

Folgen von pythagoräischen Quadrupeln

Einführung:

Gilt für zunächst irgendwelche natürlichen Zahlen x_n, y_n, z_n, t_n , die Beziehung

$$x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 = t_n^2$$

so nennen wir x_n, y_n, z_n, t_n ein pythagoräisches Zahlenquadrupel oder kurz Quadrupel. Ist überdies der grösste gemeinsame Teiler aller 4 natürlichen Zahlen gleich 1, so nennen wir das Quadrupel primitiv in allen anderen Fällen imprimitiv.

Sind irgend 3 natürliche Zahlen p, q, r gegeben, dann lässt sich daraus aufgrund der folgenden 4 Beziehungsgleichungen ein pythagoräisches Zahlenquadrupel bestimmen:

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad x = 2qr \\ \quad y = 2pq \\ \quad z = p^2 + r^2 - q^2 \\ \quad t = p^2 + r^2 + q^2 \end{array} \quad \text{mit} \quad x^2 + y^2 + z^2 = t^2$$

Diese Beziehungsgleichungen lassen sich - einmal gefunden - leicht durch ausrechnen beweisen. Man erhält so primitive als auch imprimitive Quadrupel. Aus den letzteren erhält man aber stets primitive Basis-Quadrupel indem man durch den grössten gemeinsamen Teiler dividiert. Dies zeigt folgendes Beispiel:

$$\begin{array}{l} 12^2 + 18^2 + 36^2 = 42^2 \\ 2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2 \end{array} \quad \text{g.g.T.} = 6$$

Ist in den Gleichungen I speziell $r = 0$, so ergeben sich pythagoräische Zahlentripel, für die $x = 0$ ist.

Zur einführenden Erklärung zwei Beispiele:

1.) für $p = 3, q = 5$ und $r = 9$ ist

$$\begin{array}{l} x = 2qr = 90 \\ y = 2pq = 30 \\ z = p^2 + r^2 - q^2 = 9 + 81 - 25 = 65 \\ t = p^2 + r^2 + q^2 = 9 + 81 + 25 = 115 \\ 90^2 + 30^2 + 65^2 = 115^2 \end{array}$$

Dieses Quadrupel ist imprimitiv mit dem grössten gemeinsamen Teiler 5, woraus das primitive Quadrupel

$$18^2 + 6^2 + 13^2 = 23^2$$

folgt.

2.) für $p = 1, q = 3$ und $r = 5$ ist

$$\begin{array}{l} x = 2qr = 30 \\ y = 2pq = 6 \\ z = p^2 + r^2 - q^2 = 17 \\ t = p^2 + r^2 + q^2 = 35 \\ 30^2 + 6^2 + 17^2 = 35^2 \end{array}$$

Dieses Quadrupel ist primitiv, weil der grösste gemeinsame Teiler gleich 1 ist.

Spezielle Folgen von pythagoräischen Quadrupeln

Solche folgen ergeben sich dadurch, dass die Zahlen p, q, und r Funktionen von n sind. wir untersuchen im folgenden verschiedene solcher Folgen indem wir ihren Anfang für $n = 0, 1, 2 \dots$ in einer Art Schema rubrizieren:

$$\text{Es sei} \quad p = 2n^2 \quad q = 2n \quad r = 2n - 1$$

Dann ist

(1)	$n =$	0	1	2	3	4	5	6	
	$x_n = 4n(2n - 1)$	0	4	24	60	112	180	264	
	$y_n = 8n^3$	0	8	64	216	512	1000	1728	□
	$z_n = 4n^4 - 4n + 1$	1	1	57	313	1009	2481	5161	
	$t_n = 4n^4 + 8n^2 - 4n + 1$	1	9	89	385	1137	2681	5449	

Hier sind alle Folgenglieder primitive Quadrupel.

$$\text{Es sei} \quad p = 2n^2 - 1 \quad q = 2n - 1 \quad r = 2n^2 + 1$$

Dann ist

(2)	$n =$	0	1	2	3	4	5	6	
	$x_n = 2(2n-1)(2n^2 + 1)$	-2	6	54	190	462	918	1606	
	$y_n = 2(2n-1)(2n^2 - 1)$	2	2	42	170	434	882	1562	□
	$z_n = 8n^4 - 4n^2 + 4n + 1$	1	9	121	625	2001	4921	10248	
	$t_n = 8n^4 + 4n^2 - 4n + 3$	3	11	139	675	2099	5083	10491	

