Rekursive Erzeugung der Pythagoräischen Quadrupel nach Georg Glöckler[1]

Zwölf Dokumente von G. Glöckler
mit Einführung und
Kommentaren von A. Häberlein[2],
unterstützt von Dr. G. Kowol[3]

---

1 Georg Glöckler (1933-2019) war von 1990 bis 2003 Leiter der Mathematisch-Astronomischen Sektion am Goetheanum, Dornach.

2 Albrecht Häberlein ahaeb@gmx.de, 13.11.2019

3 Univ.Prof. Dr. Gerhard Kowol, Wien. Er hat freundlicherweise und mit Langmut große Teile meines Konzepts gelesen, Fehler aufgespürt und wertvolle Hinweise gegeben, für die ich ihm sehr dankbar bin. Von ihm stammende Beiträge sind im Text *kursiv* gedruckt.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort: Zu den zahlentheoretischen Anliegen Georg Glöcklers

G. Glöckler hat nur wenig Schriftliches über seine Anliegen in der Zahlentheorie geäußert, doch konnte ich aus Gesprächen und seinen Beiträgen auf den Mathematiklehrer-Tagungen einige Aspekte gewinnen, die allerdings nicht den Anspruch auf Vollständigkeit erheben.

Glöckler betonte oft, dass Zahlen in dreierlei Hinsicht zu betrachten seien, nämlich bezüglich

- ihrer Individualität, ihres Wesens

- ihrer Rhythmengestalt

- ihres Mengencharakters,

dabei sei - in goetheanistischer Weise - die Art der Betrachtung dem betreffenden Gegenstand anzupassen.

Mit dem Mengencharakter einer Zahl befassen wir uns, sobald wir mit ihr rechnen. Glöckler betonte für diesen Bereich oft die damit verbundene Willenstätigkeit (gerade für den Unterricht und polar zur Geometrie) und hat selbst unglaublich viel gerechnet, wie man an seinen nachgelassenen Arbeiten und Skizzen eindrucksvoll ablesen kann.

Zur Rhythmengestalt forderte er - mit Rückgriff auf R. Steiner - für die Zukunft, statt über den Mengencharakter mehr über Rhythmen zu forschen, und arbeitete selbst an

- Kettenbrüchen

- astronomischen und biographischen Rhythmen,

- Chronobiologie,

- Kalender-Rechnung

- musikalische Intervalle

- Fibonacci-Zahlen (die oft als Beispiel dafür dienten, dass „der Prozess stärker als die Zahl“ sein kann)

- Pellsche Gleichung …

Zum Bereich der Rhythmen gehören auch Glöcklers Arbeiten über Folgen von pythagoräischen Tripeln, Quadrupeln usw. insbesondere mit Hilfe von rekursiven Folgen, die er unermüdlich suchte und (er)fand und die er wohl für eine besonders angemessene Methode für diesen Forschungsbereich hielt.
Seine Forschung an den Folgen pythagoräischer Quadrupel ist Inhalt der vorliegenden Arbeit.

Ein ganz zentrales Anliegen Glöcklers war es, alles aus „Keimen“ heraus zu entwickeln.
So bildet er in den hier betrachteten Dokumenten die pythagoräischen Tripel, Quadrupel usw. aus einfachsten Starttupeln heraus, so die Tripel aus den Zahlen des ägyptischen Dreiecks (3,4,5)[4] oder die Quadrupel aus (0,0,1,1)[5].

4 Vgl. „Das ägyptische Dreieck als Keim aller pythagoräischen Dreiecke“, Gloeckler Liste Baum Nr.82
5 So in B9, Seite 37

Auch in dem Dokument „Drei elementare Quadratsummen“[6] findet sich ein Beispiel für dieses Vorgehen, wo drei Größen nicht – wie es möglich wäre - nebeneinander definiert werden, sondern die zweite mittels der ersten, die dritte mittels der zweiten.
Glöckler hat auch nie verabsäumt, darauf hinzuweisen, dass R. Steiner forderte, im Schulunterricht die Zahlen aus der Eins heraus zu entwickeln.
Dieses Entwickeln aus einem Keim ist natürlich auch ein Aspekt aller rekursiven Mathematik und ist unmittelbar mit dem Rhythmischen verbunden.

Dass Glöckler der Meinung war, man solle lieber offene Phänomene schildern, als feste Rezepte weiterzugeben, könnte ein Grund dafür sein, dass er in seinen Arbeiten oft keine Beweise notiert hat. Teils erwartete er wohl, dass der Leser sich selbst bemüht, aus den dargebotenen Phänomenen die Gesetze herauszuschälen und sie zu beweisen. Teils scheint es aber so, als sei ihm – vergleichbar mit der ägyptisch-babylonischen Mathematik - das Auffinden neuer konkreter Resultate das höhere Ziel gewesen, verglichen mit dem Einspannen des Gefundenen in das „Prokrustesbett“ von Voraussetzung/Behauptung/Beweis, das seit Euklid <u>die</u> mathematische Methode geworden ist.

Was den individuellen Charakter der Zahlen betrifft, zitierte Glöckler oft Aussagen Steiners, dass man es dabei mit geistigen Entitäten im Bereich der höchsten Hierarchien zu tun habe und dass spirituelle Wahrheiten nicht nur durch Mantren, sondern auch durch Zahlen dargestellt werden könnten.
Daneben war es ihm stets wichtig, auf die Arbeiten von E. Bindel und L. Locher-Ernst zu den natürlichen Zahlen hinzuweisen.

In diesen Bereich gehören Glöcklers Forschungen zu den

- Primzahlen,
- Polygonalzahlen,
- Datumszahlen,
- Mysterienzahlen, Schicksalszahlen und insbesondere den Bibelzahlen.

Oftmals fließt in diese Untersuchungen auch wieder das Rhythmische ein, sodass die Gebiete nicht vollständig zu trennen sind.

Insgesamt forschte Glöckler sehr selbständig und erfuhr gelegentlich im Nachhinein, dass eines seiner Ergebnisse schon veröffentlicht vorlag. Weitere Forschungsergebnisse, von denen nach eigenem Bekunden schon viele in seinem Inneren fertig waren, hätte er gerne noch schriftlich niedergelegt, doch war ihm dazu leider nicht mehr die Lebenszeit gegönnt. Manches davon könnte vielleicht aus seinen nachgelassenen Papieren noch rekonstruiert werden.

Das hier vorgelegte Skriptum möge in diesem Sinne verstanden werden; es stützt sich aber nur auf solche Dokumente Glöcklers, die er in Maschinenschrift hat übertragen lassen.

6 Gloeckler Liste Baum, Nr. 107, S. 1

A Die Matrix D

In Georg Glöcklers Nachlass findet sich ein Vielzahl von Arbeiten über Quadratsummen, sehr oft ohne Kommentar und Beweis, etliche bereits in Maschinenschrift übertragen. Zwölf dieser Dokumente, die sich speziell mit Rekursionsverfahren für pythagoräische Quadrupel befassen, sollen hier vorgestellt und jeweils in einem angefügten Kommentar bewiesen werden.

Für pythagoräische Tripel $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^3$ mit $a^2+b^2 = c^2$ ist bekannt, dass man mit Hilfe der Matrix

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ durch Multiplikation und geeigneten Vorzeichentausch aus dem Grundtripel $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

alle primitiven pythagoräischen Tripel erzeugen kann[7].

G. Glöckler hat nun für pythagoräische Quadrupel $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^4$ eine entsprechende Matrix D

gefunden; in der mathematischen Literatur scheint hierüber noch nichts veröffentlicht zu sein.

Die hier vorgestellten Arbeiten von G. Glöckler lassen sich alle in einen direkten Zusammenhang mit dieser Matrix D bringen.

Eine analytische Herleitung der Matrix D, basierend auf dem Beweis von P. Baum[8] für die Matrix A, findet sich unten unter A5, ebenso eine Herleitung, die G. Kowol mitgeteilt hat.

A1 Definition

Der Vektor $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^4$ heiße pythagoräisches Quadrupel, wenn $a^2+b^2+c^2 = d^2$ gilt. Es heiße

primitiv, wenn ggT(a,b,c,d)=1 gilt. Die vierte Koordinate d wird als Diagonale des Quadrupels bezeichnet.

---

7 J. Gollnick, H. Scheid, J. Zöllner: Rekursive Erzeugung der primitiven pythagoräischen Tripel, in: Mathematische Semesterberichte Band 39, Heft 1, S. 85-88, 1992.- Hinweise auf die Geschichte dieser Matrix finden sich in A.-M. Fraedrich: Pythagoräische Zahlentripel, in: Didaktik der Mathematik 1985, Band 13, S. 31-49 und 98-117.

8 Dass die für Tripel verwendete Matrix A analytisch hergeleitet werden kann, wurde gezeigt in P. Baum: Pythagoras und der Kreis oder die Folgen primitiver pythagoreischer Zahlentripel, p.baum@posteo.de, 22.06.2019.

A2 Bemerkungen

a) Zu jedem Quadrupel $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^4$ gibt es gleichartige Quadrupel, die durch Permutation der Zahlen a,b,c entstehen. Zu jedem von diesen gibt es noch diejenigen Quadrupel, die sich nur durch Vorzeichen vom ursprünglichen unterscheiden. Im allgemeinen Fall und bei positivem d verbirgt sich hinter einem Quadrupel aus $\mathbb{N}^4$ eine Untergruppe von $3! \cdot 2^3$ „Varianten“ in $\mathbb{Z}^4$, von denen viele tatsächlich benötigt werden, um mit der Matrix D <u>alle</u> primitiven Quadrupel zu erzeugen.

b) Die „uneigentlichen“ Quadrupel, die mindestens eine 0 enthalten, sind hier auch als pythagoräisch aufgenommen.

c) Bei primitiven Quadrupeln müssen immer d und genau eine der Zahlen a, b, c ungerade sein.[9]

d) Im Dokument „Folgen von pythagoräischen Quadrupeln.doc“ (MAS) führt Glöckler an, dass man pythagoräische Quadrupel auch aus drei natürlichen Zahlen p, q, r gewinnen kann, nämlich $(2qr, 2pq, p^2+r^2-q^2, p^2+r^2+q^2)$. Er zeigt, dass mit dieser Formel auch imprimitive Quadrupel entstehen können. Dass nicht alle Pythagoräischen Quadrupel auf diese Weise gebildet werden können, zeigte M. Ruch[10] 1984.

A3 Satz (nach G. Glöckler)

Die von den Matrizen $D := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $E_1 := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$E_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_4 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ erzeugte Gruppe lässt aus den pythagoräischen „Urquadrupeln“ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{und} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ alle primitiven pythagoräischen ganzzahligen Quadrupel entstehen.

<u>Bemerkungen</u>:

- Es gilt detD = 1, und die zu D inverse Matrix ist $D^{-1} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

9 Beim Teilen durch 4 kann ein Quadrat nämlich nur Rest 0 (bei geraden Zahlen) oder Rest 1 haben; wären a,b,c alle gerade, dann wäre das Quadrupel nicht primitiv, und so muss – neben d - genau eine ungerade Zahl dabei sein.

10 M. Ruch, Pythagoräische Zahlenquadrupel, DdM 1984, (299-304).

- Man könnte sich auf Quadrupel mit positiver Diagonale beschränken und E_4 streichen.[11]

- Auch wenn in den hier behandelten Dokumenten vor allem (lineare) Folgen betrachtet werden, so erzeugt die hier vorgestellte Abbildungsgruppe doch eher einen „Baum“, der sich an jeder Stelle in bis zu 8 gleichartige Tupel verzweigt, von denen jedes wieder mit D abgebildet wird, und sich beim Bild weiter verzweigt usw; dieser Baum überdeckt schließlich alle pyth. Quadrupel einfach.

A4 Beweis des Satzes

Schritt a: Gezeigt wird, dass mit v auch v´:=Dv ein pythagoräisches Quadrupel ist.

Sei $v=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\in\mathbb{Z}^4$ ein pythagoräisches Quadrupel und $v'=\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\\d'\end{pmatrix}$ sein Bild unter D.

Dann gilt $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ (1)

und
$$\begin{aligned} a' &= b + c + d\\ b' &= a + c + d\\ c' &= a + b + d\\ d' &= a + b + c + 2d. \end{aligned}$$

Also gilt auch
$$\begin{aligned} a'^2 &= b^2 + c^2 + d^2 + 2(bc + bd + cd)\\ b'^2 &= a^2 + c^2 + d^2 + 2(ac + ad + cd)\\ c'^2 &= a^2 + b^2 + d^2 + 2(ab + ad + bd), \end{aligned}$$ zusammen also
$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 3d^2 + 2(ab + ac + 2ad + bc + 2bd + 2cd).$$

Andererseits ist $d'^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 4d^2 + 2(ab + ac + 2ad + bc + 2bd + 2cd)$.

Da der Unterschied $a^2 + b^2 + c^2 - d^2$ nach (1) gerade Null beträgt, ist auch v´ pythagoräisch.

Schritt b: Das Primitiv-Sein von v überträgt sich auch auf Dv.

Sei nämlich $v\in\mathbb{Z}^4$ primitiv, also seine Komponenten teilerfremd, und sei wieder v´= Dv.

Mit der Bezeichnung t := ggT(v´), existiert dann ein $w\in\mathbb{Z}^4$ mit v´= tw.

Zu zeigen ist nun, dass t=1.

Da (auch) D^{-1} als Homomorphismus von $\mathbb{R}^4$ auf den Quadrupeln homogen operiert, folgt aus v´= tw, dass $v = D^{-1}v' = D^{-1}(tw) = t\,D^{-1}w$.

Aufgrund der Tatsache, dass $D^{-1}w$ ganzzahlig ist, ist t also auch Teiler des primitiven Vektors v und damit ist t=1.

---

11 Aus der Forderung d´= a+b+c+2d>0 folgt nämlich, dass es genügt, für negative a,b,c die Ungleichung $2d > |a| + |b| + |c|$ zu zeigen. Diese Ungleichung wird im Beweis bei Schritt c) mit bewiesen.

<u>Schritt c</u>: Es wird gezeigt, dass alle primitiven Quadrupel erreicht werden.

Wir betrachten ein beliebiges pyth. Quadrupel $\tilde{v} = \begin{pmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \\ \tilde{c} \\ \tilde{d} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^4$ mit $|\tilde{d}| > 1$ und $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} |\tilde{a}| \\ |\tilde{b}| \\ |\tilde{c}| \\ |\tilde{d}| \end{pmatrix} \in \mathbb{N}_0^4$,

das primitiv ist.

Die Beweisidee besteht nun darin, mittels der Matrix D^{-1} von v aus ein Quadrupel $v' = D^{-1}v$ mit kleinerer Diagonale zu erreichen.

Zu zeigen ist:	$0 < d' < d$,
gleichbedeutend mit	$0 < - a - b - c + 2d < d$,
also	$- 2d < - a - b - c < - d$
bzw.	$d < a + b + c < 2d$,
quadriert also	$d^2 < a^2 + b^2 + c^2 + H < 4d^2$ mit $H := 2 (ab + ac + bc)$
und äquivalent dazu:	$0 < H < 3 (a^2 + b^2 + c^2)$

Nun folgt aus $0 \leq (a-b)^2$	$0 \leq 2ab \leq a^2 + b^2$
aus $0 \leq (a-c)^2$	$0 \leq 2ac \leq a^2 + c^2$
aus $0 \leq (b-c)^2$	$0 \leq 2bc \leq b^2 + c^2$,
zusammen also	$0 \leq H \leq 2 (a^2 + b^2 + c^2)$.

Da aber von den drei Quadraten $(a-b)^2$, $(a-c)^2$, $(b-c)^2$ wenigstens zwei echt positiv sind (sonst wäre a=b=c und v nicht primitiv, oder - mit A2 Bemerkung b) argumentiert – müssen bei zwei geraden und einer ungeraden Zahl wenigstens zwei Differenzen ungleich Null sein) und ebenso unter den Produkten ab, ac, bc wenigstens eines positiv ist (sonst wäre v gleich 1,0,0,1 o.ä., was aber wegen d>1 nicht sein kann), gilt sogar

$$0 < H < 2 (a^2 + b^2 + c^2).$$

sodass die obige Ungleichung für H sicher erfüllt ist.

