Gleichungen von Quadratsummen

Bemerkungen zum Nachlass von Georg Glöckler

Peter Baum

1 Fundamentalbeziehungen

Zusammenfassung. In den Nachlasspapieren finden sich zahlreiche Tabellen mit konkreten Gleichungen von Quadratsummen. Vermutlich hat Glöckler sie empirisch gefunden, jedenfalls finden sich jeweils keine Hinweise auf ihre Genesis. Im Manuskript Nr. 164 „Zahlenphänomene und Gesetze im Bereich von Quadratsummen“ hat er dargestellt, welche wesentliche Eigenschaft einiger Gleichungen von Quadratsummen dazu führt, dass man aus ihr weitere Gleichungen generieren kann

Diese Eigenschaft nannte er „Fundamentalbeziehung“. Sie besteht darin, dass auch die Summen der Basiszahlen einander gleich sind:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 &= e^2 + f^2 + g^2 + h^2 \\ a + b + c + d &= e + f + g + h \end{aligned} \tag{1}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} 1^2 + 6^2 + 9^2 + 12^2 &= 2^2 + 5^2 + 8^2 + 13^2 &&= 262 \\ 1 + 6 + 9 + 12 &= 2 + 5 + 8 + 13 &&= 28 \end{aligned}$$

Wir wollen in diesem Artikel Gleichheiten von Quadratsummen, die einer Fundamentalbeziehung genügen, systematisch untersuchen.

Glöckler bemerkte, dass jede solche Identität von Quadratsummen mit der Fundamentalbeziehung einen Keim darstellt von unendlich vielen weiteren Identitäten dieser Art. Aus (1) folgt nämlich

$$\begin{aligned} (\mu a+\lambda)^2 + (\mu b+\lambda)^2 + (\mu c+\lambda)^2 + (\mu d+\lambda)^2 &= (\mu e+\lambda)^2 + (\mu f+\lambda)^2 + (\mu g+\lambda)^2 + (\mu h+\lambda)^2 \\ (\mu a+\lambda) + (\mu b+\lambda) + (\mu c+\lambda) + (\mu d+\lambda) &= (\mu e+\lambda) + (\mu f+\lambda) + (\mu g+\lambda) + (\mu h+\lambda) \end{aligned} \tag{2}$$

für ganze Zahlen μ, λ, wie man durch Nachrechnen leicht sieht. Für jedes μ und jedes λ liefert (2) weitere GLeichungen von Quadratsummen, wobei (μ/λ) auch so gewählt werden können, dass ein Summand Null wird.

Ist man zunächst von der Fülle solcher Gleichungen in Glöcklers Papieren überrascht (siehe z.B. die Tabellen 1 auf Seite 9, 3 auf Seite 12), so zeigt doch die allgemeine Betrachtung in der Tat die Vielfältigkeit dieser Beziehungen. Diese Eigenschaft der Fundamentalbeziehung, einen Keim für weitere Gleichungsfolgen zu liefern, ist wohl eine Entdeckung von Georg Glöckler.

1.1 Zwei Summanden

Zunächst überzeugen wir uns davon, dass es solche nichttrivialen Fundamentalbeziehungen mit nur zwei Summanden auf jeder Seite nicht gibt. Angenommen, es sei

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 + d^2 \\ a + b &= c + d \end{aligned}$$

Dann ist auch

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= (c+d)^2 \\ a^2 + 2ab + b^2 &= c^2 + 2cd + d^2 \\ ab &= cd \\ ab &= c\,(a+b-c) \\ a\,(b-c) &= c\,(b-c) \\ (a-c)\,(b-c) &= 0 \end{aligned}$$

und es folgt entweder $a = c$ und somit auch $b = d$, oder $b = c$ und $a = d$, also jeweils der triviale Fall

$$a^2 + b^2 = a^2 + b^2$$

1.2 Zwei und drei Summanden

1.2.1 Aufeinanderfolgende Basiszahlen

Im Nachlass von Georg Glöckler sind mehrere Folgen von Gleichungen zu finden, welche die Gestalt

$$A^2 + B^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{3}$$
$$A + B = x + y + z \tag{4}$$

haben, mit der Fundamentalbeziehung (4), wobei A, B, x, y, z ganze Zahlen sind.

Dabei wurden manchmal zusätzliche Bedingungen gestellt, z.B. $B = A + 1$, oder $B = A + 2$, oder $x = 1$, oder A und B sind Primzahlzwillinge usw. Glöckler hat mehrere Formeln für solche Identitäten angegeben, z.B.

$$\left(n^2\right)^2 + \left(n^2+1\right)^2 = 1^2 + \left(n^2-n\right)^2 + \left(n^2+n\right)^2$$

Es ist nicht nachzuvollziehen, wie er die Formeln gefunden hat.

