Zwei Bemerkungen zu Kettenbrüchen

Bekanntlich sind Kettenbrüche das optimale Hilfsmittel um "bestmögliche" rationale Näherungswerte mit kleinen Nennern von komplizierten Brüchen oder von irrationalen Zahlen aufzufinden. Diese Anwendung war auch der Ausgangspunkt für die Mathematiker des 17. Jahrhunderts, sich damit zu beschäftigen. Hier verwendet Glöckler die Kettenbrüche, um die musikalischen Intervalle möglichst einfach zahlenmäßig beschreiben zu können. Ansonsten treten sie bei ihm bei der bekannten Lösungsmethode für die Pellsche Gleichung $x^2 - dy^2 = \pm 1$, $d > 0$ ganz, auf. Sicherlich hat sich Glöckler auch deshalb so intensiv mit ihr und ähnlichen Fragestellungen beschäftigt, weil die dazu benötigte Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d}$ periodisch ist. Hier tritt somit ein rhythmisches Element zutage und Rhythmus in all seinen Ausprägungen war ein Generalthema seiner Forschungen.

Diese Besonderheit der Kettenbruchentwicklung quadratischer Irrationalzahlen kann auch in didaktischer Hinsicht von Interesse sein. Kinder können sich an der Division zweier natürlicher Zahl erfreuen, wenn sie bemerken, dass immer eine periodische (oder eine abbrechende) Dezimalbruchentwicklung herauskommt. Ein Gleiches gilt nach dem Satz von Lagrange für die Kettenbruchentwicklung beliebiger Zahlen der Gestalt $\frac{a+b\sqrt{d}}{n}$, $a, b, n \neq 0$ ganzzahlig. Überraschend dabei ist, dass man dazu nur eine simple Abschätzung kennen und das Rationalmachen des Nenners beherrschen muss, um die Kettenbruchentwicklung und damit beliebig genaue Näherungen zu erhalten. Beispielsweise gilt für $\sqrt{3}$ offensichtlich $1 < \sqrt{3} < 2$, somit beginnt das Verfahren mit $\sqrt{3} = 1 + (\sqrt{3} - 1)$. Nun ist $\frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$. Da der Zähler zwischen 2 und 3 liegt, folgt weiter $\frac{\sqrt{3}+1}{2} = 1 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Im nächsten Schritt ergibt sich $\frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}+1 = 2+(\sqrt{3}-1)$ und der hier auftretende Rest ist gerade der vom Beginn. Die Kettenbruchentwicklung lautet somit $\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, ...]$. Die ersten Näherungsbrüche, die man auch ohne Algorithmus leicht berechnen kann, lauten: $1, 2, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{19}{11}, \frac{26}{15}, \frac{71}{41}, ...$. Es zeigt sich hier ein "Selbstläufer", ein gewissermaßen von alleine ablaufendes elementares Verfahren, um derartige quadratische Irrationalzahlen "bestmöglich" anzunähern. (Eindrücklicher sind Zahlen mit schneller konvergierenden Näherungsbrüchen, etwa $\frac{6+\sqrt{42}}{4} = [3; 8, 3, 8, ...]$.)

Auch vom epistomologischen Gesichtspunkt aus sind Kettenbrüche bedeutsam. Es besitzt bekanntlich jede reelle Zahl eine eindeutige Kettenbruchentwicklung (bei abbrechender Entwicklung ist ähnlich wie bei abbrechender Dezimalbruchentwicklung eine simple Zusatzbedingung nötig). Damit sind Ketten- und Dezimalbruchentwicklung völlig gleichwertige Darstellungen. Ein und dieselbe reelle Zahl lässt sich also ganz unterschiedlich beschreiben. Dieses Phänomen tritt in der Mathematik immer wieder auf, etwa bei den komplexen Zahlen (arithmetische, goniometrische, Exponentialform) oder bei der punkt- bzw. ebenenhaften Beschreibung geometrischen Körper. Das ist ein deutlicher Hinweis darauf, dass auch bei außermathematischen Sachverhalten verschiedene Sichtweisen ihre Berechtigung haben, ja notwendig für ein tieferes Verständnis sind.

Auffallend sind die unterschiedlichen Eigenschaften von Dezimal- und Kettenbruchentwicklung. Bei ersterer Darstellung kann man problemlos die vier Grundrechenarten ausführen, was bei letzterer unmöglich ist. Einzig das Inverse einer reellen Zahl lässt sich in diesem Fall sofort angeben. Dafür offenbaren sich bei der zweiten Darstellung oftmals Gesetzmäßigkeiten, die wiederum bei der ersten fehlen. Beispielsweise hat die transzendente Zahl e die Kettenbruchentwicklung $e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, ...]$. Bei dieser Darstellungsart kann man somit den qualitativen Eigenschaften mancher irrationaler Zahlen näherkommen.

G. Kowol