Wiederholt man die Anwendung von D^{-1}, so kommt man in endlich vielen Schritten herunter zur

Diagonale 1, also zu einem der drei Urquadrupel $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{und} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Umgekehrt werden demnach alle primitiven Quadrupel aus $\tilde{v} \in \mathbb{Z}^4$ durch die Matrizengruppe aus obigem Satz erreicht, indem man von einem der Grundtupel aus – durch Anwendung von D - zu v aufsteigt und dann durch Vorzeichentausch schließlich zu $\tilde{v}$ kommt.

A5 Analytische Herleitung der Matrix D

P. Baum (siehe Fußnote 4) hat ausgeführt, wie man von einem Punkt P auf dem Einheitskreis, der einem pythagoräischen Tripel v entspricht, zu einem nächsten solchen Punkt kommen kann:
Man spiegelt P z.B. am Ursprung, legt durch den so gewonnenen Punkt $\tilde{P}$ und den Punkt

Q(1/1) eine Gerade und schneidet diese mit dem Einheitskreis. Dieser Schnittpunkt P´ gehört nun zu dem Tripel v´= Av mit der Matrix A für die Tripel (s. Seite 5).

Dieser Gedanke soll nun auf pythagoräische Quadrupel angewendet werden und zur Matrix D führen.

Ausgangspunkt ist das pythagoräische Quadrupel $v(a, b, c, d) \in \mathbb{N}^4$ und der dazugehörige Punkt $P(\frac{a}{d}/\frac{b}{d}/\frac{c}{d})$ auf der Einheitskugel.

Durch Spiegelung am Ursprung geht P in $\widetilde{P}(-\frac{a}{d}/-\frac{b}{d}/-\frac{c}{d})$ über.

Wegen $x_{\widetilde{P}} - x_Q = -\frac{a}{d} - 1 = -\frac{1}{d}(a+d)$ hat für Q(1/1/1) die Gerade $Q\widetilde{P}$ dann die Gleichung

$$Q\widetilde{P} \;:\; \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}a+d\\b+d\\c+d\end{pmatrix},$$ wobei der Punkt $\widetilde{P}$ zum Parameter $t = -\frac{1}{d}$ gehört.

Schneiden mit der Einheitskugel führt auf die Gleichung

$$(1 + t\,(a+d))^2 + (1 + t\,(b+d))^2 + (1 + t\,(c+d))^2 = 1$$

d.h. $$t^2\,((a+d)^2 + (b+d)^2 + (c+d)^2) + 2t\,(a+d + b+d + c+d) + 3 = 1$$

also $$t^2\,(a^2 + b^2 + c^2 + 3d^2 + 2(ad + bd + cd)) + 2t\,(a+b+c + 3d) + 2 = 0$$

Mit s:= a+b+c und wegen $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ lässt sich das umschreiben zu:

$$t^2\,(4d^2 + 2ds) + 2t\,(s + 3d) + 2 = 0,$$ dh.

$$2d\,(2d+s)\,t^2 + 2(s+3d)\,t + 2 = 0$$

und $$d\,(2d+s)\,t^2 + (s+3d)\,t + 1 = 0$$

Für die Diskriminante T dieser quadratischen Gleichung gilt

$$T = (s+3d)^2 - 4d(2d+s) = s^2 + 6ds + 9d^2 - 8d^2 - 4ds = s^2 + 2ds + d^2 = (s+d)^2,$$

und die Lösungen ergeben sich zu

$$t_1 = \frac{-(s+3d)-(s+d)}{2d(2d+s)} = \frac{-4d-2s}{2d(2d+s)} = \frac{-2(2d+s)}{2d(2d+s)} = -\frac{1}{d},$$ dieser Wert führt zu $\widetilde{P}$,

und $$t_2 = \frac{-(s+3d)+s+d}{2d(2d+s)} = \frac{-2d}{2d(2d+s)} = \frac{-1}{2d+s}.$$

Setzt man t_2 in die Geradengleichung ein, erhält man wegen s = a+b+c

$$\vec{P}\,' = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{-1}{2d+s}\begin{pmatrix}a+d\\b+d\\c+d\end{pmatrix} = \frac{1}{2d+s}\begin{pmatrix}2d+s-a-d\\2d+s-b-d\\2d+s-c-d\end{pmatrix} = \frac{1}{2d+s}\begin{pmatrix}b+c+d\\a+c+d\\a+b+d\end{pmatrix}.$$

Zu diesem Punkt P´ gehört nun das pythagoräische Tripel

v´(b+c+d / a+c+d / a+b+d / a+b+c+2d)

und das entspricht genau der Matrix D.

G. Kowol[12] hat mir mitgeteilt, dass man die Matrix D auch auf zwei weiteren Wegen herleiten kann:

α) Verwendet man für (a,b,c,d) die Minkowski-Norm

$$< a,b,c,d > := a^2 + b^2 + c^2 - d^2,$$

so haben die pythagoräischen Quadrupel gerade die Norm Null.

Das entsprechende innere Produkt hat dann die Gestalt

$$< (a,b,c,d)\ (x,y,z,t) > = ax + by + cz - dt.$$

Eine Matrix, die Vektoren der Norm 0 - also pythagoräische Quadrupel - in ebensolche überführt, ist bereits allgemein normtreu. Derartige Matrizen haben 4 Spalten- oder äquivalent Zeilenvektoren, die jeweils aufeinander „senkrecht stehen" und bis auf das Vorzeichen alle gleiche Norm besitzen; genauer haben die ersten drei Vektoren gleiche Norm, etwa k, und der vierte die Norm -k. Ist k=1, so bilden sie also ein Orthonormalsystem. Das gilt in jeder Dimension.
Die einfachen Vektoren (0,1,1,1), (1,0,1,1), (1,1,0,1) haben diese Eigenschaften und können als die ersten drei Spalten der Matrix genommen werden.
Für einen vierten Vektor v=(a,b,c,d) liefern die Orthogonalitätsbedingungen und die Normierung v=(1,1,1,2) und damit Glöcklers Transformationsmatrix D.

β) In der mathematischen Literatur gibt es Untersuchungen darüber, welche Matrizen ein pyth. n-Tupel in sich überführen. In Vol. 1 der "Collected Math Papers", S. 332 - 336, beginnt A. Cayley die entsprechenden Untersuchungen (1846) für n = 3 und 4. Ch. Hermite löst daraufhin den allgemeinen Fall, aber ohne das genauer auszuführen (Oeuvre I, S. 291 - 295 (1854)). Im Jahr darauf behandelt A. Cayley die Sache dann ausführlich in zwei Arbeiten im Crelle Journal (Vol. 2, S. 192 - 201, und S. 202 - 215)[13] mit dem Titel „Sur la transformation d'une fonction quadratique en elle-même par des substitions linéares." Die 3-dimensionale Transformationsmatrix steht auf S. 211, die 4-dimensionale auf S. 212 - 215.

Setzt man in die Formeln für Φ, k (auf S. 212) und die Matrix (auf S. 213) neben a=b=c=1 und d= - 1

- die Werte λ=1, σ= - 1 und für die anderen Variablen 0 ein, so erhält man für einen dreidimensionalen Unterraum – bis auf Vorzeichen – die Matrix A,
- mit den Werten λ=1, ν= - 1, σ= - 1, Rest=0 erhält man - bis auf Vorzeichen – die Matrix D.

A6 Beispiele für das Wirken der Matrizen aus A3

a) Es gilt: $\begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\\3\end{pmatrix} \overset{D}{\rightarrow} \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \overset{D}{\rightarrow} \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \overset{D}{\rightarrow} \begin{pmatrix}1\\2\\2\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-2\\-1\\-2\\3\end{pmatrix} \overset{D}{\rightarrow} \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix} \overset{D}{\rightarrow} \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \overset{D}{\rightarrow} \begin{pmatrix}2\\1\\2\\3\end{pmatrix}$ und ebenso $\begin{pmatrix}-2\\-2\\-1\\3\end{pmatrix} \overset{D}{\rightarrow} \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix} \overset{D}{\rightarrow} \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \overset{D}{\rightarrow} \begin{pmatrix}2\\2\\1\\3\end{pmatrix}$,

sodass die drei „Urquadrupel" (s. A3) unter der Abbildung D sozusagen jeweils für sich bleiben. Man muss, um alle Permutationen zu erhalten, entweder Vertauschungsmatrizen mit dazunehmen oder - wie im Satz oben durchgeführt – alle drei Urquadrupel als Ausgang zulassen.

12 Siehe Fußnote 3
13 https://archive.org/details/collectedmathema02cayluoft/page/192

b) Einen größeren Bereich, bei dem man ersehen kann, wie durch D (bei $\longrightarrow$) die positiven Quadrupel gebildet werden können, zeigt folgendes Bild (diesmal in Koordinatenschreibweise):

				(3,-4,0,5)	$\longrightarrow$	(1,8,4,9)
				(-3,4,0,5)	$\longrightarrow$	(9,2,6,11)
		(-1,-2,2,3)	$\longrightarrow$	(3,4,0,5)	$\longrightarrow$	(9,8,12,17)
		(-1,2,2,3)	$\longrightarrow$	(7,4,4,9)	$\longrightarrow$	(17,20,20,33)
(1,0,0,1)	$\longrightarrow$	(1,2,2,3)	$\longrightarrow$	(7,6,6,11)	$\longrightarrow$	(23,24,24,41)
		(1,-2,2,3)	$\longrightarrow$	(3,6,2,7)	$\longrightarrow$	(15,12,16,25)
				(-3,6,2,7)	$\longrightarrow$	(15,6,10,19)
				(3,-6,2,7)	$\longrightarrow$	(3,12,4,13)
				(3,6,-2,7)	$\longrightarrow$	(11,8,16,21)
				(-3,6,-2,7)	$\longrightarrow$	(11,2,10,15)
				(3,-6,-2,7)	$\longrightarrow$	(-1,8,4,9)

Als nächstes werden die angekündigten Arbeiten von G. Glöckler vorgestellt. Dazu sollen folgende Bezeichnungen eingeführt werden:

Bezeichnet man die ersten drei Spaltenvektoren der Matrix D mit v_1, v_2, v_3 (der vierte liegt in der Matrix fest), so gilt im einzelnen:

$D_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, D_1 gehört zu (v_1, v_3, v_2), geht also aus D durch den Spaltentausch (23) hervor,

$D_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, D_2 gehört zu (v_3, v_1, v_2), also zum Spaltenzyklus (123),

$D_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, D_3 gehört zu (v_2, v_1, v_3), also zum Spaltentausch (12),

$D_4 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, D_4 gehört zu (v_2, v_3, v_1), also zum Spaltenzyklus (132),

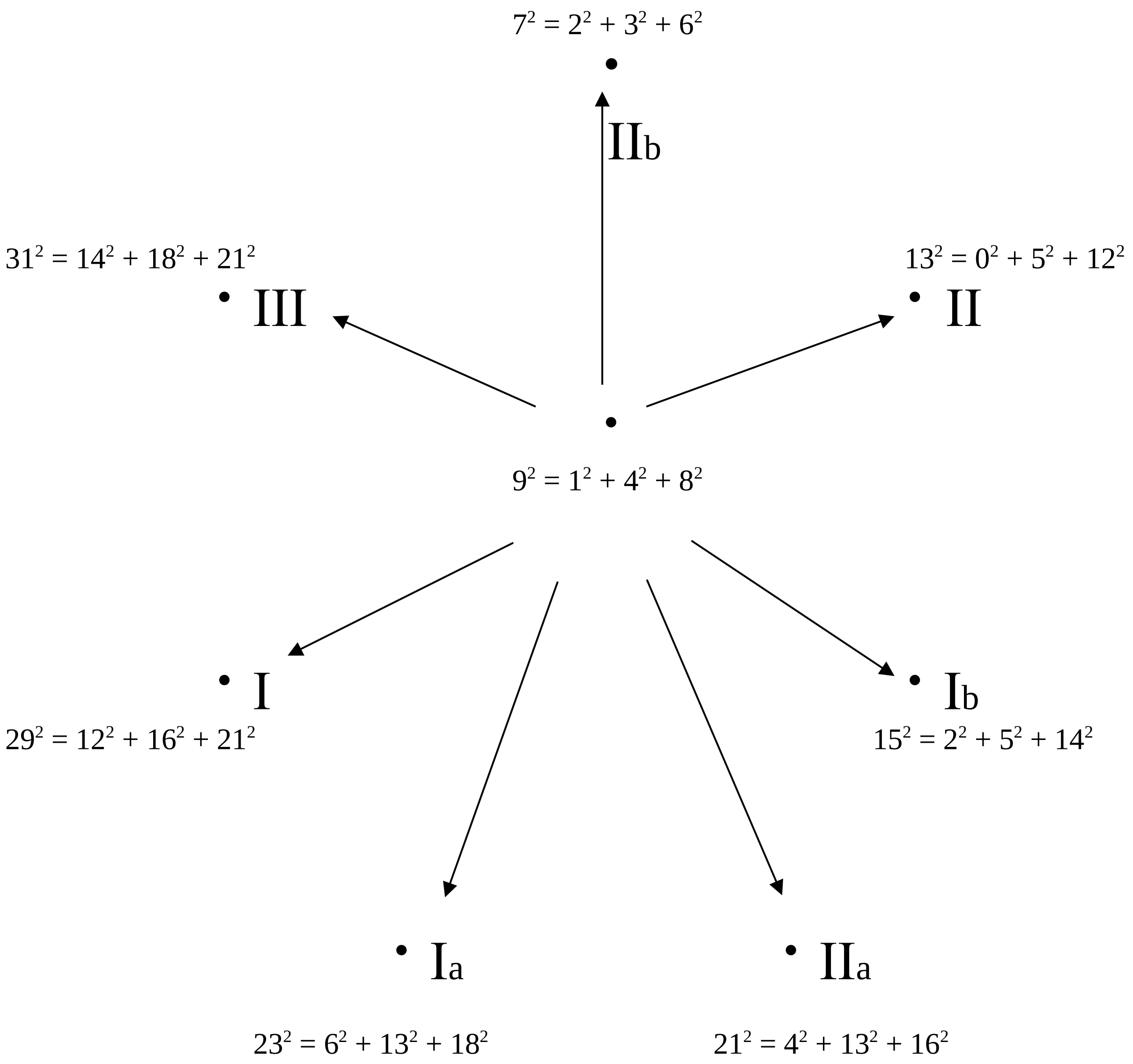
$D_5 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, D_5 gehört zu (v_3, v_2, v_1), geht also aus D durch den Spaltentausch (13) hervor.

Zusammen mit der Matrix D gibt es 3! Möglichkeiten, die ersten drei Spalten dieser Matrix anzuordnen. Die Aufzählung ist also vollständig. Diese Matrizen D_1 bis D_5 gehören übrigens nicht zu der in A3 definierten Gruppe, da diese keine Vertauschungsmatrizen enthält.

B Arbeiten von G. Glöckler

B1 Beispiel für ein Heptagramm[14]

Aus jedem pythagoräischen Zahlenquadrupel gehen entsprechend den 7 Rekursionsformeln jeweils 7 pythagoräische Zahlenquadrupel hervor.
Es gibt im wesentlichen sieben verschiedene Rekursionsformeln.