Wir wollen nun die möglichen Ausprägungen dieser Quadratsummenformen berechnen. Dabei gehen wir von dem allgemeinen Ansatz (3) mit der Fundamentalbeziehung (4) aus, setzen aber $A = a$ und $B = a + b$.
Es sei also

$$\begin{aligned} a^2 + (a+b)^2 &= x^2 + y^2 + z^2 & 2a + b &= x + y + z \\ 2a^2 + 2ab + b^2 &= x^2 + y^2 + z^2 & 2a &= x + y + z - b \\ 4a^2 &= 2\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - 4ab - 2b^2 & 4a^2 &= (x+y+z)^2 - 2b\,(x+y+z) + b^2 \end{aligned}$$

und daraus folgt mit $4ab + 2b^2 = 2b\,(x + y + z)$

$$\begin{aligned} 2\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - 4ab - 2b^2 &= (x+y+z)^2 - 2b\,(x+y+z) + b^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 2\,(xy + yz + zx) + b^2 \\ [z - (x+y)]^2 &= 4xy + b^2 \\ z_{1,2} &= x + y \pm \sqrt{4xy + b^2} \end{aligned}$$

Da es sich stets um ganze Zahlen handelt, muss die Diskriminante eine Quadratzahl sein:

$$\begin{aligned} q^2 &= 4xy + b^2 \\ (q-b)\,(q+b) &= 4xy \end{aligned}$$

Wir setzen o.B.d.A. $y = n \cdot \nu$ und erhalten, da mindestens einer der beiden Faktoren $(q - b)$ und $(q + b)$ eine gerade Zahl sein muss, und folglich wegen $2q = (q - b) + (q + b)$ auch der andere Faktor gerade sein muss, aus $(q - b)\,(q + b) = 4xn\nu$ die beiden Fälle:[1]

$$\begin{array}{ll} \text{1.} & \text{2.} \\ q + b = 2\nu & q + b = 2xn \\ q - b = 2xn & q - b = 2\nu \\ \quad b = \nu - xn & \quad b = xn - \nu \\ \quad q = \nu + xn & \quad q = \nu + xn \end{array}$$

Daraus folgt

$$\begin{array}{ll} z_1 = x + n\nu + \nu + xn & z_1 = x + n\nu + \nu + xn \\ a_1 = x + n\nu + xn & a_1 = x + n\nu + \nu \\ z_2 = x + n\nu - \nu - xn & z_2 = x + n\nu - \nu - xn \\ a_2 = x + n\nu - \nu & a_2 = x + n\nu - xn \end{array}$$

[1] Dieser Lösungsansatz beruht auf einem Hinweis von Albrecht Häberlein.

und wir erhalten in beiden Fällen die Identitäten

$$[(n+1)\,x+n\nu]^2+[x+(n+1)\,\nu]^2=x^2+(n\nu)^2+[(n+1)\,(x+\nu)]^2 \tag{5}$$
$$[x+(n-1)\,\nu]^2+[(1-n)\,x+n\nu]^2=x^2+(n\nu)^2+[(1-n)\,(x-\nu)]^2 \tag{6}$$

Jede dieser Identitäten enthält drei Variablen. Da irgend zwei der drei Variablen durch beliebige natürliche Zahlen ersetzt werden können, ergibt sich aus den Identitäten (5) und (6) eine unübersehbare Vielfalt von Quadratsummenfolgen, die jeweils der Fundamentalbeziehung genügen. Und für jede Quadratsummengleichung (3) mit der Bedingung (4) gibt es natürliche Zahlen x, n und ν, die in einer der Gleichungen eingesetzt diese Quadratsummengleichung liefern.

Beispiel:

Es ist $23^2+27^2=3^2+15^2+32^2$. Aus $x=3$ und $n\cdot\nu=15$ folgt

$$\begin{aligned}(n+1)\,x+n\nu&=3n+3+15 \\ &=3n+18\end{aligned} \qquad \begin{aligned}x+(n+1)\,\nu&=3+15+\nu \\ &=18+\nu\end{aligned}$$

und für $n=3$und $\nu=5$ erhält man das gewünschte Ergebnis.

Ist z.B. $b=1$, so ist $\nu=1+nx$ und daher

$$\begin{aligned}(n+1)\,x+n\nu&=(n+1)\,x+n+n^2x \\ (n+1)\,x+n\nu&=n+\left(n^2+n+1\right)x\end{aligned} \qquad \begin{aligned}(n+1)\,(x+\nu)&=(n+1)\,(x+nx+1) \\ (n+1)\,(x+\nu)&=(n+1)\,[(n+1)\,x+1]\end{aligned}$$

und die Gleichung (5) lautet dann

$$\left[n+\left(n^2+n+1\right)x\right]^2+\left[n+\left(n^2+n+1\right)x+1\right]^2=x^2+[n\,(1+nx)]^2+[(n+1)\,[(n+1)\,x+1]]^2$$

Ersetzt man hier n durch $n-1$ und x durch $1+\nu$, erhält man die Formel aus „Eine Quadratsumme ist gleich einer Tripelsumme.doc“ aus dem Nachlass von Georg Glöckler, und damit alle Folgen aus Teil A dieser Datei.

