typ p		8m+7		Typ r	
		u	$= x^2 + 2y^2$		$= x^2 + y^2$		$= x^2 - 2y^2$			q	$= x^2 + 2y^2$			p	$= x^2 + y^2$			r	$= x^2 - 2y^2$	
		·	x	y	x	y	x	y			x	y			x	y			x	y
79	633	3·211	11	16	------		------		635	5·127	------		637	$7^2\cdot13$	21	14	639	$3^2\cdot71$	33	15
80	**641**	prim	21	10	25	4	29	10	**643**	prim	25	3	645	3·5·43	------		**647**	prim	35	17
81	649	11·59	1	18	------		------		651	3·7·31	------		**653**	prim	13	22	655	5·131	------	
82	657	$3^2\cdot73$	3	18	9	24	27	6	**659**	prim	9	17	**661**	prim	25	6	663	3·13·17	------	
83	665	5·7·19	------		------		------		667	23·29	------		669	3·223	------		671	11·61	------	
84	**673**	prim	5	18	23	12	31	12	675	$3^3\cdot5^2$	25	5	**677**	prim	1	26	679	7·97	27	5
85	681	3·227	13	16	------		------		**683**	prim	21	11	685	5·137	3	26	687	3·229	------	
86	689	13·53	------		17	20	------		**691**	prim	23	9	693	$3^2\cdot7\cdot11$	------		695	5·139		
87	697	17·41	7	18	11	24	27	4	699	3·233	19	13	**701**	prim	5	26	703	19·37	------	
88	705	3·5·47	------		------		------		707	7·101	------		**709**	prim	15	22	711	3^2 79	27	3
89	713	23·31	------		------		29	8	715	5·11·13	------		717	3·239	------		**719**	prim	31	11
90	721	7·103	------		------		27	2	723	3·241	25	7	725	$5^2\cdot29$	7	26	**727**	prim	77	51
91	729	3^6	9	18	27	0	27	0	731	17·43	27	1	**733**	prim	27	2	735	$3\cdot5\cdot7^2$	------	
92	737	11·67	15	16	------		------		**739**	prim	17	15	741	3·13·19	------		**743**	prim	29	7
93	745	5·149	------		13	24	------		747	$3^2\cdot83$	27	3	749	7·107	------		**751**	prim	33	13
94	753	3·251	19	14	------		------		755	5·151	------		**757**	prim	9	26	759	3·11·23	------	
95	**761**	prim	27	4	19	20	31	10	763	7·109	------		765	$3^2\cdot5\cdot17$	27	6	767	13·59	------	
96	**769**	prim	11	18	25	12	29	6	771	3·257	23	11	**773**	prim	17	22	775	$5^2\cdot31$	35	15
97	777	3·7·37	------		------		------		779	19·41	27	5	781	11·71	------		783	$3^3\cdot29$	------	
98	785	5·157	------		1	28	------		**787**	prim	25	9	789	3·263	------		791	7·113	29	5
99	793	13·61	------		3	28	------		795	3·5·53	------		**797**	prim	11	26	799	17·47	31	9
100	801	$3^2\cdot89$	1	20	15	24	33	12	803	11·73	15	17	805	5·7·23	------		807	3·269	------	
101	**809**	prim	3	20	5	28	29	4	**811**	prim	19	15	813	3·271	------		815	5·163	------	
102	817	19·43	------		------		------		819	$3^2\cdot7\cdot13$	------		**821**	prim	25	14	**823**	prim	29	3
103	825	$3\cdot5^2\cdot11$	------		------		------		**827**	prim	27	7	**829**	prim	27	10	831	3·227	------	
104	833	$7^2\cdot17$	21	14	7	28	29	2	835	5·167	------		837	$3^3\cdot31$	------		**839**	prim	29	1
105	841	29^2	29	0	21	20	29	0	843	3·281	11	19	845	$5\cdot13^2$	29	2	847	$7\cdot11^2$	33	11
106	849	3·283	7	20	------		------		851	23·37	------		**853**	prim	23	18	855	$3^2\cdot5\cdot19$	------	
107	**857**	prim	27	8	29	4	37	16	**859**	prim	29	3	861	3·7·41	------		**863**	prim	31	7
108	865	5·173	------		9	28	------		867	$3\cdot17^2$	25	11	869	11·79	------		871	13·67	------	
109	873	$3^2\cdot97$	15	18	27	12	39	18	875	$5^3\cdot7$	------		**877**	prim	29	6	879	3·293	------	
110	**881**	prim	9	20	25	16	41	20	**883**	prim	1	21	885	3·5·59	------		**887**	prim	35	13
111	889	7·127	------		------		31	6	891	$3^4\cdot11$	29	5	893	19·47	------		895	5·179	------	
112	897	3·13·23	------		------		------		899	29·31	------		901	17·53	1	30	903	3·7·43	------	
113	905	5·181	------		11	28	------		**907**	prim	5	21	909	$3^2\cdot101$	3	30	**911**	prim	31	5
114	913	11·83	------		------		------		915	3·5·61	------		917	7·131	------		**919**	prim	37	15
115	921	3·307	11	20	------		------		923	13·71	------		925	$5^2\cdot37$	5	30	927	$3^2\cdot103$	33	9
116	**929**	prim	27	10	23	20	31	4	931	$7^2\cdot19$	7	21	933	3·311	------		935	5·11·17	------	
117	**937**	prim	17	18	19	24	35	12	939	3·313	29	7	**941**	prim	29	10	943	23·41	31	3
118	945	$3^3\cdot5\cdot7$	------		------		------		**947**	prim	15	19	949	13·73	7	30	951	3·317	------	
119	**953**	prim	21	16	13	28	31	2	955	5·191	------		957	3·11·29	------		959	7·137	31	1
120	961	31^2	31	0	31	0	31	0	963	$3^2\cdot107$	31	1	965	5·193	31	2	**967**	prim	43	21
121	969	3·17·19	1	22	------		------		**971**	prim	27	11	973	7·139	------		975	$3\cdot5^2\cdot13$	------	
122	**977**	prim	3	22	31	4	37	14	979	11·89	31	3	981	$3^2\cdot109$	9	30	**983**	prim	35	11
123	985	5·197	------		27	16	------		987	3·7·47	------		989	23·43	------		**991**	prim	33	7
124	993	3·331	5	22	------		------		995	5·199	------		**997**	prim	31	6	999	$3^3\cdot37$	------	