I	X_n	=	$Y_{n-1} + Z_{n-1} + t_{n-1}$	1		4 + 8 + 9	=	21		
	Y_n	=	$-X_{n-1} + Z_{n-1} + t_{n-1}$	4	$\Rightarrow$	-1 + 8 + 9	=	16		
	Z_n	=	$-X_{n-1} + Y_{n-1} + t_{n-1}$	8		-1 + 4 + 9	=	12		
	t_n	=	$-X_{n-1} + Y_{n-1} + Z_{n-1} + 2t_{n-1}$	9		-1 + 4 + 8 + 18	=	$\underline{\underline{29}}$	$12^2 + 16^2 + 21^2 = 29^2$	29

14 Quelle: MAS „Beispiel für ein Heptagramm“ 12.03.2002

Ia	X_n	=	$X_{n-1} + Z_{n-1} + t_{n-1}$	1		$1 + 8 + 9$	=	18	
	Y_n	=	$-Y_{n-1} + Z_{n-1} + t_{n-1}$	4	$\Rightarrow$	$-4 + 8 + 9$	=	13	
	Z_n	=	$X_{n-1} - Y_{n-1} + t_{n-1}$	8		$1 - 4 + 9$	=	6	
	t_n	=	$X_{n-1} - Y_{n-1} + Z_{n-1} + 2t_{n-1}$	9		$1 - 4 + 8 + 2\cdot 9$	=	$\underline{\underline{23}}$	$6^2 + 13^2 + 18^2 = 23^2$
Ib	X_n	=	$X_{n-1} + Y_{n-1} + t_{n-1}$	1		$1 + 4 + 9$	=	14	
	Y_n	=	$X_{n-1} - Z_{n-1} + t_{n-1}$	4	$\Rightarrow$	$1 - 8 + 9$	=	2	
	Z_n	=	$Y_{n-1} - Z_{n-1} + t_{n-1}$	8		$4 - 8 + 9$	=	5	
	t_n	=	$X_{n-1} + Y_{n-1} - Z_{n-1} + 2t_{n-1}$	9		$1 + 4 - 8 + 18$	=	$\underline{\underline{15}}$	$2^2 + 5^2 + 14^2 = 15^2$

II	X_n	=	$-Y_{n-1} - Z_{n-1} + t_{n-1}$	1		$4 - 8 + 9$	=	5	
	Y_n	=	$-X_{n-1} - Z_{n-1} + t_{n-1}$	4	$\Rightarrow$	$-1 - 8 + 9$	=	0	
	Z_n	=	$-X_{n-1} + Y_{n-1} + t_{n-1}$	8		$-1 + 4 + 9$	=	12	
	t_n	=	$-X_{n-1} + Y_{n-1} - Z_{n-1} + 2t_{n-1}$	9		$-1 + 4 - 8 + 18$	=	$\underline{\underline{13}}$	$5^2 + 12^2 = 13^2$
IIa	X_n	=	$-Y_{n-1} + Z_{n-1} + t_{n-1}$	1		$-4 + 8 + 9$	=	13	
	Y_n	=	$-X_{n-1} - Y_{n-1} + t_{n-1}$	4	$\Rightarrow$	$-1 - 4 + 9$	=	4	
	Z_n	=	$-X_{n-1} + Z_{n-1} + t_{n-1}$	8		$-1 + 8 + 9$	=	16	
	t_n	=	$-X_{n-1} - Y_{n-1} + Z_{n-1} + 2t_{n-1}$	9		$-1 - 4 + 8 + 18$	=	$\underline{\underline{21}}$	$4^2 + 13^2 + 16^2 = 21^2$
IIb	X_n	=	$X_{n-1} - Z_{n-1} + t_{n-1}$	1		$1 - 8 + 9$	=	2	
	Y_n	=	$-Y_{n-1} - Z_{n-1} + t_{n-1}$	4	$\Rightarrow$	$-4 - 8 + 9$	=	-3	
	Z_n	=	$X_{n-1} - Y_{n-1} + t_{n-1}$	8		$1 - 4 + 9$	=	6	
	t_n	=	$X_{n-1} - Y_{n-1} - Z_{n-1} + 2t_{n-1}$	9		$1 - 4 - 8 + 18$	=	$\underline{\underline{7}}$	$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$
III	X_n	=	$Y_{n-1} + Z_{n-1} + t_{n-1}$	1		$4 + 8 + 9$	=	21	
	Y_n	=	$X_{n-1} + Z_{n-1} + t_{n-1}$	4	$\Rightarrow$	$1 + 8 + 9$	=	18	
	Z_n	=	$X_{n-1} + Y_{n-1} + t_{n-1}$	8		$1 + 4 + 9$	=	14	
	t_n	=	$X_{n-1} + Y_{n-1} + Z_{n-1} + 2t_{n-1}$	9		$1 + 4 + 8 + 18$	=	$\underline{\underline{31}}$	$14^2 + 18^2 + 21^2 = 31^2$

<u>Kommentar</u> (A. Hä.):

In diesem Dokument wird dargestellt, wie aus dem Quadrupel (1, 4, 8, 9) durch sieben Rekursionsformeln ein „7-Stern“ von Quadrupeln entsteht, die als Diagonale die Werte 7, 13, 15, 21, 23, 29, 31 aufweisen.

Die angeführten Rekursionsformeln entsprechen – bis auf die Reihenfolge der Koordinaten – gerade den Verbindungen von einer der Matrizen D und D_1 bis D_5 (siehe oben bei A6) mit einer oder mehreren von den Vorzeichen-Tausch-Matrizen E_1 bis E_4.

Bezeichnet man wieder die ersten drei Spaltenvektoren der Matrix D mit v_1, v_2, v_3 (der vierte ist konstant), so gilt im einzelnen:

Rekursionsformel I gehört zu $(-v_1, v_2, v_3)$, also zur Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und stellt DE_1 dar, Rekursionsformel Ia gehört zu (v_2, -v_1, v_3), also zur Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = D_3E_2$,

Rekursionsformel Ib gehört zu (v_3 , v_2, -v_1), also zur Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = D_5E_3$,

Rekursionsformel II gehört zu (-v_1, v_2, -v_3), also zur Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = DE_1E_3$,

Rekursionsformel IIa gehört zu (-v_1, -v_3, v_2), also zur Matrix $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = D_1E_1E_2$,

Rekursionsformel IIb gehört zu (v_2, -v_1, -v_3), also zur Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = D_3E_2E_3$,

Rekursionsformel III gehört zu (v_1, v_2, v_3), also zur Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, stellt also D dar.

Man könnte zusätzlich noch z.B die Matrix $DE_1E_2E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ anfügen, denn diese

erzeugt durch $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ die Zahl 5 in der Diagonale und ergänzt das Heptagramm auf diese Weise zu einem 8-Stern.

Da das Ausgangsquadrupel (1, 4, 8, 9) der Größe nach geordnet ist, führt auch das Wenden der Vorzeichen zu einer gewissen Ordnung in den Basen der Bild-Quadrupel: „ohne E“ führt zu t = 31, E_1 führt zu t = 29 usw. bis man mit $E_1E_2E_3$ zur Diagonale 5 kommt (siehe Tabelle im Kommentar zu B2)

Dass mit dem 8-Stern alle Möglichkeiten ausgeschöpft sind, liegt daran, dass es gerade 2^3 Möglichkeiten gibt, drei Zahlen mit Vorzeichen zu versehen.

Eine andere Vorgehensweise bestünde darin, nur mit der Matrix D zu operieren, dann aber die Reihenfolge und die Vorzeichen der Quadrupelzahlen 1, 4, 8 zu variieren. So kommt man auf insgesamt 6·8=48 Rekursionsfolgen, die in B2 und B3 behandelt werden.

B2 28 Rekursionsformeln für die Folgenwerte von fortlaufenden - nicht zyklischen - Quadrupelfolgen[15]

		$n =$	0	1	2	3	4	5	
(1)	$x = v + w + t_0$	$x_n =$	1	21	63	251	921	3453	
	$y = u + w + t_0$	$y_n =$	4	18	66	248	924	3450	➔ …
	$z = u + v + t_0$	$z_n =$	8	14	70	244	928	3446	
	$t = u + v + w + 2\,t_0$	$t_n =$	9	31	115	429	1601	5975	
(2)	$x = v + w + t_0$	$x_n =$	1	21	57	109	177	261	
	$y = -u + w + t_0$	$y_n =$	4	16	20	32	36	48	➔ …
	$z = -u + v + t_0$	$z_n =$	8	12	24	28	40	44	
	$t = -u + v + w + 2\,t_0$	$t_n =$	9	29	65	117	185	269	
(3)	$x = -v + w + t_0$	$x_n =$	1	13	11	23	21	33	
	$y = u + w + t_0$	$y_n =$	4	18	42	76	120	174	➔ …
	$z = u - v + t_0$	$z_n =$	8	6	18	16	28	26	
	$t = u - v + w + 2\,t_0$	$t_n =$	9	23	47	81	125	179	
(4)	$x = v - w + t_0$	$x_n =$	1	5	3	7	5	9	
	$y = u - w + t_0$	$y_n =$	4	2	6	4	8	6	➔ …
	$z = u + v + t_0$	$z_n =$	8	14	22	32	44	58	
	$t = u + v - w + 2\,t_0$	$t_n =$	9	15	23	33	45	59	
(5)	$x = v - w + t_0$	$x_n =$	1	5	27	63	189	553	
	$y = u + v + t_0$	$y_n =$	4	14	34	108	308	886	➔ …
	$z = u - w + t_0$	$z_n =$	8	2	18	56	144	434	
	$t = u + v - w + 2\,t_0$	$t_n =$	9	15	47	137	389	1131	
(6)	$x = v - w + t_0$	$x_n =$	1	5	25	45	81	117	
	$y = -u + v + t_0$	$y_n =$	4	12	20	28	36	44	➔ …
	$z = -u - w + t_0$	$z_n =$	8	0	8	0	8	0	
	$t = -u + v - w + 2\,t_0$	$t_n =$	9	13	33	53	89	125	
(7)	$x = u + w + t_0$	$x_n =$	1	18	54	155	412	1092	
	$y = u - v + t_0$	$y_n =$	4	6	35	90	256	669	➔ …
	$z = -v + w + t_0$	$z_n =$	8	13	30	66	167	424	
	$t = u - v + w + 2\,t_0$	$t_n =$	9	23	71	191	513	1349	
(8)	$x = u + w + t_0$	$x_n =$	1	18	47	132	393	1126	
	$y = -v + w + t_0$	$y_n =$	4	13	16	69	192	541	➔ …
	$z = u - v + t_0$	$z_n =$	8	6	28	88	236	698	
	$t = u - v + w + 2\,t_0$	$t_n =$	9	23	57	173	497	1431	

15 Quelle: Gloeckler Liste Baum, Nr. 46; MAS: „28 Rekursionsformeln für die Folgenwerte von fortlaufenden“, 31.01.2005

(9)	$x = u - w + t_0$	$x_n =$	1	2	12	29	82	212	➔ …
	$y = u + v + t_0$	$y_n =$	4	14	31	84	214	563	
	$z = v - w + t_0$	$z_n =$	8	5	24	48	137	344	
	$t = u + v - w + 2\,t_0$	$t_n =$	9	15	41	101	267	693	
(10)	$x = -u + w + t_0$	$x_n =$	1	16	34	103	262	700	➔ …
	$y = -u + v + t_0$	$y_n =$	4	12	25	66	166	435	
	$z = v + w + t_0$	$z_n =$	8	21	62	162	431	1128	
	$t = -u + v + w + 2\,t_0$	$t_n =$	9	29	75	203	531	1397	
(11)	$x = -u + w + t_0$	$x_n =$	1	16	18	47	98	194	➔ …
	$y = -u - v + t_0$	$y_n =$	4	4	1	16	18	47	
	$z = -v + w + t_0$	$z_n =$	8	13	30	64	129	274	
	$t = -u - v + w + 2\,t_0$	$t_n =$	9	21	35	81	163	339	
(12)	$x = -u - w + t_0$	$x_n =$	1	0	8	5	20	38	➔ …
	$y = -u + v + t_0$	$y_n =$	4	12	25	50	108	221	
	$z = v - w + t_0$	$z_n =$	8	5	20	38	75	166	
	$t = -u + v - w + 2\,t_0$	$t_n =$	9	13	33	63	133	279	
(13)	$x = -u + w + t_0$	$x_n =$	1	16	25	84	249	700	➔ …
	$y = v + w + t_0$	$y_n =$	4	21	62	171	504	1453	
	$z = -u + v + t_0$	$z_n =$	8	12	34	112	308	896	
	$t = -u + v + w + 2\,t_0$	$t_n =$	9	29	75	221	641	1845	
(14)	$x = u - w + t_0$	$x_n =$	1	2	12	21	46	98	➔ …
	$y = u - v + t_0$	$y_n =$	4	6	3	22	30	71	
	$z = -v - w + t_0$	$z_n =$	8	-3	4	6	3	22	
	$t = u - v - w + 2\,t_0$	$t_n =$	9	7	13	31	55	123	
(15)	$x = u + v + t_0$	$x_n =$	1	14	34	99	256	680	➔ …
	$y = v - w + t_0$	$y_n =$	4	5	18	38	103	260	
	$z = u - w + t_0$	$z_n =$	8	2	27	54	164	413	
	$t = u + v - w + 2\,t_0$	$t_n =$	9	15	47	119	321	837	
(16)	$x = u + v + t_0$	$x_n =$	1	14	31	96	281	802	➔ …
	$y = u - w + t_0$	$y_n =$	4	2	24	60	168	502	
	$z = v - w + t_0$	$z_n =$	8	5	12	53	132	389	
	$t = u + v - w + 2\,t_0$	$t_n =$	9	15	41	125	353	1023	
(17)	$x = u - v + t_0$	$x_n =$	1	6	11	16	21	26	➔ …
	$y = u - w + t_0$	$y_n =$	4	2	16	24	48	66	
	$z = -v - w + t_0$	$z_n =$	8	-3	8	-3	8	-3	
	$t = u - v - w + 2\,t_0$	$t_n =$	9	7	21	29	53	71	
(18)	$x = u - v + t_0$	$x_n =$	1	6	16	45	118	312	➔ …
	$y = -v + w + t_0$	$y_n =$	4	13	28	76	193	508	
	$z = u + w + t_0$	$z_n =$	8	18	47	120	314	819	
	$t = u - v + w + 2\,t_0$	$t_n =$	9	23	57	149	387	1013	

(19)
$$\begin{aligned} x &= u - v + t_0 \\ y &= - v - w + t_0 \\ z &= u - w + t_0 \\ t &= u - v - w + 2\,t_0 \end{aligned}$$

x_n	=	1	6	16	29	66	134
y_n	=	4	-3	8	2	11	26
z_n	=	8	2	11	26	42	103
t_n	=	9	7	21	39	79	171

→ …

(20)
$$\begin{aligned} x &= - u + v + t_0 \\ y &= v + w + t_0 \\ z &= - u + w + t_0 \\ t &= - u + v + w + 2\,t_0 \end{aligned}$$

x_n	=	1	12	38	111	298	792
y_n	=	4	21	66	182	487	1284
z_n	=	8	16	33	78	194	499
t_n	=	9	29	83	227	603	1589

→ …

(21)
$$\begin{aligned} x &= - u + v + t_0 \\ y &= v - w + t_0 \\ z &= - u - w + t_0 \\ t &= - u + v - w + 2\,t_0 \end{aligned}$$

x_n	=	1	12	6	31	54	110
y_n	=	4	5	18	36	73	158
z_n	=	8	0	1	12	6	31
t_n	=	9	13	19	49	91	195

→ …

(22)
$$\begin{aligned} x &= - u - v + t_0 \\ y &= - v + w + t_0 \\ z &= - u + w + t_0 \\ t &= - u - v + w + 2\,t_0 \end{aligned}$$

x_n	=	1	4	4	13	24	50
y_n	=	4	13	24	50	107	218
z_n	=	8	16	33	70	144	301
t_n	=	9	21	41	87	181	375

→ …

(23)
$$\begin{aligned} x &= - v + w + t_0 \\ y &= u - v + t_0 \\ z &= u + w + t_0 \\ t &= u - v + w + 2\,t_0 \end{aligned}$$

x_n	=	1	13	35	95	285	817
y_n	=	4	6	30	76	220	646
z_n	=	8	18	54	160	456	1322
t_n	=	9	23	71	201	581	1683

→ …

(24)
$$\begin{aligned} x &= - v + w + t_0 \\ y &= - u - v + t_0 \\ z &= - u + w + t_0 \\ t &= - u - v + w + 2\,t_0 \end{aligned}$$

x_n	=	1	13	33	61	97	141
y_n	=	4	4	4	4	4	4
z_n	=	8	16	24	32	40	48
t_n	=	9	21	41	69	105	149

→ …

(25)
$$\begin{aligned} x &= u - w + t_0 \\ y &= - v - w + t_0 \\ z &= u - v + t_0 \\ t &= u - v - w + 2\,t_0 \end{aligned}$$

x_n	=	1	2	3	4	5	6	7	8
y_n	=	4	-3	4	-3	4	-3	4	-3
z_n	=	8	6	12	12	20	22	32	36
t_n	=	9	7	13	13	21	23	33	37

→ …

(26)
$$\begin{aligned} x &= - u - w + t_0 \\ y &= v - w + t_0 \\ z &= - u + v + t_0 \\ t &= - u + v - w + 2\,t_0 \end{aligned}$$

x_n	=	1	0	1	0	1	0	1	0
y_n	=	4	5	6	7	8	9	10	11
z_n	=	8	12	18	24	32	40	50	60
t_n	=	9	13	19	25	33	41	51	61

→ …

(27)
$$\begin{aligned} x &= - u + v + t_0 \\ y &= - u + w + t_0 \\ z &= v + w + t_0 \\ t &= - u + v + w + 2\,t_0 \end{aligned}$$

x_n	=	1	12	33	88	265	760
y_n	=	4	16	38	116	336	964
z_n	=	8	21	66	187	540	1565
t_n	=	9	29	83	237	689	1989

→ …

(28)
$$\begin{aligned} x &= - u - v + t_0 \\ y &= - u + w + t_0 \\ z &= - v + w + t_0 \\ t &= - u - v + w + 2\,t_0 \end{aligned}$$

x_n	=	1	4	1	4	1	4	1	4
y_n	=	4	16	30	52	76	108	142	184
z_n	=	8	13	18	23	28	33	38	43
t_n	=	9	21	35	57	81	113	147	189

→ ..