Die Folgen aus Teil B dieser Datei gewinnt man aus (5) durch geeignete Wahl von x und ν.

Zwei Beispiele:

1. $x=1$ und $\nu=1$, $n=2,\,3,\,\cdots$ liefert

$$(2n+1)^2+(n+2)^2=1^2+n^2+[2\,(n+1)]^2$$

2. $n=3$, $\nu=5$, $x=2,\,3,\,\cdots$ liefert

$$(4x+15)^2+(x+20)^2=x^2+15^2+(4x+20)^2$$

Aus jeder Gleichung der Gestalt (3) entsteht auch noch auf andere Weise eine Folge von Identitäten, und zwar durch den Ansatz

$$\begin{aligned}(a+\lambda)^2+(b+\mu)^2 &= x^2+(y+\lambda)^2+(z+\mu)^2\\ 2a\lambda+2b\mu &= 2y\lambda+2z\mu\\ \lambda\,(a-y) &= \mu\,(z-b)\end{aligned}$$

Hieraus folgt $\lambda = z-b$ und $\mu = a-y$ und somit

$$(a+(z-b))^2+(b+(a-y))^2 = x^2+(y+(z-b))^2+(z+(a-y))^2$$

Mit der Definition

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= a_n+z_0-b_0 & \qquad b_{n+1} &= b_n+a_0-y_0\\ y_{n+1} &= y_n+z_0-b_0 & \qquad z_{n+1} &= z_n+a_0-y_0\end{aligned}$$

erhält man somit die Folge

$$\begin{aligned}a_n^2+b_n^2 &= x^2+y_n^2+z_n^2\\ a_n+b_n &= x+y_n+z_n\end{aligned}$$

von Identitäten.
Beispiel:

$$\begin{aligned}7^2+8^2 &= 2^2+3^2+10^2 & \qquad a-y &= 7-3=4\\ 9^2+12^2 &= 2^2+5^2+14^2 & \qquad z-b &= 10-8=2\\ 11^2+16^2 &= 2^2+7^2+18^2 & &\\ &\vdots & &\end{aligned}$$

aber auch

$$\begin{aligned}7^2+8^2 &= 3^2+2^2+10^2 & \qquad a-y &= 7-2=5\\ 9^2+13^2 &= 3^2+4^2+15^2 & \qquad z-b &= 10-8=2\\ 11^2+18^2 &= 3^2+6^2+20^2 & &\\ &\vdots & &\end{aligned}$$

1.3 Drei Summanden

Wir untersuchen nun Quadratsummen mit drei Summanden auf jeder Seite. Diese Identität können wir mit der natürlichen Zahl n allgemein auch so schreiben:

$$n^2+(n+a)^2+(n+b)^2 = (n+c)^2+(n+d)^2+(n+e)^2 \tag{7}$$

$$(n)+(n+a)+(n+b) = (n+c)+(n+d)+(n+e) \tag{8}$$

Aus (8) folgt

$$a+b=c+d+e \tag{9}$$

und aus (7) folgt unter Anwendung der binomischen Formel unter Berücksichtigung von (9)

$$\begin{aligned} 2n\,(a+b)+a^2+b^2 &= 2n\,(c+d+e)+c^2+d^2+e^2 \\ a^2+b^2 &= c^2+d^2+e^2 \end{aligned} \tag{10}$$

und weiter wegen (9) und (10)

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= (c+d+e)^2 \\ ab &= cd+de+ec \end{aligned} \tag{11}$$

Mit $e=a+b-(c+d)$ folgt aus (11)

$$\begin{aligned} ab &= cd+(c+d)\,[a+b-(c+d)] \\ a\,[b-(c+d)] &= cd+(c+d)\,[b-(c+d)] \\ [a-(c+d)]\,[b-(c+d)] &= cd \end{aligned}$$

Diese Bedingung lässt sich u.a. auf drei einfache Arten efüllen:

1. $a-(c+d)=c$ und $b-(c+d)=d$
2. $a=1+(c+d)$
3. $b=1+(c+d)$

wobei der dritte Fall wegen der Austauschbarkeit von a und b keine neue Formel erzeugt.

Aus 1. folgt mit $e=a+b-(c+d)$

$$a=2c+d \qquad b=2d+c \qquad e=2\,(c+d)$$

und somit die erste Identität

$$n^2+(n+2c+d)^2+(n+c+2d)^2=(n+c)^2+(n+d)^2+(n+2\,(c+d))^2 \tag{12}$$

Aus 2. folgt

$$\begin{aligned} b &= cd+(c+d) \qquad & e &= [1+(c+d)]+c+d+cd-(c+d) \\ b &= c+d+cd & e &= 1+(c+d)+cd \end{aligned}$$

und somit die zweite Identität

$$n^2+(n+1+c+d)^2+(n+c+d+cd)=(n+c)^2+(n+d)^2+(n+1+c+d+cd)^2 \tag{13}$$

Beide Identitäten liefern mit beliebigen ganzen Zahlen c und d jeweils eine Formel zur Erzeugung von Quadratsummen, die einer Fundamentalbeziehung unterliegen.