Für den Typus "p" mit den Resten 5 und zugleich für die eine Darstellung für den Typus "u" gilt der schöne, im Wesentlichen schon Fermat bekannte Zwei-Quadrate-Satz betreffend die Lösbarkeit von $x^2 + y^2 = n$ mit $n \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{N}_0$.

Sei n eine Primzahl p:

Die (einzige gerade) Primzahl 2 hat die Darstellung $2 = 1^2 + 1^2$

Jede Primzahl $p \equiv 1 \bmod 4$ besitzt eine (bis auf die Vertauschung von x und y) eindeutige Darstellung $p = x^2 + y^2$.

$p \equiv 3 \bmod 4$ hat keine Lösungen.

$p \equiv 2 \bmod 4$ oder $p \equiv 0 \bmod 4$ ist nicht möglich für Primzahlen $p > 2$.

Es gilt auch die Umkehrung: Wenn p darstellbar ist durch $p = x^2 + y^2$, dann ist $p \equiv 1 \bmod 4$.

Sei $n > 2$ keine Primzahl, $n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot p_3^{e_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}$.

Dann gilt: n ist dann und nur dann als Summe zweier Quadrate darstellbar, $n = x^2 + y^2$, wenn jeder Primfaktor p_i von n, der $\equiv 3 \bmod 4$ ist, einen geradzahligen Exponenten e_i besitzt.