<u>Kommentar</u> (A. Hä.):

Dass Glöckler das „Keimquadrupel“ (1, 4, 8, 9) wählt, mag darin begründet sein, dass die Abstände der Koordinaten (3 und 4) zum pythagoräischen Tripel (3, 4, 5) gehören.[16]

Bei der Folge (1) fällt auf, dass $x_n - y_n = \pm 3$ und $y_n - z_n = \pm 4$. Diese drei Koordinaten liegen – gemessen an t_n - relativ nah bei einander, sodass $\lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{t_n} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ etc. und $\lim_{n \to \infty} \frac{t_{n+1}}{t_n} = 2 - \sqrt{3}.$

Für die Betrachtungsweise von S.9 folgt daraus, dass dort die Folge der Punkte $P \to P' \to P'' \to \ldots$ auf der Einheitskugel zu dem Punkt $P_\infty\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \middle| \frac{\sqrt{3}}{3} \middle| \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ hinführt, jedenfalls wenn man mit P im ersten Oktanten startet.

Bei der Folge (2) schreiten die y-Werte mit +12 und +4 im Wechsel voran, ebenso die z-Werte, es gilt $z_n - y_n = \pm 4$ und $t_n - x_n = 8$.

Ähnliches lässt sich bei den Folgen (3) und (4) beobachten.

Bei den Folgen (6), (17), (25), (26) und (28) fällt auf, dass eine der Koordinaten zwischen zwei Werten pendelt, bei (24) sogar konstant ist.

Bei (6) und (26) ist der eine Pendel-Wert Null, sodass sich abwechselnd Tripel und Quadrupel ergeben. Solche „alternierenden“ Folgen werden in B4 bis B8 eingehender untersucht.

Die Folgen (25) und (26) haben dazu noch die Spezialität, dass ihre Koordinaten sehr langsam wachsen (jeweils eine Koordinate hat Zuwachs +1) und dass stets $t_n - z_n = 1$.

Die hier vorgestellten Rekursionsformeln stehen ebenfalls in engem Zusammenhang mit der Matrix D. Iteriert man D, so erhält man die Folge (1). Iteration von D_1, D_2 usw. liefert dieselben Quadrupel, nur in anderer Reihenfolge der Koordinaten.

Es lassen sich nun die Matrizen D_1 bis D_5 mit den Vorzeichen-Tausch-Matrizen E_1 bis E_3 kombinieren und das Gesamtergebnis rekursiv anwenden. Es entstehen entweder die hier angeführten 28 Folgen oder man erhält Zyklen der Länge 2, 4 oder 6.

So liefert z.B. die Potenzierung der Matrix $M := DE_1E_2E_3$ einen Zyklus der Länge 2, denn für

$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ gilt $M^2 = Id$. Ähnlich erhält man für $M_2 := D_2E_1E_2E_3$ $(M_2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$(M_2)^2$ stellt den Spaltentauschzyklus (132), sodass $(M_2)^6 = ((M_2)^2)^3 = Id$.

Diese Zyklen sind von G. Glöckler in dem Dokument „13 zyklische Quadrupelfolgen …“ (siehe B3) aufgelistet.

16 Vgl. „Das ägyptische Dreieck als Keim aller pythagoräischen Dreiecke“, Gloeckler Liste Baum Nr.82

Folgende Tabelle stellt alle Kombinationsmöglichkeiten und ihre Ergebnisse dar.
Die runden Klammern beziehen sich auf die Quadrupelfolgen bei den „28 Rekursionsfolgen“, die römischen Zahlen auf das Heptagramm in B1 und die römischen Zahlen *[in Klammern, kursiv]* hinter der Zykluslänge auf die „13 zyklische Quadrupelfolgen …“ in B3.

	ohne E	E_1	E_2	E_3	E_1 E_2	E_1E_3	E_2 E_3	$E_1E_2E_3$
D	(1)	(2) = I	(3)	(4)	Lä4 *[IId]*	Lä4 *[IIe]*	Lä4 *[IIb]*	Lä2 *[Ic]*
D_1=D·(23)	wie (1)	wie (2)	(23)	(5) = II	(24) = IIa	(6)	Lä4 *[IIa]*	Lä2 *[Ia]*
D_2=D·(123)	wie (1)	(10)	(7)	(9)	(11)	(12)	(14)	Lä6 *[IIIb]*
D_3=D·(12)	wie (1)	(13)	(8) = Ia	wie (4)	Lä4 *[IIc]*	(26)	(25)	Lä2 *[Ib]*
D_4=D·(132)	wie (1)	(20)	(18)	(15)	(22)	(21)	(19)	Lä6 *[IIIa]*
D_5=D·(13)	wie (1)	(27)	wie (3)	(16) = Ib	(28)	Lä4 *[IIf]*	(17)	Lä2 *[Id]*
Diagonale des aus 1,4,8,9 entstehenden Bildes	31	29	23	15	21	13	7	5

Man sieht dabei, wie das passende Zusammentreffen von Vorzeichenwechsel und Spaltentausch das zyklische Verhalten – und die Zykluslänge – erzeugt.

G. Kowol hat mich darauf hingewiesen, dass sich noch weitere Variationen der Matrix D finden lassen, die pythagoräische Quadrupel wieder in solche überführen, nämlich durch das Einbeziehen der transponierten Matrix D^t. Daraus folgt, dass man, statt spaltenweise mit -1 zu multiplizieren, dies auch zeilenweise tun kann; zu den 7 Möglichkeiten, die Matrizen E_1, E_2, E_3 zu kombinieren, kommen ebenso viele Möglichkeiten T_1, T_2, ... bei den Zeilen, sodass man 49 Möglichkeiten bei D, ebenso viele bei D_1 usw. erhält. Die so entstehenden Folgen sind größtenteils untereinander und auch von den oben angeführten 28 Folgen verschieden.
G. Glöckler hat, soweit ich sehe, diese Variationen nicht verwendet, jedoch taucht die Matrix $(-D)^{-1} = DE_1E_2E_3T_4$ bei der Betrachtung des Dokuments B11 (s. Seite 44) auf.

B3 13 zyklische Quadrupelfolgen mit nur 5 wesentlich verschiedenen[17]

Im Folgenden sind 13 Rekursionsformeln für Folgen von primitiven pythagoräischen Zahlenquadrupeln angegeben.

Trotz verschiedener Formeln ergeben sich aber nur 5 wesentlich verschiedene.

Zweierzyklen

Ia

$$\begin{aligned} x &= -v - w + t_0 \\ y &= -u - v + t_0 \\ z &= -u - w + t_0 \\ t &= -u - v - w + 2\,t_0 \end{aligned}$$

1	-3	1
4	4	4
8	0	8
9	5	9

Ib

$$\begin{aligned} x &= -u - w + t_0 \\ y &= -v - w + t_0 \\ z &= -u - v + t_0 \\ t &= -u - v - w + 2\,t_0 \end{aligned}$$

1	0	1
4	-3	4
8	4	8
9	5	9

Ic

$$\begin{aligned} x &= -v - w + t_0 \\ y &= -u - w + t_0 \\ z &= -u - v + t_0 \\ t &= -u - v - w + 2\,t_0 \end{aligned}$$

1	-3	1
4	0	4
8	4	8
9	5	9

Id

$$\begin{aligned} x &= -u - v + t_0 \\ y &= -u - w + t_0 \\ z &= -v - w + t_0 \\ t &= -u - v - w + 2\,t_0 \end{aligned}$$

1	4	1
4	0	4
8	-3	8
9	5	9

Viererzyklen

IIa

$$\begin{aligned} x &= -v - w + t_0 \\ y &= u - v + t_0 \\ z &= u - w + t_0 \\ t &= u - v - w + 2\,t_0 \end{aligned}$$

1	-3	-1	3	1
4	6	-2	4	4
8	2	2	0	8
9	7	3	5	9

IIb

$$\begin{aligned} x &= -v - w + t_0 \\ y &= u - w + t_0 \\ z &= u - v + t_0 \\ t &= u - v - w + 2\,t_0 \end{aligned}$$

1	-3	-1	3	1
4	2	-2	0	4
8	6	2	4	8
9	7	3	5	9

IIc

$$\begin{aligned} x &= -u + w + t_0 \\ y &= -v + w + t_0 \\ z &= -u - v + t_0 \\ t &= -u - v + w + 2\,t_0 \end{aligned}$$

1	16	9	0	1
4	13	12	-3	4
8	4	-8	-4	8
9	21	17	5	9

IId

$$\begin{aligned} x &= -v + w + t_0 \\ y &= -u + w + t_0 \\ z &= -u - v + t_0 \\ t &= -u - v + w + 2\,t_0 \end{aligned}$$

1	13	9	-3	1
4	16	12	0	4
8	4	-8	-4	8
9	21	17	5	9

Sechserzyklen

III a

$$\begin{aligned} x &= -u - v + t_0 \\ y &= -v - w + t_0 \\ z &= -u - w + t_0 \\ t &= -u - v - w + 2\,t_0 \end{aligned}$$

1	4	4	-3	8	0	1
4	-3	8	0	1	4	4
8	0	1	4	4	-3	8
9	5	9	5	9	5	9

III b

$$\begin{aligned} x &= -u - w + t_0 \\ y &= -u - v + t_0 \\ z &= -v - w + t_0 \\ t &= -u - v - w + 2\,t_0 \end{aligned}$$

1	0	8	-3	4	4	1
4	-3	1	0	8	-3	4
8	4	4	4	1	0	8
9	5	9	5	9	5	9

17 Quelle: MAS „5 wesentlich verschiedene zyklische Quadrupel“, 02.05.2001

Zweierzyklen	Viererzyklen	Sechserzyklen

IIe

$$\begin{aligned} x &= \quad\quad + v - w + t_0 \\ y &= -u \quad\quad - w + t_0 \\ z &= -u + v \quad\quad + t_0 \\ t &= -u + v - w + 2t_0 \end{aligned}$$

1	5	1	-3	1
4	0	-4	0	4
8	12	8	4	8
9	13	9	5	9

IIf

$$\begin{aligned} x &= -u + v - w + t_0 \\ y &= -u \quad\quad - w + t_0 \\ z &= \quad\quad + v - w + t_0 \\ t &= -u + v - w + 2t_0 \end{aligned}$$

1	12	1	4	1
4	0	-4	0	4
8	5	8	-3	8
9	13	9	5	9

Kommentar (A. Hä.): In das Originaldokument mit dem Titel „12 zyklische ...“ habe ich noch den Zyklus IIIb eingefügt und die Überschrift verändert.

Die Zuordnung zu den Varianten von Matrix D ist in der Tabelle im Kommentar zu B2 (Seite 20) angeführt.

B4 Verschiedene primitive pythagoräische Quadrupelfolgen aufgrund der Beziehung A[18]

$$
\mathbf{A} = \begin{array}{lcllll}
x_n & = & -x_{n-1} & -y_{n-1} & & +t_{n-1} \\
y_n & = & -x_{n-1} & & +z_{n-1} & +t_{n-1} \\
z_n & = & & -y_{n-1} & +z_{n-1} & +t_{n-1} \\
t_n & = & -x_{n-1} & -y_{n-1} & +z_{n-1} & +2t_{n-1}
\end{array}
$$

1.a) Die folgenden Rekursionsformeln lassen aus einem gegebenen primitiven pythagoräischen Zahlenquadrupel ein weiteres ebensolches hervorgehen:

Es gelte: ${x_{n-1}}^2 + {y_{n-1}}^2 + {z_{n-1}}^2 = {t_{n-1}}^2$

Dann folgt daraus: ${x_n}^2 + {y_n}^2 + {z_n}^2 = {t_n}^2$

Beispiel für: $x_0 = 2$ $y_0 = 3$ $z_0 = 6$ $t_0 = 7$

$$
\begin{array}{lcllll}
x_1 & = & -2 & -3 & +7 & & = 2 \\
y_1 & = & -2 & +6 & +7 & & = 11 \\
z_1 & = & -3 & +6 & +7 & & = 10 \\
t_1 & = & -2 & -3 & +6 & +14 & = 15
\end{array}
$$

$2^2 + 11^2 + 10^2 = 15^2$

b) Diesen Prozess kann man fortsetzen. In einer kleinen Tabelle sei der Prozess angedeutet:

$n =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
$x_n =$	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	
$y_n =$	3	11	23	39	59	83	111	143	179	219	263	311	363	····→
$z_n =$	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	
$t_n =$	7	15	27	43	63	87	115	147	183	223	267	315	367	

Das Bildungsgesetz für diese sehr spezielle primitive pythagoräische Quadrupelfolge ist leicht zu erkennen:

$$
\begin{array}{lclll}
x_n & = & & & 2 \\
y_n & = & 2n^2 & +6n & +3 \\
z_n & = & & +4n & +6 \\
t_n & = & 2n^2 & +6n & +7
\end{array}
$$

2) Etwas weniger speziell ist die folgende Quadrupelfolge:

$x_0 = 1$ $y_0 = 4$ $z_0 = 8$ $t_0 = 9$

$n =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
$x_n =$	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	
$y_n =$	4	16	30	52	76	108	142	184	228	280	334	
$z_n =$	8	13	18	23	28	33	38	43	48	53	58	····→
$t_n =$	9	21	35	57	81	113	147	189	233	285	339	

Georg Glöckler: Verschiedene primitive pythagoräische Quadrupelfolgen aufgrund der Beziehung A. Mathematisch-Astronomische Sektion am Goetheanum 17.4.2001 geändert Hä.