Beispiele zu (12):

c	d	$n^2+(n+2c+d)^2+(n+c+2d)^2=(n+c)^2+(n+d)^2+(n+2(c+d))^2$
1	2	$n^2+(n+4)^2+(n+5)^2=(n+1)^2+(n+2)^2+(n+6)^2$
2	3	$n^2+(n+7)^2+(n+8)^2=(n+2)^2+(n+3)^2+(n+10)^2$
1	3	$n^2+(n+5)^2+(n+7)^2=(n+1)^2+(n+3)^2+(n+8)^2$
2	4	$n^2+(n+8)^2+(n+10)^2=(n+2)^2+(n+4)^2+(n+12)^2$
1	4	$n^2+(n+6)^2+(n+9)^2=(n+1)^2+(n+4)^2+(n+10)^2$

Beispiele zu (13):

c	d	$n^2+(n+1+c+d)^2+(n+cd+c+d)^2=(n+c)^2+(n+d)^2+(n+1+c+d+cd)^2$
1	2	$n^2+(n+4)^2+(n+5)^2=(n+1)^2+(n+2)^2+(n+6)^2$
2	3	$n^2+(n+6)^2+(n+11)^2=(n+2)^2+(n+3)^2+(n+12)^2$
1	3	$n^2+(n+5)^2+(n+7)^2=(n+1)^2+(n+3)^2+(n+8)^2$
2	4	$n^2+(n+7)^2+(n+14)^2=(n+2)^2+(n+4)^2+(n+15)^2$
1	4	$n^2+(n+6)^2+(n+9)^2=(n+1)^2+(n+4)^2+(n+10)^2$

Offenbar liefern beide Identitäten nur für $c=1$ dieselben Formeln. Jedes andere Zahlenpaar (c,d) liefert zwei Keime für eine beliebig lange Folge von gleichen Quadratsummen. Mit den Identitäten (12) und (13) können zudem viele Keime für Gleichungen mit 2 und 3 Summanden erzeugt werden. Setzt man z.B. in (12) einen der Summanden gleich Null, etwa durch $c=-n$, so folgt durch Einsetzen

$$\begin{aligned} n^2+(n+2c+d)^2+(n+c+2d)^2&=(n+c)^2+(n+d)^2+(n+2(c+d))^2\\ n^2+(d-n)^2+(2d)^2&=(n+d)^2+(2d-n)^2 \end{aligned}$$

und z.B. für $d=2$ die Gleichungsfolge

$$\begin{aligned} 1^2+1^2+4^2&=3^2+3^2\\ 2^2+0^2+4^2&=4^2+2^2\\ 3^2+\left(-1^2\right)+4^2&=5^2+1^2\\ 4^2+(-2)^2+4^2&=6^2+0^2\\ 5^2+(-3)^2+4^2&=7^2+(-1)^2\\ &\vdots \end{aligned}$$

1.4 Vier Summanden

Es sei

$$n^2+(n+a)^2+(n+b)^2+(n+c)^2=(n+d)^2+(n+e)^2+(n+f)^2+(n+g)^2 \quad (14)$$

$$n+(n+a)+(n+b)+(n+c)=(n+d)+(n+e)+(n+f)+(n+g) \quad (15)$$

Aus (15) folgt

$$a+b+c=d+e+f+g \quad (16)$$

und aus (14) folgt weiter

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2 + f^2 + g^2 \tag{17}$$

Dann ist wegen (16) auch

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= (d+e+f+g)^2 \\ ab+ac+bc &= de+df+dg+ef+eg+fg\end{aligned}$$

und $g = a+b+c-(d+e+f)$, also auch

$$\begin{aligned}ab+ac+bc &= de+df+ef+(d+e+f)\,[a+b+c-(d+e+f)] \\ [b-(d+e+f)]\,[a-(d+e+f)] &= de+df+ef-ac-bc+c\,(d+e+f) \\ [b-(d+e+f)]\,[a-(d+e+f)] &= de+df+ef-c\,[a+b-(d+e+f)] \qquad (18)\end{aligned}$$