Beweis: siehe Aigner – Ziegler [2003], Proofs from the BOOK, 3th edition, Seite17 ff

Beispiele Primzahlen $p \equiv 1 \bmod 4$: $5 = 2^2 + 1^2$; $13 = 3^2 + 2^2$; $17= 4^2 + 1^2$; … $997 = 31^2 + 6^2$

Beispiele Nichtprimzahlen, alle Primfaktoren $p_i \equiv 3 \bmod 4$ mit geradem Exponenten:
$3^2 = 9 = 3^2 + 0^2$; dagegen $3^2 \cdot 11 = 99$ = keine, aber $3^2 \cdot 13 = 117 = 9^2 + 6^2$; $3^2 \cdot 5^2 = 225 = 12^2 + 9^2$;
$7^2 = 49 = 7^2 + 0^2$

Vom wechselseitigen Verhältnis typusspezifischer Primzahlen

Typisch für Glöcklers Vorgehen ist dann die Beobachtung, dass die Summe von 3, 5, 7 Primzahlen des einen Typus eine Primzahl eines anderen Typus ergibt:

Beispiele 3 u-Primzahlen: 17 + 41 + 73 = 131 – eine q-Zahl
und 3 q-Primzahlen: 11 + 19 + 43 = 73 – eine u-Zahl

oder 3 p-Primzahlen: 5 + 13 + 29 = 47 – eine r-Zahl
und 3 r-Primzahlen: 7 + 23 + 31 = 61 – eine p-Zahl

Beispiele 5 u-Primzahlen: 17 + 41 + 73 + 89 + 97 = 317 – eine p-Zahl
und 5 p-Primzahlen: 5 + 13 + 29 + 37 + 53 = 137 – eine u-Zahl

oder 5 q-Primzahlen 11 + 19 + 43 + 59 + 67 = 199 – eine r-Zahl
und 5 r-Primzahlen: 7 + 23 + 31 + 47 + 71 = 179 – eine q-Zahl

Dass das richtig ist, ist fast trivial:
u-Zahlen sind $\equiv 1$, also ist die Summe von 3 solcher Zahlen $\equiv 3 \cdot 1 = 3$, das Ergebnis also eine q Zahl und umgekehrt die Summe von 3 q-Zahlen $\equiv 3 \cdot 3 \equiv 1$, also eine u-Zahl.
Allerdings ist die Summe nicht immer wieder eine Primzahl, wohl aber hat sie den passenden 8er-Rest.

Es lässt sich leicht verallgemeinern:

Für die Anzahl 3: $3 \cdot 1 \equiv 3$ und $3 \cdot 3 \equiv 1$, also ergeben 3 u-Zahlen eine q-Zahl und 3 q-Zahlen eine u-Zahl.
und: $3 \cdot 5 \equiv 7$ und $3 \cdot 7 \equiv 5$, also ergeben 3 p-Zahlen eine r-Zahl und 3 r-Zahlen eine p-Zahl.
Für die Anzahl 5: $5 \cdot 1 \equiv 5$ und $5 \cdot 5 \equiv 1$, also ergeben 5 u-Zahlen eine p-Zahl und 5 p-Zahlen eine u-Zahl.
und: $5 \cdot 3 \equiv 7$ und $5 \cdot 7 \equiv 3$, also ergeben 5 q-Zahlen eine u-Zahl und 5 u-Zahlen eine q-Zahl.
Für die Anzahl 7: $7 \cdot 1 \equiv 7$ und $7 \cdot 7 \equiv 1$, also ergeben 7 u-Zahlen eine r-Zahl und 7 r-Zahlen eine u-Zahl.
und: $7 \cdot 5 \equiv 3$ und $7 \cdot 3 \equiv 5$, also ergeben 7 p-Zahlen eine q-Zahl und 7 q-Zahlen eine p-Zahl.
Für die Anzahl 9: $9 \cdot 1 \equiv 1$, also ergeben 9 u-Zahlen wieder eine u-Zahl.
und: entsprechend für die anderen Typen: Die Summe von 9 Zahlen eines Typus ist vom selben Typus.

Danach wiederholt sich alles modulo 8.