18 Quelle: Scan von MS, MAS 17.4.2001

3.) Das gleiche gilt für folgende Quadrupelfolgen:

$x_0 = 7 \quad y_0 = 24 \quad z_0 = 0 \quad t_0 = 25$

$n =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
$x_n =$	7	-6	7	-6	7	-6	7	-6	7	-6	7	-6	
$y_n =$	24	18	26	22	32	30	42	42	56	58	74	78	····→
$z_n =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
$t_n =$	25	19	27	23	33	31	43	43	57	59	75	79	

4.) $x_0 = 0 \quad y_0 = 7 \quad z_0 = 24 \quad t_0 = 25$

$x_n =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
$x_n =$	0	18	0	18	0	18	0	18	0	18	0	
$y_n =$	7	7^2	91	13^2	247	19^2	475	$\cdot 25^2$	775	31^2	1147	····→
$z_n =$	24	42	60	78	96	114	132	150	168	186	204	
$t_n =$	25	67	109	187	265	379	493	643	793	979	1165	

Diese Quadrupelfolge enthält eine Fülle von bemerkenswerten Gesetzen:

1. Es handelt sich hier um eine alternierende Folge von Quadrupeln und Tripeln
2. $Y_0 = 1 \cdot 7 \quad y_1 = 7 \cdot 7 \quad y_2 = 7 \cdot 13 \quad y_3 = 13^2 \quad y_4 = 13 \cdot 19 \quad y_5 = 19^2 \ \ldots$
3. $y_1 + y_3 = 2 \cdot t_2 \qquad y_1 - y_0 = z_1$

   $y_3 + y_5 = 2 \cdot t_4 \qquad y_3 - y_2 = z_3$

   $y_5 + y_7 = 2 \cdot t_6 \qquad y_5 - y_4 = z_5$

   $\vdots \qquad\qquad \vdots$

<u>Kommentar</u> (A. Hä.):

In diesem Dokument entspricht die „Beziehung A" der folgenden Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, und mit den obigen Bezeichnungen ist $A = D_5 E_2 E_1$, es handelt sich also um die Folge (28) aus B2.

Quadriert man diese Matrix A, so erhält man $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, sodass – mit den Bezeichnungen des Blattes – für alle $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung $x_{n+2} = x_n$ gilt.

Die in A^2 rechts unten enthaltene 3x3-Matrix ist – bis auf die Vorzeichen – identisch mit der Matrix für Tripel auf S.4, A^2 macht also aus einem pythagoräischen „Tripel" (0,a,b,c) wiederum ein solches.

Der auf solche Weise entstehende Wechsel zwischen Tripeln und Quadrupeln ist ein Thema, mit dem sich G. Glöckler mehrfach auseinandergesetzt hat. Die alternierenden Folgen werden auch in den Dokumenten B5 bis B8 behandelt, und die Teilfolgen der entstehenden Tripel hat er z.B. in „Das ägyptische Dreieck als Keim aller pythagoräischen Dreiecke“ untersucht.[19]

Das erste angeführte Beispiel mit dem Ausgangsquadrupel (2, 3, 6, 7) hat als Besonderheit $x_1 = x_{0,}$ sodass hier die x-Koordinate sogar konstant bleibt. Das für diese erste Folge angegebene Bildungsgesetz lässt sich mit vollständiger Induktion leicht beweisen.

Das zweite Beispiel ist mit der Rekursionsformel (28) aus B2 identisch. Man sieht den 2-Zyklus bei den x-Koordinaten und es fällt auf, dass die Folge der z_n arithmetisch ist, was bei allen Folgen, die mit A erzeugt werden, der Fall ist. Aus dem Bildungsgesetz mit Matrix A ergibt nämlich

die erste Zeile $x_n + x_{n-1} = -y_{n-1} + t_{n-1}$

und die 3. Zeile $z_n - z_{n-1} = -y_{n-1} + t_{n-1}$,

zusammen also $z_n - z_{n-1} = x_n + x_{n-1} = \text{konst}$.

So hat z.B. die zweite Quadrupelfolge bei z_n den konstanten Summanden $x_1 + x_2 = 1 + 4 = 5.$

Bei der dritten angeführte Quadrupelfolge mit dem Ausgangsquadrupel (7, 24, 0, 25) ist $x_n + x_{n-1} = 1$ und die Folge z_n wächst daher immer um 7 + (-6) = 1.

Bei der 4. Folge mit dem Ausgangsquadrupel (0, 7, 24, 25), also einer Umordnung des Starttupels der dritten Folge, wächst die Folge z_n immer um 18 (= 0+18).
Diese Folge liefert abwechselnd Tripel und Quadrupel (s.o.).

Die „bemerkenswerten Gesetze“, die G. Glöckler für die Folge 4) angefügt hat, sind leicht nachvollziehbar, aber nicht so leicht zu beweisen. Man kommt aber zurecht, wenn man die Folge in zwei Folgen aufteilt: eine für gerade Indizes und eine für ungerade:

Mit vollständiger Induktion lässt sich für gerades n beweisen:

$x_n = 0$	und	$x_{n+1} = 18$
$y_n = 9n^2 + 24n + 7$		$y_{n+1} = 9n^2 + 42n + 49$
$z_n = 18n + 24$		$z_{n+1} = 18n + 42$
$t_n = 9n^2 + 24n + 25$		$t_{n+1} = 9n^2 + 42n + 67$

Und hieraus kann man dann die angeführten Formeln herleiten.

19 Quelle: Gloeckler Liste Baum, Nr. 82

G. Kowol hat nun eine allgemeine Formel mitgeteilt, die für alle Folgen aus B4 gilt:

Sei der Ausgangsvektor (x_0, y_0, z_0, t_0) oder (x_1, y_1, z_1, t_1) mit (a, b, c, d) bezeichnet.
Dann gilt zunächst $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$.

Behauptung:

$$y_{2k} = \frac{d-b}{2}(2k)^2 + c \cdot 2k + b$$
$$z_{2k} = (d-b) \cdot 2k + c$$
$$t_{2k} = \frac{d-b}{2}(2k)^2 + c \cdot 2k + d$$

Das bestätigt man durch Nachrechnen.

Im Fall 1) ist (2, 3, 6, 7) der Ausgangsvektor und es ergibt sich genau das angegebene Bildungsgesetz. Wegen $x_0 = x_1$ *gilt es natürlich für alle n.*

Im Fall 4) ist entweder (0, 7, 24, 25) der Ausgangsvektor und man erhält die linke Seite der Formeln (S. 24), oder man beginnt mit (18, 49, 42, 67) und erhält die rechte Seite.

Im Fall 2) ist der Ausgangsvektor entweder (1, 4, 8, 9) oder (4, 16, 13, 21).
Man erhält somit im ersten Fall

$$y_{2k} = \frac{5}{2}(2k)^2 + 8 \cdot 2k + 4$$
$$z_{2k} = 5 \cdot 2k + 8$$
$$t_{2k} = \frac{5}{2}(2k)^2 + 8 \cdot 2k + 9$$

Analog im anderen Fall.

Genauso findet man im Fall 3) die entsprechenden Formeln.

B5 Wechselverhältnis zwischen pythagoräischen Zahlentripeln und Quadrupeln[20]

$$\begin{aligned} 1^2 + 16^2 + 128^2 &= 129^2 \\ 15^2 + 112^2 &= 113^2 \\ 1^2 + 14^2 + 98^2 &= 99^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1^2 + 14^2 + 98^2 &= 99^2 \\ 13^2 + 84^2 &= 85^2 \\ 1^2 + 12^2 + 72^2 &= 73^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1^2 + 12^2 + 72^2 &= 73^2 \\ 11^2 + 60^2 &= 61^2 \\ 1^2 + 10^2 + 50^2 &= 51^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1^2 + 10^2 + 50^2 &= 51^2 \\ 9^2 + 40^2 &= 41^2 \\ 1^2 + 8^2 + 32^2 &= 33^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1^2 + 8^2 + 32^2 &= 33^2 \\ 7^2 + 24^2 &= 25^2 \\ 1^2 + 6^2 + 18^2 &= 19^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1^2 + 6^2 + 18^2 &= 19^2 \\ 5^2 + 12^2 &= 13^2 \\ 1^2 + 4^2 + 8^2 &= 9^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1^2 + 4^2 + 8^2 &= 9^2 \\ 3^2 + 4^2 &= 5^2 \\ 1^2 + 2^2 + 2^2 &= 3^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^2 + 34^2 + 289^2 &= 291^2 \\ 32^2 + 255^2 &= 257^2 \\ 2^2 + 30^2 + 225^2 &= 227^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^2 + 30^2 + 225^2 &= 227^2 \\ 28^2 + 195^2 &= 197^2 \\ 2^2 + 26^2 + 169^2 &= 171^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^2 + 26^2 + 169^2 &= 171^2 \\ 24^2 + 143^2 &= 145^2 \\ 2^2 + 22^2 + 121^2 &= 123^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^2 + 22^2 + 121^2 &= 123^2 \\ 20^2 + 99^2 &= 101^2 \\ 2^2 + 18^2 + 81^2 &= 83^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^2 + 14^2 + 49^2 &= 51^2 \\ 12^2 + 35^2 &= 37^2 \\ 2^2 + 10^2 + 25^2 &= 27^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^2 + 10^2 + 25^2 &= 27^2 \\ 8^2 + 15^2 &= 17^2 \\ 2^2 + 6^2 + 9^2 &= 11^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^2 + 6^2 + 9^2 &= 11^2 \\ 4^2 + 3^2 &= 5^2 \\ 2^2 + 2^2 + 1^2 &= 3^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8^2 + 68^2 + 289^2 &= 297^2 \\ 60^2 + 221^2 &= 229^2 \\ 8^2 + 52^2 + 169^2 &= 177^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8^2 + 52^2 + 169^2 &= 177^2 \\ 44^2 + 117^2 &= 125^2 \\ 8^2 + 36^2 + 81^2 &= 89^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8^2 + 36^2 + 81^2 &= 89^2 \\ 28^2 + 45^2 &= 53^2 \\ 8^2 + 20^2 + 25^2 &= 33^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8^2 + 20^2 + 25^2 &= 33^2 \\ 12^2 + 5^2 &= 13^2 \\ 8^2 + 4^2 + 1^2 &= 9^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8^2 + 60^2 + 225^2 &= 233^2 \\ 52^2 + 165^2 &= 173^2 \\ 8^2 + 44^2 + 121^2 &= 129^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8^2 + 44^2 + 121^2 &= 129^2 \\ 36^2 + 77^2 &= 85^2 \\ 8^2 + 28^2 + 49^2 &= 57^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8^2 + 28^2 + 49^2 &= 57^2 \\ 20^2 + 21^2 &= 29^2 \\ 8^2 + 12^2 + 9^2 &= 17^2 \end{aligned}$$

↑ ↑ ↑

20 Quelle: MAS „Wechselverhältnis zwischen“ 17.05.2003, Gloeckler Liste Baum, Nr. 190, umformatiert von A.Hä.

$18^2 + 126^2 + 441^2 = 459^2$
$108^2 + 315^2 = 333^2$
$18^2 + 90^2 + 225^2 = 243^2$

$18^2 + 90^2 + 225^2 = 243^2$
$72^2 + 135^2 = 153^2$
$18^2 + 54^2 + 81^2 = 99^2$

$18^2 + 54^2 + 81^2 = 99^2$
$36^2 + 27^2 = 45^2$
$18^2 + 18^2 + 9^2 = 27^2$

$18^2 + 138^2 + 529^2 = 547^2$
$120^2 + 391^2 = 409^2$
$18^2 + 102^2 + 289^2 = 307^2$

$18^2 + 102^2 + 289^2 = 307^2$
$84^2 + 187^2 = 205^2$
$18^2 + 66^2 + 121^2 = 139^2$

$18^2 + 66^2 + 121^2 = 139^2$
$48^2 + 55^2 = 73^2$
$18^2 + 30^2 + 25^2 = 43^2$

$18^2 + 150^2 + 625^2 = 643^2$
$132^2 + 475^2 = 493^2$
$18^2 + 114^2 + 361^2 = 379^2$

$18^2 + 114^2 + 361^2 = 379^2$
$96^2 + 247^2 = 265^2$
$18^2 + 78^2 + 169^2 = 187^2$

$18^2 + 78^2 + 169^2 = 187^2$
$60^2 + 91^2 = 109^2$
$18^2 + 42^2 + 49^2 = 67^2$

$32^2 + 216^2 + 729^2 = 761^2$
$184^2 + 513^2 = 545^2$
$32^2 + 152^2 + 361^2 = 393^2$

$32^2 + 152^2 + 361^2 = 393^2$
$120^2 + 209^2 = 241^2$
$32^2 + 88^2 + 121^2 = 153^2$

$32^2 + 88^2 + 121^2 = 153^2$
$56^2 + 33^2 = 65^2$
$32^2 + 24^2 + 9^2 = 41^2$

$32^2 + 232^2 + 841^2 = 873^2$
$200^2 + 609^2 = 641^2$
$32^2 + 168^2 + 441^2 = 473^2$

$32^2 + 168^2 + 441^2 = 473^2$
$136^2 + 273^2 = 305^2$
$32^2 + 104^2 + 169^2 = 201^2$

$32^2 + 104^2 + 169^2 = 201^2$
$72^2 + 65^2 = 97^2$
$32^2 + 40^2 + 25^2 = 57^2$

$32^2 + 184^2 + 529^2 = 561^2$
$152^2 + 345^2 = 377^2$
$32^2 + 120^2 + 225^2 = 257^2$

$32^2 + 200^2 + 625^2 = 657^2$
$168^2 + 425^2 = 457^2$
$32^2 + 136^2 + 289^2 = 321^2$

$32^2 + 136^2 + 289^2 = 321^2$
$104^2 + 153^2 = 185^2$
$32^2 + 72^2 + 81^2 = 113^2$

$50^2 + 230^2 + 529^2 = 579^2$
$180^2 + 299^2 = 349^2$
$50^2 + 130^2 + 169^2 = 219^2$

$50^2 + 130^2 + 169^2 = 219^2$
$80^2 + 39^2 = 89^2$
$50^2 + 30^2 + 9^2 = 59^2$

$50^2 + 270^2 + 729^2 = 779^2$
$220^2 + 459^2 = 509^2$
$50^2 + 170^2 + 289^2 = 339^2$

$50^2 + 170^2 + 289^2 = 339^2$
$120^2 + 119^2 = 169^2$
$50^2 + 70^2 + 49^2 = 99^2$

$50^2 + 290^2 + 841^2 = 891^2$
$240^2 + 551^2 = 601^2$
$50^2 + 190^2 + 361^2 = 411^2$

$50^2 + 190^2 + 361^2 = 411^2$
$140^2 + 171^2 = 221^2$
$50^2 + 90^2 + 81^2 = 131^2$

$50^2 + 310^2 + 961^2 = 1101^2$
$260^2 + 651^2 = 701^2$
$50^2 + 210^2 + 441^2 = 491^2$

$50^2 + 210^2 + 441^2 = 491^2$
$160^2 + 231^2 = 281^2$
$50^2 + 110^2 + 121^2 = 171^2$

$50^2 + 230^2 + 529^2 = 579^2$
$180^2 + 299^2 = 349^2$
$50^2 + 130^2 + 169^2 = 219^2$

Kommentar (A. Hä):

In diesem Dokument sind die Folgen von unten nach oben zu lesen, der Rahmen fasst jeweils zusammen, was von einem Starttupel ausgeht. Offensichtlich wechseln sich Quadrupel und Tripel ab, Glöckler spricht gelegentlich von „alternierenden Folgen“. Das Zusammenziehen von 4 auf 3 und dann wieder ein Ausdehnen von 3 auf 4 hat G. Glöckler auch in Verbindung gebracht mit den 4 dreieckigen Punktgebieten, die von 3 Geraden gebildet werden, sowie - dual dazu - von den 4 dreiseitigen Geradengebieten, die von 3 Punkten gebildet werden.

In G. Glöcklers Nachlass finden sich mehrere Tabellen ähnlicher Art[21], für welche diese hier exemplarisch betrachtet werde.

21 z.B. Gloeckler Liste Baum, Nr. 58

Das Bildungsgesetz, mit dem man von einem Tripel a, b, c zum darüber stehenden Quadrupel u, v, w,t kommt, kann man z.B. so formulieren, dass
u = c - b,
v = u + a,
w = a + c,
t = u + w gilt.