Jede Lösung der Bedingung (18) liefert einen Keim zur Erzeugung einer beliebig langen Folge von gleichen Quadratsummen.
Eine Lösungsmöglichkeit ist

$$a = d+e \qquad b = e+f \qquad c = d+f$$

und es folgt weiter

$$\begin{aligned}g &= a+b+c-(d+e+f) \\ g &= 2\,(d+e+f)-(d+e+f) \\ g &= d+e+f\end{aligned}$$

und wir erhalten für die Quadratsummen

$$n^2+(n+d+e)^2+(n+e+f)^2+(n+d+f)^2 = (n+d)^2+(n+e)^2+(n+f)^2+(n+d+e+f)^2$$

Beispiele:

d	e	f	$n^2+(n+d+e)^2+(n+e+f)^2+(n+d+f)^2 = (n+d)^2+(n+e)^2+(n+f)^2+(n+d+e+f)^2$
1	2	3	$n^2+(n+3)^2+(n+5)^2+(n+4)^2 = (n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+(n+6)$
2	3	4	$n^2+(n+5)^2+(n+7)^2+(n+6) = (n+2)^2+(n+3)^2+(n+4)^2+(n+9)^2$
1	2	4	$n^2+(n+3)^2+(n+6)^2+(n+5)^2 = (n+1)^2+(n+2)^2+(n+4)^2+(n+7)^2$

2 Primzahlzwillinge

$$5^2+7^2 \overset{K}{=} 1^2+3^2+8^2$$
$$7^2+11^2 \overset{K}{=} 1^2+5^2+12^2$$
$$11^2+13^2 \overset{K}{=} 3^2+5^2+16^2 = \cancel{1^2+10^2+12^2+15^2}$$
$$11^2+19^2 \overset{K}{=} 1^2+9^2+20^2 = 5^2+6^2+14^2+15^2$$
$$= 1^2+2^2+10^2+11^2+16^2$$
$$13^2+17^2 \overset{K}{=} 3^2+7^2+20^2$$
$$13^2+23^2 \overset{K}{=} 1^2+11^2+24^2$$
$$17^2+19^2 \overset{K}{=} 5^2+8^2+24^2$$
$$17^2+31^2 \overset{K}{=} 1^2+15^2+32^2 = 2\cdot 25^2 = 7^2+24^2+25^2 \overset{K}{=} 3^2+4^2+21^2+28^2$$
$$19^2+23^2 \overset{K}{=} 5^2+9^2+28^2$$
$$19^2+29^2 \overset{K}{=} 3^2+13^2+32^2$$
$$23^2+31^2 \overset{K}{=} 5^2+13^2+36^2$$
$$23^2+37^2 \overset{K}{=} 3^2+17^2+40^2$$
$$23^2+43^2 \hat{=} 1^2+21^2+44^2$$
$$29^2+31^2 \hat{=} 9^2+11^2+40^2$$
$$29^2+37^2 \overset{K}{=} 7^2+15^2+44^2$$
$$29^2+43^2 \overset{K}{=} 5^2+19^2+48^2$$
$$31^2+41^2 = 7^2+17^2+48^2$$
$$31^2+47^2 = 5^2+21^2+52^2$$
$$31^2+53^2 = 3^2+25^2+56^2$$
$$31^2+59^2 = 1^2+29^2+60^2$$
$$37^2+41^2 = 11^2+15^2+52^2$$
$$37^2+47^2 = 9^2+19^2+56^2$$
$$37^2+53^2 = 7^2+23^2+60^2$$
$$37^2+59^2 = 5^2+27^2+64^2$$
$$37^2+71^2 = 1^2+35^2+72^2$$
$$41^2+43^2 = 13^2+15^2+56^2$$
$$41^2+61^2 = 7^2+27^2+68^2$$
$$41^2+67^2 = 5^2+31^2+72^2$$
$$41^2+73^2 = 3^2+35^2+76^2$$
$$41^2+79^2 = 1^2+39^2+80^2$$
$$43^2+47^2 = 13^2+17^2+60^2$$
$$43^2+53^2 = 11^2+21^2+64^2$$
$$43^2+59^2 = 9^2+25^2+68^2$$
$$43^2+71^2 = 5^2+33^2+76^2$$
$$43^2+83^2 = 1^2+41^2+84^2$$
$$47^2+61^2 = 11^2+25^2+72^2$$
$$47^2+67^2 = 9^2+29^2+76^2$$

$$\cancel{5^2+17}$$
$$3^2+11^2+19^2 = 491 = 21^2+2\cdot 5^2$$
$$11^2+2\cdot 3^2 = 139$$
$$3^2+2\cdot 11^2 = 251$$
$$19^2+2\cdot 3^2 = 379$$
$$3^2+2\cdot 19^2 = 731$$
$$11^2+2\cdot 19^2 = 843$$
$$19^2+2\cdot 11^2 = 603 = 3^2\cdot 67$$