Bei dieser Folge ist nur das Quadrupel der 4. Spalte imprimitiv mit dem grössten gemeinsamen Teiler 5, d.h. aus dem imprimitiven Quadrupel

$$190^2 + 170^2 + 625^2 = 675^2$$

folgt das primitive Quadrupel

$$38^2 + 34^2 + 125^2 = 135^2$$

$$\text{Es sei} \quad p = n \quad q = 2n^2 - 1 \quad r = 2n - 1$$

Dann ist

(3)	$n =$	0	1	2	3	4	5	
	$x_n = 2(2n-1)(2n^2 - 1)$	2	2	42	170	434	882	
	$y_n = 2n(2n^2 - 1)$	0	2	28	102	248	490	□
	$z_n = 4n^4 + 9n^2 - 4n$	0	1	36	-255	-896	-2295	
	$t_n = 4n^4 + n^2 - 4n + 2$	2	3	62	323	1026	2507	

Bei dieser Folge wechseln in den Spalten imprimitive und primitive Quadrupel. Aus den imprimitiven Quadrupeln mit dem grössten gemeinsamen Teiler 2 ergeben sich die primitiven Quadrupel wie folgt:

$$\begin{array}{l} 2^2 + 0^2 + 0^2 = 2^2 \quad \cancel{-2} \quad 1^2 + 0^2 + 0^2 = 1^2 \\ 42^2 + 28^2 + (-36)^2 = 62^2 \quad \cancel{-2} \quad 21^2 + 14^2 + 18^2 = 31^2 \\ 434^2 + 248^2 + (-896)^2 = 1026^2 \quad \cancel{-2} \quad 217^2 + 124^2 + 448^2 = 513^2 \end{array}$$

etc.

$$\text{Es sei} \quad p = n \quad q = n^2 - 1 \quad r = 2n$$

Dann ist

n =	0	1	2	3	4	5	
x _n = 4n ³	0	4	32	108	256	500	
y _n = 2n ³	0	2	16	54	128	250	□
z _n = 5n ² - n ⁴	0	4	4	-36	-176	-500	
t _n = 5n ² + n ⁴	0	6	36	126	336	750	

Die Folgenglieder dieser Quadrupelfolge sind alle imprimitiv und zwar mit verschiedenen grössten gemeinsamen Teilern:

$$\begin{array}{l}
 4^2 + 2^2 + 4^2 = 6^2 \quad \cancel{2} \qquad 2^2 + 1^2 + 2^2 = 3^2 \\
 32^2 + 16^2 + 4^2 = 36^2 \quad \cancel{4} \qquad 8^2 + 4^2 + 1^2 = 9^2 \\
 108^2 + 54^2 + (-36)^2 = 126^2 \quad \cancel{18} \qquad 6^2 + 3^2 + \quad = 7^2 \\
 256^2 + 128^2 + (-176)^2 = 336^2 \quad \cancel{16} \qquad 16^2 + 8^2 + 11^2 = 21^2 \\
 500^2 + 250^2 + (-500)^2 = 750^2 \quad \cancel{250} \qquad 2^2 + 1^2 + 2^2 = 3^2 \\
 \text{etc.}
 \end{array}$$

Es sei $p = n$ $q = 1$ $r = 2$

Dann ist

n =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
x _n = 4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	
y _n = 2n	0	2	4	6	8	10	12	14	16	□
z _n = n ² + 3	3	4	7	12	19	28	39	52	67	
t _n = n ² + 5	5	6	9	14	21	30	41	54	69	

Bei dieser Folge wechseln wieder primitive und imprimitive Quadrupel in den einzelnen Spalten. Dabei ergibt sich wie oben.

$$\begin{array}{l}
 4^2 + 2^2 + 4^2 = 6^2 \quad \cancel{2} \qquad 2^2 + 1^2 + 2^2 = 3^2 \\
 4^2 + 6^2 + 12^2 = 14^2 \quad \cancel{2} \qquad 2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2 \\
 4^2 + 10^2 + 28^2 = 30^2 \quad \cancel{2} \qquad 2^2 + 5^2 + 14^2 = 15^2 \\
 4^2 + 14^2 + 52^2 = 54^2 \quad \cancel{2} \qquad 27^2 + 7^2 + 26^2 = 27^2 \\
 \text{etc.}
 \end{array}$$

Bemerkenswert bei dieser Folge ist das konstante Glied x_n = 4 und die konstante Differenz t_n - z_n = 2

Es sei $p = n$ $q = n + 1$ $r = n(n + 1)$

sodass gilt $p^2 + q^2 + r^2 = n(n + 1) + 1n^2$

Dann ist

n =	0	1	2	3	4	5	
x _n = 2n(n + 1) ²	0	8	36	96	200	360	
y _n = 2n(n + 1)	0	4	12	24	40	60	□
z _n = n ⁴ + 2n ³ + n ² - 2n + 1	1	1	31	137	391	889	
t _n = n(n + 1) + 1 ⁰	1	3 ²	7 ²	13 ²	21 ²	31 ²	