Das andere Bildungsgesetz, mit dem man von Quadrupel u, v, w, t zum darüber stehenden Tripel a´, b´, c´ kommt, ist z.B.
a´ = u + v,
b´ = v + w,
c´ = b´ + u (oder auch c = v + t).

(Verknüpft man die beiden Schritte, so kommt man auf
a´ = a – 2b + 2c
b´ = 2a - b + 2c
c´ = 2a – 2b – 3c,

also – bis auf Vorzeichen – auf die Tripel-Erzeugungs-Matrix A von S.4.)

G. Glöckler hat das Auffinden der Bildungsgesetze hier – im Sinne des griechischen „Siehe!“ - dem Leser überlassen, ebenso den Beweis, dass sich dabei stets primitive pythagoräische Quadrupel und Tripel bilden.

Dieses Dokument gehört zum einen in das Umfeld der Arbeit „Drei elementare Quadratsummen“ (aus dem Nachlass übertragen von P. Baum im Juli 2019), zum andern zeigt es aber auch die Wirksamkeit der Matrix D:

Wählt man die Abbildung $D_5E_1E_2$, also die Rekursionsvorschrift (28) aus Nr. 8, so findet man bis auf die Reihenfolge genau obige Folgen.

Z.B. erhält man aus $\begin{pmatrix}1\\2\\2\\3\end{pmatrix}$ die Folge $\begin{pmatrix}0\\4\\3\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\8\\4\\9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\12\\5\\13\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\18\\6\\19\end{pmatrix}, \ldots$ die oben enthalten ist, allerdings sind dort die Zahlen der Größe nach geordnet.

Explizit sieht man aus $D_5E_1E_2 = \begin{pmatrix}-1 & -1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$,

dass für $x_{n-1}=0$, $y_{n-1}=b$, $z_{n-1}=a$ und $t_{n-1}=c$ folgt:

$x_n = -x_{n-1} - y_{n-1} \quad + t_{n-1} = c - b$ also die Formel für u

$y_n = -x_{n-1} \quad + z_{n-1} + t_{n-1} = a + c$ also die Formel für w

$z_n = \quad -y_{n-1} + z_{n-1} + t_{n-1} = -b + a + c$ also die Formel für v (=u+a) und

$t_n = -x_{n-1} - y_{n-1} + z_{n-1} + 2t_{n-1} = -b + a + 2c$ also die Formel für t (=u+w).

Ähnlich kann man das andere Bildungsgesetz für den Schritt „von 4 nach 3“ beweisen; man kann aber auch (leichter) mit der Umkehrabbildung argumentieren, indem man wieder von dem „Tripel“ (0,a,b,c) ausgeht.

Dadurch, dass die Matrix $D_5E_1E_2$ als „Motor“ dieser Folgen erkannt ist, ist auch klar, dass die Tupel alle primitiv und pythagoräisch sind.

Wenn man jedoch bei einem beliebigen pythagoräischen Quadrupel beginnt, kommt nicht unbedingt im nächsten Schritt ein Tripel heraus. Die Bedingung u=0 stellt sich also nicht von selbst ein.

Blickt man in die Liste der Rekursionen in B2, so findet man das „Alternieren“ (s.o.) bei den Folgen

(6), also $D_1E_1E_3$ mit den Spaltenvektoren ($-v_1,v_3,-v_2$), alternierend in der z-Koordinate,

(17), also $D_5E_2E_3$ mit den Spaltenvektoren ($v_3,-v_2,-v_1$), alternierend in der z-Koordinate,

(24), also $D_1E_1E_2$ mit den Spaltenvektoren ($-v_1,-v_3,v_2$), alternierend in der y-Koordinate,

(25), also $D_3E_2E_3$ mit den Spaltenvektoren ($v_2,-v_1,-v_3$), alternierend in der y-Koordinate,

(26), also $D_3E_1E_3$ mit den Spaltenvektoren ($-v_2,v_1,-v_3$), alternierend in der x-Koordinate,

(28), also $D_5E_1E_2$ mit den Spaltenvektoren ($-v_3,-v_2,v_1$), alternierend in der x-Koordinate.

G. Glöckler hat mindestens drei dieser Möglichkeiten verwendet. Er hat darüber hinaus aber auch alternierende Folgen gefunden, die m.E. mit Variation der Matrix D nicht zu erhalten sind.[22]

22 Siehe dazu den Fall m=1 in : Elementare_Quadratsummen_190831.pdf, S.4. Dort wechselt D_1 mit $D_1E_1E_3$ ab.

B6 Aus dem pythagoräischen Zahlentripel (3, 4, 5) gehen über pythagoräische Zahlenquadrupelfolgen 6 wesentlich verschiedene pythagoräische Tripelfolgen hervor:[23]

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x_{n+1}} &= \mathbf{x_n - y_n + t_n}\\
\mathbf{y_{n+1}} &= \mathbf{x_n - z_n + t_n}\\
\mathbf{z_{n+1}} &= \mathbf{- y_n - z_n + t_n}\\
\mathbf{t_{n+1}} &= \mathbf{x_n - y_n - z_n + 2\, t_n}
\end{aligned}
$$

n	=	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
x_n	=	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
y_n	=	4	8	12	18	24	32	40	50	60	72	84	**I**
z_n	=	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	
t_n	=	5	9	13	19	25	33	41	51	61	73	85	
x_n	=	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	
y_n	=	3	9	15	25	35	49	63	81	99	121	143	**II**
z_n	=	0	2	0	2	0	2	0	2	0	2	0	
t_n	=	5	11	17	27	37	51	65	83	101	123	145	
x_n	=	3	12	21	30	39	48	57	66	75	84	93	
y_n	=	-4	8	20	50	80	128	176	242	308	392	476	**III**
z_n	=	0	9	0	9	0	9	0	9	0	9	0	
t_n	=	5	17	29	59	89	137	185	251	317	401	485	
x_n	=	-4	-2	0	2	4							
y_n	=	3	1	-1	1	3	➔		Wie **II**				
z_n	=	0	2	0	2	0							
t_n	=	5	3	1	3	5							
x_n	=	4	12	20	28	36	44	52	60	68	76	84	
y_n	=	-3	9	21	49	77	121	165	225	285	361	437	**IV**
z_n	=	0	8	0	8	0	8	0	8	0	8	0	
t_n	=	5	17	29	57	85	129	173	233	293	369	445	
x_n	=	-3	-2	-1	0	1	2	3					
y_n	=	4	2	0	0	0	2	4	➔		Wie **I**		
z_n	=	0	1	0	1	0	1	0					
t_n	=	5	3	1	1	1	3	5					
x_n	=	-3	6	15	24	33	42	51	60	69	78	87	
y_n	=	-4	2	8	32	56	98	140	200	260	338	416	**V**
z_n	=	0	9	0	9	0	9	0	9	0	9	0	
t_n	=	5	11	17	41	65	107	149	209	269	347	425	
x_n	=	-4	4	12	20	28	36	44	52	60	68	76	
y_n	=	-3	1	5	25	45	81	117	169	221	289	357	**VI**
z_n	=	0	8	0	8	0	8	0	8	0	8	0	
t_n	=	5	9	13	33	53	89	125	177	229	297	365	

23 Quelle: Gloeckler Liste Baum, Nr. 57,
MAS: „Aus einem pythagoräischen Zahlentripel 3, 4, 5“, 1.5.2001; leicht verändert A.Hä.

<u>Kommentar</u> (A.Hä):

Bei der hier explizit angegebenen Rekursionsformel handelt es sich um $D_5E_2E_3 := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,

also die Folge (17) aus B2.

Quadriert man diese Matrix, so erhält man $(D_5E_2E_3)^2 := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Man sieht hieraus, dass bei jeder obigen Folge $z_n = z_{n+2}$, dass also die Werte für z_n alternieren oder evtl. sogar konstant sind. Startet man mit $w_0 = 0$, so ist

$z_1 = - y_0 + t_0$

So ist z.B. im Fall I $z_1 = - 4 + 5 = 1$,
ganz ähnlich wie oben (B5) bei den u-Werten (bzw. x-Werten).

Dass neben $z_0 = 0$ auch $z_1 = 0$ ist, kann nur im Fall $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ und $t_0 = 1$ auftreten, dann ist aber die Folge konstant.

Betrachtet man bei $(D_5E_2E_3)^2$ die durch Streichen der 3. Spalte und 3. Zeile entstehende Matrix,

so erhält man $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, also eine der drei Matrizen, mit denen man alle pythagoräischen <u>Tripel</u> erzeugen kann, und erhält so einen weiteren Blick auf die Tatsache, dass sich für $w_0 = 0$ stets Tripel mit Quadrupeln abwechseln.

Glöckler hat nun alle 8 Vorzeichenmöglichkeiten für die Startzahlen 3 und 4 ausprobiert und dabei herausgefunden, dass hier zwei der entstehenden Folgen jeweils in eine der anderen Folgen einmünden und so nur einen “Vorspann” dazufügen, ansonsten gleiche Folgenglieder liefern, sodass nur 6 Folgen grundsätzlich verschieden sind.

Wählt man dagegen das Zahlentripel 5,12,0,13, so ergeben sich 7 grundsätzlich verschiedene Folgen; die Folge mit dem Startwert -5,12,0,13 mündet (nach 10 Schritten) in den Startwert 5,12,0,13.

Ähnlich verhält es sich mit dem Start bei -7,24,0,25, wo man über 1,0,0,1 zu 7,24,0,25 gelangt und bei allen anderen Vorzeichenvariationen insgesamt 7 echt verschiedene Folgen erhält. Dazu siehe unten B7. Im Dokument 61 (MAS 1.5.2001) hat G. Glöckler dasselbe Tripel mit der Matrix $D_1E_1E_3$ abgebildet, mit demselben Resultat.

Beim Startwert 1,0,0,1 gibt es sogar nur 3 verschiedene Folgen.

Jedoch ergeben sich für 20,21,0,29 lauter verschiedene, also 8 Folgen, die man unten bei B8 aufgelistet findet.

B7 Aus dem pythagoräischen Tripel 7, 24, 25 gehen 7 verschiedene pythagoräische Tripelfolgen bzw. 7 pythagoräische Quadrupelfolgen hervor[24]

↑ wird zu 7,24,0,25

$$\begin{aligned}1^2 + 0^2 &= 1^2\\ 1^2 + 2^2 + 2^2 &= 3^2\\ 3^2 + 4^2 &= 5^2\\ 1^2 + 4^2 + 8^2 &= 9^2\\ 5^2 + 12^2 &= 13^2\\ 1^2 + 6^2 + 18^2 &= 19^2\end{aligned}$$

↑

$$\begin{aligned}13^2 + 84^2 &= 85^2\\ 1^2 + 12^2 + 72^2 &= 73^2\\ 11^2 + 60^2 &= 61^2\\ 1^2 + 10^2 + 50^2 &= 51^2\\ 9^2 + 40^2 &= 41^2\\ 1^2 + 8^2 + 32^2 &= 33^2\end{aligned}$$

↑

$$\begin{aligned}301^2 + 900^2 &= 949^2\\ 49^2 + 252^2 + 648^2 &= 697^2\\ 203^2 + 346^2 &= 445^2\\ 49^2 + 154^2 + 242^2 &= 291^2\\ 88^2 + 105^2 &= 137^2\\ 49^2 + 32^2 + 56^2 &= 81^2\end{aligned}$$

↑

$$\begin{aligned}132^2 + 475^2 &= 493^2\\ 18^2 + 114^2 + 361^2 &= 379^2\\ 96^2 + 247^2 &= 265^2\\ 18^2 + 78^2 + 169^2 &= 187^2\\ 60^2 + 91^2 &= 109^2\\ 18^2 + 42^2 + 49^2 &= 67^2\end{aligned}$$

7,24,0,25
7,-24,0,25
-7,-24,0,25
-7,24,0,25
$7^2 + 24^2 = 25^2$
24,7,0,25
-24,-7,0,25
-24,7,0,25
24,-7,0,25

$$\begin{aligned}49^2 + 18^2 + 42^2 &= 67^2\\ 60^2 + 91^2 &= 109^2\\ 49^2 + 140^2 + 200^2 &= 249^2\\ 189^2 + 340^2 &= 389^2\\ 49^2 + 238^2 + 578^2 &= 627^2\\ 287^2 + 816^2 &= 865^2\end{aligned}$$

↓

$$\begin{aligned}18^2 + (-6)^2 + 1^2 &= 19^2\\ (-5)^2 + 12^2 &= 13^2\\ 18^2 + 30^2 + 25^2 &= 43^2\\ 48^2 + 55^2 &= 73^2\\ 18^2 + 66^2 + 121^2 &= 139^2\\ 84^2 + 187^2 &= 205^2\end{aligned}$$

↓

$$\begin{aligned}32^2 + 49^2 + 56^2 &= 81^2\\ 88^2 + 105^2 &= 137^2\\ 32^2 + 120^2 + 225^2 &= 257^2\\ 152^2 + 345^2 &= 377^2\\ 32^2 + 184^2 + 529^2 &= 561^2\\ 216^2 + 713^2 &= 745^2\end{aligned}$$

↓

$$\begin{aligned}32^2 + 8^2 + 1^2 &= 33^2\\ 9^2 + 40^2 &= 41^2\\ 32^2 + 72^2 + 81^2 &= 113^2\\ 104^2 + 153^2 &= 185^2\\ 32^2 + 136^2 + 289^2 &= 321^2\\ 168^2 + 425^2 &= 457^2\end{aligned}$$

↓

$$A\quad \begin{aligned}x_n &= x_{n-1} - y_{n-1} + t_{n-1}\\ y_n &= x_{n-1} - z_{n-1} + t_{n-1}\\ z_n &= - y_{n-1} - z_{n-1} + t_{n-1}\\ t_n &= x_{n-1} - y_{n-1} - z_{n-1} + 2t_{n-1}\end{aligned}\qquad A^{-1}\quad \begin{aligned}x_{n-1} &= x_n + y_n - t_n\\ y_{n-1} &= -x_n - z_n + t_n\\ z_{n-1} &= -y_n - z_n + t_n\\ t_{n-1} &= -x_n - y_n - z_n + 2t_n\end{aligned}$$

<u>Kommentar</u> (A.Hä.):
Hier handelt es sich um die Matrix $D_5E_2E_3$, also um die Folge (17) aus B2, mit der Besonderheit, dass in diesem Fall 7 verschiedene Folgen entstehen. Siehe dazu auch Kommentar zu B6.
Im Dokument Nr. 61 vom 23.1.2001 aus Gloeckler Liste Baum (MAS „Pyth. Tripel-Folgen“ 1.5.2001) betrachtet Glöckler dasselbe Quadrupel, allerdings unter der Abbildung $D_1E_1E_3$ (= Folge 6 in B2), und erhält auch 7 verschiedene Folgen.