$$= 16^2+63^2+65^2 \overset{K}{=} 7^2+9^2+56^2+72^2$$
$$47^2+73^2 = 7^2+33^2+80^2 = 2\cdot 65^2 =$$
$$47^2+79^2 = 5^2+37^2+84^2$$
$$\cancel{47^2+97^2} =$$
$$53^2+61^2 = 15^2+23^2+76^2$$
$$53^2+67^2 = 13^2+27^2+80^2$$
$$53^2+73^2 = 11^2+31^2+84^2$$
$$53^2+79^2 = 9^2+35^2+88^2$$
$$53^2+97^2 = 3^2+47^2+100^2$$
$$53^2+103^2 = 1^2+51^2+104^2$$
$$59^2+61^2 = 19^2+21^2+80^2$$
$$59^2+67^2 = 17^2+25^2+84^2$$
$$59^2+73^2 = 15^2+29^2+88^2$$
$$59^2+79^2 = 13^2+33^2+92^2$$
$$59^2+97^2 = 7^2+45^2+104^2$$
$$59^2+103^2 = 5^2+49^2+108^2$$
$$59^2+109^2 = 3^2+53^2+112^2$$
$$\cancel{61^2+67^2}$$
$$61^2+71^2 = 17^2+27^2+88^2$$
$$61^2+83^2 = 13^2+35^2+96^2$$
$$61^2+89^2 = 11^2+39^2+100^2$$
$$61^2+101^2 = 7^2+47^2+108^2$$
$$61^2+107^2 = 5^2+51^2+112^2$$
$$61^2+113^2 = 3^2+55^2+116^2$$

Tabelle 1: Quadratsummen von Primzahlen

Glöckler hat in einer anderen Handschrift (Liste Nr. 31) Quadratsummen von Primzahlen aufgestellt (siehe Tabelle 1 auf der vorherigen Seite). Eine Formel ist nicht angegeben. Aber man erkennt in dieser Tabelle in der Beziehung

$$a^2 + b^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

unschwer folgende Eigenchaften:

- a und b sind Primzahlen, also ungerade
- x ist ebenfalls ungerade
- $b - a = y - x$
- die Fundamentalbeziehung $a + b = x + y + z$

Hieraus ergibt sich der Ansatz

$$a = 2n + 1 \qquad b = 2n + 1 + d \qquad x = 2m + 1 \qquad y = 2m + 1 + d$$

und

$$\begin{aligned} z &= 4n + 2 + d - (4m + 2 + d) \\ z &= 4\,(n - m) \end{aligned}$$

und es folgt

$$\begin{aligned} \left[(2n+1)^2 - (2m+1)^2\right] + \left[(2n+1+d)^2 - (2m+1+d)^2\right] &= 16\,(n-m)^2 \\ \left[(2n-2m)\,(2n+2m+2)\right] + \left[(2n-2m)\,(2n+2m+2+2d)\right] &= 16\,(n-m)^2 \\ 2\,(n-m)\,(4n+4m+4+2d) &= 16\,(n-m)^2 \\ 4n+4m+4+2d &= 8n-8m \\ d &= 2n-6m-2 \end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned} b &= 2n + 1 + 2n - 6m - 2 \qquad & y &= 2m + 1 + 2n - 6m - 2 \\ b &= 4n - 6m - 1 & y &= 2n - 4m - 1 \end{aligned}$$

und schließlich die Formel

$$(2n+1)^2 + (4n-6m-1)^2 = (2m+1)^2 + (2n-4m-1)^2 + 16\,(n-m)^2 \tag{19}$$

mit der man durch geeignete Wahl von n und m die Tabelle 1 erzeugen kann, wobei noch

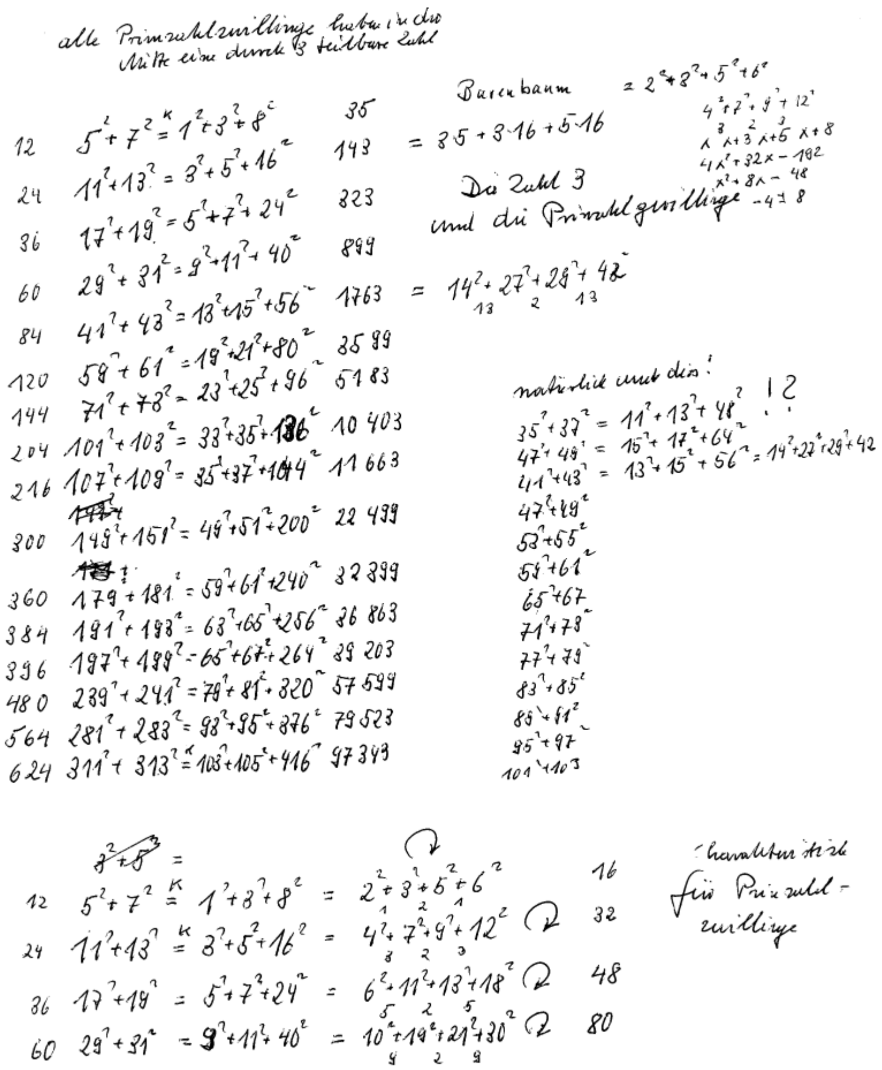
$$\begin{aligned} b &> a \\ 4n - 6m - 1 &> 2n + 1 \\ n &> 3m + 1 \end{aligned}$$