Hier stehen in allen Spalten bemerkenswerte primitive Quadrupel:

$$\begin{aligned}
 1^4 &= 0^2 + 0^2 + 1^2 \\
 3^4 &= 8^2 + 4^2 + 1^2 \\
 7^4 &= 36^2 + 12^2 + 31^2 \\
 13^4 &= 96^2 + 24^2 + 137^2
 \end{aligned}$$

Es sei $p = 1$ $q = 2n$ $r = 2n^2$

sodass gilt $p^2 + q^2 + r^2 = (2n^2 + 1)^2$

Dann ist

n =	0	1	2	3	4	5	...	8
x _n = 8n ³	0	8	64	216	512	1000	...	8 ⁴
y _n = 4n	0	4	8	12	24	20	...	32
z _n = (2n ² - 1) ²	1	1 ²	7 ²	17 ²	31 ²	49 ²	...	127 ²
t _n = (2n ² + 1) ²	1	3 ²	9 ²	19 ²	33 ²	51 ²	...	129 ²

In den Spalten stehen jeweils primitive Quadrupel. Bemerkenswert sind die Spalten 5 und 8:

$$\begin{aligned}
 33^4 &= 31^4 + 2^4 + 2 \cdot 4^4 \\
 129^4 &= 127^4 + 2 \cdot 2^4 + 8^4
 \end{aligned}$$

Mit diesen Beispielen wollen wir es hier bewenden lassen und nur noch auf weitere Möglichkeiten aufmerksam machen:

1. Bemerkung: für r = 0 ergeben sich im allgemeinen Folgen von pythagoräischen Tripeln.

Es sei z.B. $p = n$ $q = 2n^2$

Dann ist

n =	0	1	2	3	4	5	
x _n = 0	0	0	0	0	0	0	
y _n = 4n ³	0	4	32	108	256	500	□
z _n = n ² - 4n ⁴	0	-3	-60	-315	-1008	-2475	
t _n = n ² + 4n ⁴	0	5	68	333	1040	2525	

Abgesehen von den ersten beiden Spalten ergeben sich stets imprimitive pythagoräische Zahlentripel, deren primitive Basistripel aber leicht erkennbar sind:

$$\begin{aligned}
 32^2 + 60^2 &= 68^2 & \vec{4} & & 8^2 + 15^2 &= & 17^2 \\
 108^2 + 315^2 &= 333^2 & \vec{9} & & 12^2 + 35^2 &= & 37^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl}
 256^2 + 1008^2 = 1040^2 & \overrightarrow{16} & 16^2 + 63^2 = 65^2 \\
 500^2 + 2475^2 = 2525^2 & \overrightarrow{25} & 20^2 + 99^2 = 101^2 \\
 & \text{etc.} &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{allgemein:} \quad (4n)^2 + 4n^2 - 1)^2 = (4n^2 + 1)^2 \\
 \text{für } n = 1, 2, 3 \dots
 \end{array}$$

2. Bemerkung:

Sind p, q und r irgendwelche zunächst positive rationale Zahlen, so führt eine entsprechende Rechnung auf das Folgende:

$$\text{Wir wählen ein Beispiel: } p = 1 \quad q = \frac{1}{2} \quad r = \frac{2}{3}$$

Dann ist

$$x = \frac{2}{3}$$

$$y = 1$$

$$z = 1 + \frac{4}{9} - \frac{1}{4} = \frac{43}{36}$$

$$t = 1 + \frac{4}{9} + \frac{1}{4} = \frac{61}{36}$$

und weiter

$$\begin{aligned}
 y^2 + z^2 &= \frac{4}{9} + 1 + \frac{43^2}{36^2} \\
 &= \frac{24^2 + 36^2 + 43^2}{36^2} = \frac{61^2}{36^2}
 \end{aligned}$$

Wir erhalten also auch für rationale p, q und r pythagoräische Zahlenquadrupel. In diesem Fall auf mehr indirektem Weg das Quadrupel

$$24^2 + 36^2 + 43^2 = 61^2$$

Natürlich kann man mit dieser Methode auch Quadrupelfolgen bilden, z.B. für

$$p = \frac{1}{n^2-1} \quad q = n^2 \quad r = \frac{1}{n^2-1} \quad (n \neq 1)$$

Die zugehörige Rechnung gestaltet sich aber für diesen Fall recht kompliziert.