24 Quelle: Gloeckler Liste Baum, Nr. 60,
MAS: „Aus einem pyth. Tripel_24.4.03“, 17.5.2003. Umformatiert von A.Hä.

B8 Die 8 Formeln zur Berechnung der 8 alternierenden Folgen, die aus einem pythagoräischen Zahlentripel mit A hervorgehen[25]

$$
\mathbf{A}\qquad
\begin{aligned}
x_n &= x_{n-1} - y_{n-1} + t_{n-1}\\
y_n &= x_{n-1} - z_{n-1} + t_{n-1}\\
z_n &= -\,y_{n-1} - z_{n-1} + t_{n-1}\\
t_n &= x_{n-1} - y_{n-1} - z_{n-1} + 2t_{n-1}
\end{aligned}
$$

I und II

$$
\begin{aligned}
x_{2n+1} &= +u - (2n+1)\,v + (2n+1)\,t\\
y_{2n+1} &= +(2n+1)\,u - 2n(n+1)\,v + (2n^2+2n+1)\,t\\
z_{2n+1} &= -\,v + t\\
t_{2n+1} &= +(2n+1)\,u - (2n^2+2n+1)\,v + 2(n^2+n+1)\,t
\end{aligned}
$$

I_n und II_n

$$
\begin{aligned}
x_{2n} &= +u - 2n\,v + 2n\,t\\
y_{2n} &= +2n\,u - (2n^2-1)\,v + 2n^2\,t\\
z_{2n} &= 0\\
t_{2n} &= +2n\,u - 2n^2\,v + (2n^2+1)\,t
\end{aligned}
$$

III und IV

$$
\begin{aligned}
x_{2n+1} &= +u + (2n+1)\,v + (2n+1)\,t\\
y_{2n+1} &= +(2n+1)\,u + 2n(n+1)\,v + (2n^2+2n+1)\,t\\
z_{2n+1} &= v + t\\
t_{2n+1} &= +(2n+1)\,u + (2n^2+2n+1)\,v + 2(n^2+n+1)\,t
\end{aligned}
$$

III_n und IV_n

$$
\begin{aligned}
x_{2n} &= +u + 2n\,v + 2n\,t\\
y_{2n} &= +2n\,u + (2n^2-1)\,v + 2n^2\,t\\
z_{2n} &= 0\\
t_{2n} &= +2n\,u + 2n^2\,v + (2n^2+1)\,t
\end{aligned}
$$

V und VI

$$
\begin{aligned}
x_{2n+1} &= -(2n+1)\,u + v + (2n+1)\,t\\
y_{2n+1} &= -2n(n+1)\,u + (2n+1)\,v + (2n^2+2n+1)\,t\\
z_{2n+1} &= -u + t\\
t_{2n+1} &= -(2n^2+2n+1)\,u + (2n+1)\,v + 2(n^2+n+1)\,t
\end{aligned}
$$

V_n und VI_n

$$
\begin{aligned}
x_{2n} &= -2n\,u + v + 2n\,t\\
y_{2n} &= -(2n^2-1)\,u + 2n\,v + 2n^2\,t\\
z_{2n} &= 0\\
t_{2n} &= 2n^2\,u + 2n\,v + (2n^2+1)\,t
\end{aligned}
$$

VII und VIII

$$
\begin{aligned}
x_{2n+1} &= (2n+1)\,u + v + (2n+1)\,t\\
y_{2n+1} &= 2n(n+1)\,u + (2n+1)\,v + (2n^2+2n+1)\,t\\
z_{2n+1} &= u + t\\
t_{2n+1} &= (2n^2+2n+1)\,u + (2n+1)\,v + 2(n^2+n+1)\,t
\end{aligned}
$$

VII_n und $VIII_n$

$$
\begin{aligned}
x_{2n} &= 2n\,u + v + 2n\,t\\
y_{2n} &= (2n^2-1)\,u + 2n\,v + 2n^2\,t\\
z_{2n} &= 0\\
t_{2n} &= +2n\,u + 2n\,v + (2n^2+1)\,t
\end{aligned}
$$

Beispiel für V und V_n

m	0	1	2	3	4	5	6	7	
x_m	5	20	28	36	44	52	60	68	
y_m	12	25	45	81	117	169	221	289	→
z_m	0	8	0	8	0	8	0	8	
t_m	13	33	53	89	125	177	229	297	

Bei der Berechnung der speziellen alternierenden Folgen sind abwechselnd die linke und die entsprechende rechte Formel maßgebend.

25 Quelle: Gloeckler Liste Baum, Nr. 91,
MAS: „Die 8 Formeln zur Berechnung_6.5.03“, 30.7.2003

Kommentar (A.Hä):

Hier werden für die alternierenden Folgen, die sich mit Hilfe der Matrix $D_5E_2E_3$ ergeben (siehe oben B6 und B7 und Rekursionsvorschrift (17) aus B2), allgemeine Folgenglieder einer „Doppelfolge“ für die ungeraden Indizes (links, Quadrupel) und die geraden (rechts, Tripel) angegeben, die ohne Kenntnis der vorangehenden Folgenglieder auskommen und nur vom Index n des Folgengliedes (und dem Startwert) abhängen.

Zu beweisen sind die Formeln mit vollständiger Induktion, indem man z.B. von der Induktionsvoraussetzung I_n für das 2n-te Folgenglied ausgeht, mittels Abbildung A zeigt, dass dann die Formel I für das (2n+1)-te Folgenglied stimmt, und daraus dann mit A die zu zeigende Behauptung I_{n+1} für das (2n+2)-te Folgenglied herleitet. Der Induktionsanfang für n=0 stimmt offensichtlich.

Natürlich erhält man auch alle Folgen, wenn man nicht die Formeln variiert, sondern die Vorzeichen von u und v, sodass man die übrigen Formeln nicht mehr zu beweisen bräuchte.

Die Folgen I, III, V, VII erhält man z.B. für ein Zahlenpaar u und v; setzt man ihre Gegenzahlen ein, so erhält man die Folgen II, IV, VI, VIII.

Als Beispiel werde das Tripel 20,21,29 in die angegebenen Formeln eingesetzt:

u=20, v=21, t=29	0	1	2	3	4	5	6	7
	20	28	36	44	52	60	68	76
I	21	49	77	121	165	225	285	361
	0	8	0	8	0	8	0	8
	29	57	85	129	173	233	293	369
	20	70	120	170	220	270	320	370
III	-21	49	119	289	459	729	999	1369
	0	50	0	50	0	50	0	50
	29	99	169	339	509	779	1049	1419
	21	30	39	48	57	66	75	84
V	20	50	80	128	176	242	308	392
	0	9	0	9	0	9	0	9
	29	59	89	137	185	251	317	401
	21	70	119	168	217	266	315	364
VII	-20	50	120	288	456	722	988	1352
	0	49	0	49	0	49	0	49
	29	99	169	337	505	771	1037	1401

u= -20, v=-21, t=29	0	1	2	3	4	5	6	7
	-20	30	80	130	180	230	280	330
II	-21	9	39	169	299	529	759	1089
	0	50	0	50	0	50	0	50
	29	59	89	219	349	579	809	1139
	-20	-12	-4	4	12	20	28	36
IV	21	9	-3	1	5	25	45	81
	0	8	0	8	0	8	0	8
	29	17	5	9	13	33	53	89
	-21	28	77	126	175	224	273	322
VI	-20	8	36	162	288	512	736	1058
	0	49	0	49	0	49	0	49
	29	57	85	211	337	561	785	1107
	-21	-12	-3	6	15	24	33	42
VIII	20	8	-4	2	8	32	56	98
	0	9	0	9	0	9	0	9
	29	17	5	11	17	41	65	107

Man sieht, dass die Folgen IV und VIII im Diagonalenwert t zuerst einmal abnehmen, sie kommen aber nicht wieder zu einem Ausgangswert der anderen Folgen zurück, sodass es wirklich 8 ganz verschiedene Folgen sind und wir hier wohl den allgemeinen Fall vor uns haben – im Gegensatz zu den Folgen in B6 und B7.

B9 Spezielle pythagoräische Zahlenquadrupel[26]

Für das pythagoräische Zahlenquadrupel (x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}, t_{n-1}), das der Bedingung

$$x^2_{n-1} + y^2_{n-1} + z^2_{n-1} = t^2_{n-1}$$

genügt, lassen sich weitere solche Quadrupel rekursiv ermitteln. Es gibt 28 verschiedene Rekursionsformeln, im Folgenden wählen wir eine davon aus:

$$\left.\begin{aligned} x_n &= \phantom{- x_{n-1}} \quad y_{n-1} + z_{n-1} + t_{n-1} \\ y_n &= - x_{n-1} \phantom{+ y_{n-1}} + z_{n-1} + t_{n-1} \\ z_n &= - x_{n-1} + y_{n-1} \phantom{+ z_{n-1}} + t_{n-1} \\ t_n &= - x_{n-1} + y_{n-1} + z_{n-1} + 2t_{n-1} \end{aligned}\right\} \quad \mathbf{I}$$

Beispiel: Es gilt : $1^2 + 6^2 + 18^2 = 19^2$

Also ist (1, 6, 18, 19) ein pythagoräisches Zahlenquadrupel. Entsprechend der Formel I lässt sich daraus sofort ein neues pythagoräisches Zahlenquadrupel bestimmen:

x_{n-1}	=	1	x_n	=			+ 18	+ 19	=	43
y_{n-1}	=	6	y_n	=	-1		+ 18	+ 19	=	36
z_{n-1}	=	18	z_n	=	-1	+ 6		+ 19	=	24
t_{n-1}	=	19	t_n	=	-1	+ 6	+ 18	+ 38	=	61

Also gilt: $24^2 + 36^2 + 43^2 = 61^2$

Für das Folgende wählen wir neue Bezeichnungen:

x_0 =: u y_0 =: v z_0 =: w und t_0 =: t mit $u^2 + v^2 + w^2 = t^2$

Für die Quadrupelfolge (x_n, y_n, z_n, t_n) gelten dann die folgenden Formeln, die (einmal gefunden) leicht nachzuprüfen sind:

$$\left.\begin{aligned} x_{1n} &= (1-n^2)\cdot u + n\cdot v + n\cdot w + n^2\cdot t \\ y_{1n} &= -n\cdot u + \frac{1}{2}\left[1+(-1)^n\right] v + \frac{1}{2}\left[1+(-1)^{n+1}\right] w + n\cdot t \\ z_{1n} &= -n\cdot u + \frac{1}{2}\left[1+(-1)^{n+1}\right] v + \frac{1}{2}\left[1+(-1)^n\right] w + n\cdot t \\ t_{1n} &= -n^2\cdot u + n\cdot v + n\cdot w + (n^2+1)\cdot t \end{aligned}\right\} \quad \mathbf{I_a}$$

Beispiel für u = 1, v = 4, w = 8 und t = 9: dann ist $1^2 + 4^2 + 8^2 = 9^2$

und für n = 3 gilt dann:

26 Quelle: MAS: „Spezielle pythagoräische Zahlenquadrupel“, 02.05.2001, mit kleinen Änderungen von A.Hä.

x_3	=	$-8 \cdot 1$	$+3 \cdot 4$	$+3 \cdot 8$	$+9 \cdot 9$	=	109
y_3	=	$-3 \cdot 1$	$+0 \cdot 4$	$+1 \cdot 8$	$+3 \cdot 9$	=	32
z_3	=	$-3 \cdot 1$	$+1 \cdot 4$	$+0 \cdot 8$	$+3 \cdot 9$	=	28
t_3	=	$-9 \cdot 1$	$+3 \cdot 4$	$+3 \cdot 8$	$+10 \cdot 9$	=	117

In der Tat ist: $28^2 + 32^2 + 109^2 = 117^2$

„Keimquadrupel“

Bemerkenswert ist nun, dass es Folgen von Quadrupeln gibt, die in schöner Weise aus einem „Keim-Quadrupel“ hervorgehen.

Ein solches „Keim-Quadrupel“ ist z.B. (0, 0, 1,1), denn es ist $0^2 + 0^2 + 1^2 = 1^2$.

Wendet man für n = 1, 2, 3 ... die zuletzt beschriebenen Formeln auf dieses Quadrupel an , so ergibt sich die folgende Quadrupelfolge:

$n = 0$	$0^2 + 0^2 + 1^2 = 1^2$
$n = 1$	$1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$
$n = 2$	$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$
$n = 3$	$3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$
$n = 4$	$4^2 + 5^2 + 20^2 = 21^2$
$n = 5$	$5^2 + 6^2 + 30^2 = 31^2$
$n = 6$	$6^2 + 7^2 + 42^2 = 43^2$
$n = 7$	$7^2 + 8^2 + 56^2 = 57^2$
$n = 8$	$8^2 + 9^2 + 72^2 = 73^2$
$\vdots$	$\vdots$

Unmittelbar erkennt man hier das allgemeine Bildungsgesetz dieser pythagoräischen Quadrupelfolge:

$$n^2 + (n+1)^2 + [n(n+1)]^2 = [1 + n(n+1)]^2 \qquad (2)$$

Einem anderen „Quadrupelkeim“ liegt das ägyptische Dreieck zugrunde:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

In unserer Betrachtungsweise ist dann z.B.

	$3^2 + 4^2 + 0^2 = 5^2$	a)
oder	$4^2 + 3^2 + 0^2 = 5^2$	b)
oder	$0^2 + 3^2 + 4^2 = 5^2$	c)

Wenden wir auf diese Quadrupel unsere Folgenformel Ia an, so ergibt sich folgendes:

a)

$n = 0$	$3^2 + 4^2 + 0^2$	$= 5^2$
$n = 1$	$2^2 + 6^2 + 9^2$	$= 11^2$
$n = 2$	$4^2 + 8^2 + 19^2$	$= 21^2$
$n = 3$	$6^2 + 10^2 + 33^2$	$= 35^2$
$n = 4$	$8^2 + 12^2 + 51^2$	$= 53^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Das Bildungsgesetz der Folge ist unmittelbar ersichtlich.

$$(2n)^2 + [2(n+2)]^2 + (2n^2 + 4n + 3)^2 = (2n^2 + 4n + 5)^2 \qquad (3)$$

b)

$n = 0$	$4^2 + 3^2 + 0^2$	$= 5^2$
$n = 1$	$1^2 + 4^2 + 8^2$	$= 9^2$
$n = 2$	$2^2 + 5^2 + 14^2$	$= 15^2$
$n = 3$	$3^2 + 6^2 + 22^2$	$= 23^2$
$n = 4$	$4^2 + 5^2 + 32^2$	$= 33^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Das Bildungsgesetz sieht wie folgt aus:

$$n^2 + (n+3)^2 + (n^2 + 3n + 4)^2 = (n^2 + 3n + 5)^2 \qquad (4)$$

c)

$n = 0$	$0^2 + 3^2 + 4^2$	$= 5^2$
$n = 1$	$8^2 + 9^2 + 12^2$	$= 17^2$
$n = 2$	$13^2 + 14^2 + 34^2$	$= 39^2$
$n = 3$	$18^2 + 19^2 + 66^2$	$= 71^2$
$n = 4$	$23^2 + 24^2 + 108^2$	$= 113^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Auch hier ist das Bildungsgesetz relativ leicht erkennbar:

$$(5n + 3)^2 + (5n + 4)^2 + [n(5n + 7)]^2 = [5n^2 + 7n + 5]^2 \qquad (5)$$

Aus dem Vorangehenden ergeben sich natürlich viele weitere Fragen:

$19^2 = 361$ ist z.B. eine Quadratzahl, welche mit zwei verschiedenen Quadrupeln verbunden ist.

$$19^2 = 1^2 + 6^2 + 18^2$$
$$= 6^2 + 10^2 + 15^2$$

Die nächste ungerade Quadratzahl $21^2 = 441$ ist schon mit 6 verschiedenen pythagoräischen Zahlenquadrupeln verbunden.

$21^2 =$	$4^2 + 5^2 + 20^2$	$4 + 5 + 20$	$= 29$
$=$	$4^2 + 8^2 + 19^2$	$4 + 8 + 19$	$= 31$
$=$	$4^2 + 13^2 + 16^2$	$4 + 13 + 16$	$= 33$
$=$	$6^2 + 9^2 + 18^2$	$6 + 9 + 18$	$= 33$
$=$	$8^2 + 11^2 + 16^2$	$8 + 11 + 16$	$= 35$
$=$	$14^2 + 7^2 + 14^2$	$14 + 7 + 14$	$= 35$

Bemerkenswert unter diesen Quadrupeln ist das dritte und vierte. Hier gilt:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & 21^2 & = & 4^2 & + & 13^2 & + & 16^2 & = & 6^2 & + & 9^2 & + & 18^2 \\
 & & 33 & = & 4 & + & 13 & + & 16 & = & 6 & + & 9 & + & 18 \\
18^2 & = & 324 & = & 4 \cdot 13 & + & 13 \cdot 16 & + & 16 \cdot 4 & = & 6 \cdot 9 & + & 9 \cdot 18 & + & 18 \cdot 6
\end{array}
$$

$$18 + 21 + 33 = 72$$

$$33^2 - 21^2 = 2 \cdot 18^2 = 9 \cdot 72$$

$$4 + 13 + 16 + 6 + 9 + 18 = 66$$

$$21 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = d_6$$

Ähnliche Überlegungen lassen sich mit dem fünften und sechsten Quadrupeln anstellen.