zu berücksichtigen ist. So erhält man die Tabelle 2.

Pythagoreische Tripel und Primzahlen

		a	b	x	y	z	a+b	a^2+b^2
n	m	2n+1	4n-6m-1	2m+1	2n-4m-1	4(n-m)		
2	0	5	7	1	3	8	12	74
3	0	7	11	1	5	12	18	170
5	1	11	13	3	5	16	24	290
5	0	11	19	1	9	20	30	482
6	1	13	17	3	7	20	30	458
6	0	13	23	1	11	24	36	698
8	2	17	19	5	7	24	36	650
8	0	17	31	1	15	32	48	1250
9	2	19	23	5	9	28	42	890
9	1	19	29	3	13	32	48	1202
11	2	23	31	5	13	36	54	1490
11	1	23	37	3	17	40	60	1898
11	0	23	43	1	21	44	66	2378
14	4	29	31	9	11	40	60	1802
14	3	29	37	7	15	44	66	2210
14	2	29	43	5	19	48	72	2690
15	3	31	41	7	17	48	72	2642
15	2	31	47	5	21	52	78	3170
15	1	31	53	3	25	56	84	3770
15	0	31	59	1	29	60	90	4442
18	5	37	41	11	15	52	78	3050
18	4	37	47	9	19	56	84	3578
18	3	37	53	7	23	60	90	4178
18	2	37	59	5	27	64	96	4850
18	0	37	71	1	35	72	108	6410
20	6	41	43	13	15	56	84	3530
20	3	41	61	7	27	68	102	5402
20	2	41	67	5	31	72	108	6170
20	1	41	73	3	35	76	114	7010
20	0	41	79	1	39	80	120	7922
21	6	43	47	13	17	60	90	4058
21	5	43	53	11	21	64	96	4658
21	4	43	59	9	25	68	102	5330
21	2	43	71	5	33	76	114	6890
21	0	43	83	1	41	84	126	8738
23	5	47	61	11	25	72	108	5930
23	4	47	67	9	29	76	114	6698
23	3	47	73	7	33	80	120	7538
23	2	47	79	5	37	84	126	8450
26	7	53	61	15	23	76	114	6530
26	6	53	67	13	27	80	120	7298
26	5	53	73	11	31	84	126	8138
26	4	53	79	9	35	88	132	9050
26	1	53	97	3	47	100	150	12218
26	0	53	103	1	51	104	156	13418
29	9	59	61	19	21	80	120	7202
29	8	59	67	17	25	84	126	7970
29	7	59	73	15	29	88	132	8810
29	6	59	79	13	33	92	138	9722
29	3	59	97	7	45	104	156	12890
29	2	59	103	5	49	108	162	14090

Tabelle 2: Primzahlquadrate


alle Primzahlzwillinge haben in der Mitte eine durch 3 teilbare Zahl

12	$5^2+7^2 \overset{K}{=} 1^2+3^2+8^2$	35	
24	$11^2+13^2 = 3^2+5^2+16^2$	143	$= 3\cdot5 + 3\cdot16 + 5\cdot16$
36	$17^2+19^2 = 5^2+7^2+24^2$	323	
60	$29^2+31^2 = 9^2+11^2+40^2$	899	
84	$41^2+43^2 = 13^2+15^2+56^2$	1763	$= 14^2+27^2+28^2+42^2$
120	$59^2+61^2 = 19^2+21^2+80^2$	3599	
144	$71^2+73^2 = 23^2+25^2+96^2$	5183	
204	$101^2+103^2 = 33^2+35^2+136^2$	10403	
216	$107^2+109^2 = 35^2+37^2+144^2$	11663	
300	$149^2+151^2 = 49^2+51^2+200^2$	22499	
360	$179^2+181^2 = 59^2+61^2+240^2$	32399	
384	$191^2+193^2 = 63^2+65^2+256^2$	36863	
396	$197^2+199^2 = 65^2+67^2+264^2$	39203	
480	$239^2+241^2 = 79^2+81^2+320^2$	57599	
564	$281^2+283^2 = 93^2+95^2+376^2$	79523	
624	$311^2+313^2 = 103^2+105^2+416^2$	97343	

Barenbaum $= 2^2+3^2+5^2+6^2$

Die Zahl 3 und die Primzahlzwillinge

natürlich auch dies! 12

$35^2+37^2 = 11^2+13^2+48^2$

$47^2+49^2 = 15^2+17^2+64^2$

$41^2+43^2 = 13^2+15^2+56^2 = 14^2+27^2+28^2+42^2$

47^2+49^2, 53^2+55^2, 59^2+61^2, 65^2+67^2, 71^2+73^2, 77^2+79^2, 83^2+85^2, 89^2+91^2, 95^2+97^2, 101^2+103^2

12	$5^2+7^2 \overset{K}{=} 1^2+3^2+8^2$	$= 2^2+3^2+5^2+6^2$	16	
24	$11^2+13^2 \overset{K}{=} 3^2+5^2+16^2$	$= 4^2+7^2+9^2+12^2$	32	
36	$17^2+19^2 = 5^2+7^2+24^2$	$= 6^2+11^2+13^2+18^2$	48	
60	$29^2+31^2 = 9^2+11^2+40^2$	$= 10^2+19^2+21^2+30^2$	80	

charakteristisch für Primzahlzwillinge

Tabelle 3: Primzahlzwillinge

Die Tabelle 3 aus derselben Handschrift enthält Primzahlzwillinge, deren Quadratsumme wieder ein Tripel nach dem gleichen Verfahren der Formel (19) für $d = 2$ ergibt. Glöckler bemerkt, dass die (gerade) Zahl zwischen den Primzahlzwillingen durch 3 teilbar sein muss. Daraus ergibt sich der Ansatz

$$(6n-1)^2 + (6n+1)^2 = (2m-1)^2 + (2m+1)^2 + (12n-4m)^2$$

und hieraus folgt schließlich

$$m = n$$

und somit die Formel

$$(6n-1)^2 + (6n+1)^2 = (2n-1)^2 + (2n+1)^2 + (8n)^2$$

Natürlich liefert sie nicht für jedes n auf der linken Seite Primzahlzwilinge, aber jedenfalls alle, die größer als $(3,5)$ sind. In den meisten anderen Paaren ist eine der beiden Zahlen eine Primzahl (siehe Tabelle 4 auf der nächsten Seite).

Pythagoreische Tripel und Primzahlen

n	6n-1	6n+1	2n-1	2n+1	8n	Quadratsummen	
1	5	7	1	3	8	74	74
2	11	13	3	5	16	290	290
3	17	19	5	7	24	650	650
4	23	25	7	9	32	1154	1154
5	29	31	9	11	40	1802	1802
6	35	37	11	13	48	2594	2594
7	41	43	13	15	56	3530	3530
8	47	49	15	17	64	4610	4610
9	53	55	17	19	72	5834	5834
10	59	61	19	21	80	7202	7202
11	65	67	21	23	88	8714	8714
12	71	73	23	25	96	10370	10370
13	77	79	25	27	104	12170	12170
14	83	85	27	29	112	14114	14114
15	89	91	29	31	120	16202	16202
16	95	97	31	33	128	18434	18434
17	101	103	33	35	136	20810	20810
18	107	109	35	37	144	23330	23330
19	113	115	37	39	152	25994	25994
20	119	121	39	41	160	28802	28802
21	125	127	41	43	168	31754	31754
22	131	133	43	45	176	34850	34850
23	137	139	45	47	184	38090	38090
24	143	145	47	49	192	41474	41474
25	149	151	49	51	200	45002	45002
26	155	157	51	53	208	48674	48674
27	161	163	53	55	216	52490	52490
28	167	169	55	57	224	56450	56450
29	173	175	57	59	232	60554	60554
30	179	181	59	61	240	64802	64802
31	185	187	61	63	248	69194	69194
32	191	193	63	65	256	73730	73730
33	197	199	65	67	264	78410	78410
34	203	205	67	69	272	83234	83234
35	209	211	69	71	280	88202	88202
36	215	217	71	73	288	93314	93314
37	221	223	73	75	296	98570	98570
38	227	229	75	77	304	103970	103970
39	233	235	77	79	312	109514	109514
40	239	241	79	81	320	115202	115202
41	245	247	81	83	328	121034	121034
42	251	253	83	85	336	127010	127010
43	257	259	85	87	344	133130	133130
44	263	265	87	89	352	139394	139394

Tabelle 4: Zwillinge