Kommentar (A. Hä):

Es handelt sich um das Rekursionsgesetz (2) aus B2, also um DE_1, bei dem hier verschiedene Starttupel eingesetzt werden.

Z.B. entstehen aus $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ die Folgenglieder $\begin{pmatrix}2\\2\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6\\2\\3\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}12\\4\\3\\13\end{pmatrix},\begin{pmatrix}20\\4\\5\\21\end{pmatrix},\ldots,$ die oben beim Abschnitt „Keimquadrupel“ in veränderter Reihenfolge angeführt ist. Diese Folge liegt bemerkenswert dicht, der Unterschied der x- und t- Koordinaten beträgt nur 1, ebenso der zwischen den y- und z-Koordinaten, auch ist der Zuwachs der y- und z-Koordinaten mit 0 / 2 sehr gering.

Das Vorrücken der y- und der z-Koordinaten drückt sich in den angegebenen Rekursionsformeln Ia aus, die Glöckler in Abhängigkeit vom Folgenindex gebildet hat. Diese Formeln lassen sich mit vollständiger Induktion direkt beweisen und gelten für jedes beliebige Starttupel.

Im Unterschied zu den alternierenden Folgen aus B8 benötigt Glöckler hier keine Doppelfolge, sondern er findet eine Formel für alle Folgenglieder.

Die 4 Formeln (2) bis (5) gelten nur für die jeweils angegebenen Startwerte (deren Koordinaten-Reihenfolge wurde in den Listen jedoch z.T. geändert), während die Formal Ia für alle Startwerte gilt.

Die beiden am Ende angeführten Quadrupel gehören eigentlich in ein ganz anderes Forschungsfeld Glöcklers[27]. Sie haben offensichtlich die Eigenschaft, dass nicht nur die Quadratsumme $x^2 + y^2 + z^2$ der Komponenten übereinstimmt, sondern auch die Koordinatensumme $x + y + z$, was wohl ein Rarität ist! Dass in diesem Fall dann auch die Summen der gemischten Produkte (in der 3. Zeile) übereinstimmen, ergibt sich aus der binomischen Formel.
Im Anschluss werden noch Bezüge diese Quadrupel zum „Patriarchen-Alter“ 72 und zur „Mysterienzahl“ 6 hergestellt.

27 Weitere „bemerkenswerte Quadratsummen“ finden sich in Gloeckler Liste Baum, Nr. 70

B10 Besondere primitive pythagoräische Quadrupelfolgen[28]

a)	$1^2 +$	$4^2 +$	$8^2 =$	9^2	b)	$2^2 +$	$6^2 +$	$9^2 =$	11^2
	$1^2 +$	$6^2 +$	$18^2 =$	19^2		$2^2 +$	$10^2 +$	$25^2 =$	27^2
	$1^2 +$	$8^2 +$	$32^2 =$	33^2		$2^2 +$	$14^2 +$	$49^2 =$	51^2
	$1^2 +$	$10^2 +$	$50^2 =$	51^2		$2^2 +$	$18^2 +$	$81^2 =$	83^2
c)	$3^2 +$	$2^2 +$	$6^2 =$	7^2	d)	$4^2 +$	$1^2 +$	$8^2 =$	9^2
	$3^2 +$	$4^2 +$	$12^2 =$	13^2		$4^2 +$	$3^2 +$	$12^2 =$	13^2
	$3^2 +$	$6^2 +$	$22^2 =$	23^2		$4^2 +$	$5^2 +$	$20^2 =$	21^2
	$3^2 +$	$8^2 +$	$36^2 =$	37^2		$4^2 +$	$7^2 +$	$32^2 =$	33^2
	$3^2 +$	$10^2 +$	$54^2 =$	55^2		$4^2 +$	$9^2 +$	$48^2 =$	49^2
	$3^2 +$	$12^2 +$	$76^2 =$	77^2		$4^2 +$	$11^2 +$	$68^2 =$	77^2
e)	$4^2 +$	$8^2 +$	$1^2 =$	9^2	f)	$5^2 +$	$0^2 +$	$12^2 =$	13^2
	$4^2 +$	$16^2 +$	$13^2 =$	21^2		$5^2 +$	$2^2 +$	$14^2 =$	15^2
	$4^2 +$	$24^2 +$	$33^2 =$	41^2		$5^2 +$	$4^2 +$	$20^2 =$	21^2
	$4^2 +$	$32^2 +$	$61^2 =$	69^2		$5^2 +$	$6^2 +$	$30^2 =$	31^2
	$4^2 +$	$40^2 +$	$97^2 =$	105^2		$5^2 +$	$8^2 +$	$44^2 =$	45^2

Georg Glöckler: Besondere Quadrupelfolgen, Mathematisch-Astronomische Sektion am Goetheanum, 23.4.2001

Kommentar (A. Hä.):

In diesem Dokument sind sechs Folgen dargestellt, bei denen jeweils im Quadrupel (a,b,c,d) die erste Zahl a konstant ist und die zweite arithmetisch mit Zuwachs 2, 4 oder 8 voranschreitet.
Die Differenz d - c beträgt meistens 1, je einmal 2 und 8.

G. Glöckler gibt nicht an, auf welche Weise er diese Folgen gefunden hat.

Zum einen hat *G. Kowol* für diese Folgen Bildungsgesetze mitgeteilt:

Für ungerades $a = 2k+1$ erhält man die Folgen mit $d - c = 1$ mit Hilfe der Formel

$$(2k+1)^2 + (2n)^2 + (2k^2 + 2k + 2n^2)^2 = (2k^2 + 2k + 2n^2 + 1)^2.$$

Für gerades $a = 2k$ gibt es mehrere Formeln. Im Folgenden diejenige, die den Fall b) mit einbezieht:

$$(2k)^2 + (2kn)^2 + (k^2 n^2 + k^2 - 1)^2 = (k^2 n^2 + k^2 + 1)^2.$$

Das liefert für $k = 1$

$$2^2 + (2n)^2 + n^4 = (n^2 + 2)^2,$$

also die allgemeine Formel für b). Damit sich primitive Quadrupel ergeben, muss n ungerade sein. Für $k = 2$ ergibt sich

$$4^2 + (4n)^2 + (4n^2 + 3)^2 = (4n^2 + 5)^2.$$

Das ist eine Folge, die G. Glöckler nicht aufgelistet hat.

28 Quelle: MAS „Besondere Quadrupelfolgen“, 03.05.2001

Sie beginnt mit $4^2 + 4^2 + 7^2 = 9^2$, $4^2 + 8^2 + 19^2 = 21^2$. Letztere Beziehung kommt aber auf S. 37 unten vor.

Interessant ist, dass die beiden Außenglieder bei den Quadrupeln $(4, 4n, 4n^2+3, 4n^2+5)$ und $(4, 8n, 4n^2 + 3, 4n^2 + 5)$ übereinstimmen. Letzteres liefert gerade die Formel im Fall e).

Zum andern gibt die in B4 vorgestellte Matrix $A=D_5E_2E_1$ einen Hinweis, wie man solche Folgen „designen“ könnte: Dort hat die Folge 1b) schon fast alle gewünschten Eigenschaften, dass nämlich die x-Werte konstant sind und die z-Werte arithmetisch anwachsen, und zwar mit dem Zuwachs $x_1 + x_2$, der hier 4 beträgt.

Wählt man als Startwert $v=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$, so erhält man die Teilfolge $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\8\\4\\9\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\18\\6\\19\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\32\\8\\33\end{pmatrix}$, die – bis auf die Vertauschung der 2. und 3. Koordinate – die obige Folge a) darstellt.

Wählt man als Startwert $v=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$, so erhält man die Teilfolge $\begin{pmatrix}2\\1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\9\\6\\11\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\25\\10\\27\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\49\\14\\51\end{pmatrix}$, also b).

Der Startwert $v=\begin{pmatrix}3\\6\\2\\7\end{pmatrix}$ liefert die Teilfolge $\begin{pmatrix}3\\6\\2\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\12\\4\\13\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\22\\6\\23\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\36\\8\\37\end{pmatrix}$, also das Beispiel c).

Die übrigen Folgen erhält man z.B. durch die Startwerte $\begin{pmatrix}-3\\4\\0\\57\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\1\\8\\9\end{pmatrix}\text{und}\begin{pmatrix}5\\12\\0\\13\end{pmatrix}$,

die von G. Kowol zusätzlich angeführte Folge durch den Startwert $v=\begin{pmatrix}4\\7\\4\\9\end{pmatrix}$.

B11: Pythagoräische Zahlenquadrupel mit "gleichen Basisdifferenzen" (B)[29]

↑

a)
$$\begin{aligned} 921^2 + 924^2 + 928^2 &= 1601^2 \\ 309^2 + 312^2 + 316^2 &= 541^2 \\ 63^2 + 66^2 + 70^2 &= 115^2 \\ 19^2 + 22^2 + 26^2 &= 39^2 \\ 1^2 + 4^2 + 8^2 &= 9^2 \end{aligned}$$

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

b)
$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 2^2 &= 3^2 \\ 23^2 + 24^2 + 24^2 &= 41^2 \\ 329^2 + 330^2 + 330^2 &= 571^2 \\ 4591^2 + 4592^2 + 4592^2 &= 7953^2 \\ 63'953^2 + 63'954^2 + 63'954^2 &= 110'771^2 \end{aligned}$$

↓

↑

c)
$$\begin{aligned} 1865^2 + 1870^2 + 1882^2 &= 3243^2 \\ 947^2 + 952^2 + 964^2 &= 1653^2 \\ 127^2 + 132^2 + 144^2 &= 233^2 \\ 61^2 + 66^2 + 78^2 &= 119^2 \\ 1^2 + 6^2 + 18^2 &= 19^2 \end{aligned}$$

$$5^2 + 12^2 = 13^2$$

d)
$$\begin{aligned} 1^2 + 4^2 + 8^2 &= 9^2 \\ 19^2 + 22^2 + 26^2 &= 39^2 \\ 63^2 + 66^2 + 70^2 &= 115^2 \end{aligned}$$

↓

h) $8^2 + 12^2 + 9^2 = 17^2$

↑

e)
$$\begin{aligned} 2698^2 + 2706^2 + 2721^2 &= 4691^2 \\ 1168^2 + 1176^2 + 1191^2 &= 2041^2 \\ 184^2 + 192^2 + 207^2 &= 337^2 \\ 74^2 + 82^2 + 97^2 &= 147^2 \\ 2^2 + 10^2 + 25^2 &= 27^2 \end{aligned}$$

$$8^2 + 15^2 = 17^2$$

f)
$$\begin{aligned} 2^2 + 6^2 + 9^2 &= 11^2 \\ 14^2 + 18^2 + 21^2 &= 31^2 \\ 80^2 + 84^2 + 87^2 &= 145^2 \\ 244^2 + 248^2 + 251^2 &= 429^2 \\ 1162^2 + 1166^2 + 1169^2 &= 2019^2 \end{aligned}$$

↓

↑

g)
$$\begin{aligned} 406^2 + 426^2 + 447^2 &= 739^2 \\ \boldsymbol{280^2 + 300^2 + 321^2} &\boldsymbol{= 521^2} \\ \boldsymbol{148^2 + 168^2 + 189^2} &\boldsymbol{= 293^2} \\ 98^2 + 118^2 + 139^2 &= 207^2 \\ 8^2 + 28^2 + 49^2 &= 57^2 \end{aligned}$$

$$20^2 + 21^2 = 29^2$$

h)
$$\begin{aligned} 2^2 + 6^2 + 3^2 &= 7^2 \\ 8^2 + 12^2 + 9^2 &= 17^2 \\ 52^2 + 56^2 + 53^2 &= 93^2 \\ 134^2 + 138^2 + 135^2 &= 235^2 \\ 746^2 + 750^2 + 747^2 &= 1295^2 \end{aligned}$$

↓

↑

i)
$$\begin{aligned} 4938^2 + 4950^2 + 4985^2 &= 8587^2 \\ 2796^2 + 2808^2 + 2843^2 &= 4877^2 \\ 336^2 + 348^2 + 383^2 &= 617^2 \\ 182^2 + 194^2 + 229^2 &= 351^2 \\ 2^2 + 14^2 + 49^2 &= 51^2 \end{aligned}$$

$$12^2 + 35^2 = 37^2$$

j)
$$\begin{aligned} 2^2 + 10^2 + 25^2 &= 27^2 \\ 74^2 + 82^2 + 97^2 &= 147^2 \\ 184^2 + 192^2 + 207^2 &= 337^2 \end{aligned}$$

↓

↑

k)
$$\begin{aligned} 215^2 + 222^2 + 246^2 &= 395^2 \\ 127^2 + 134^2 + 158^2 &= 243^2 \\ \boldsymbol{77^2 + 84^2 + 108^2} &\boldsymbol{= 157^2} \\ \boldsymbol{11^2 + 18^2 + 42^2} &\boldsymbol{= 47^2} \\ 1^2 + 8^2 + 32^2 &= 33^2 \end{aligned}$$

$$7^2 + 24^2 = 25^2$$

l)
$$\begin{aligned} 1^2 + 6^2 + 18^2 &= 19^2 \\ 61^2 + 66^2 + 78^2 &= 119^2 \\ 127^2 + 132^2 + 144^2 &= 233^2 \end{aligned}$$

↓

---

29 Quelle: Gloeckler Liste Baum, Nr. 159, 18.3.2003. MAS: „Zahlenquadrupel mit gleichen Basis (B)“, 17.5.2003. Daneben gibt es auch das Dokument „Zahlenquadrupel mit gleichen Basis (A)“, 17.5.2003, Nr.158, dessen Inhalt zum Teil in B enthalten ist; es enthält daneben auch eine Tripelfolge, für die y-x konstant ist.

<u>Kommentar (A. Hä)</u>

Es fällt auf, dass

- bei jeder Folge die Differenz der ersten beiden Glieder konstant ist (y_n - x_n),
- ebenso die Differenz der zweiten und dritten Glieder ($z_n - y_n$),
- bei den nach oben führenden Folgen diese Differenzen identisch sind mit den „Katheten“ des darunter stehenden Tripels,
- die Folgen a) und d) identisch sind , ebenso c) und l) sowie f) und i).

G. Glöckler gibt leider nicht an, auf welche Weise er diese Folgen gefunden hat; er notiert auch nicht, ob die Folgen “dicht“ liegen, ob also alle Quadrupel desselben Typs erfasst werden[30]. Da auch Folgenglieder mit großen Zahlenwerten vorkommen, hatte er vermutlich ein/das Bildungsgesetz gefunden.

Mit Hilfe der Matrix D kann man nun Folgen bilden, in denen die meisten der oben aufgeführten Quadrupel erzeugt werden. (Die nicht erzeugten sind fett und kursiv gedruckt.) Es handelt sich dabei um die Folge (1) aus B2, bei der jedes zweite Quadrupel die erwünschten Differenzen aufweist.

Aus dem Bildungsgesetz der Matrix D:

$$\begin{aligned} x_n &= \phantom{x_{n-1}+{}} y_{n-1}+z_{n-1}+t_{n-1} \\ y_n &= x_{n-1} \phantom{{}+y_{n-1}} +z_{n-1}+t_{n-1} \\ z_n &= x_{n-1}+y_{n-1} \phantom{{}+z_{n-1}} +t_{n-1} \\ t_n &= x_{n-1}+y_{n-1}+z_{n-1}+2\,t_{n-1} \end{aligned}$$

folgt $y_n - x_n = x_{n-1} - y_{n-1}$, diese Differenz alterniert also,

und die Differenz $z_n - y_n = y_{n-1} - z_{n-1}$ ebenso.

Auf die Folge a) angewandt bedeutet dies für die Startwerte (-3,0,4,5) und (3,0,-4,5)

(-3,0,4,5) $\xrightarrow{D}$ (9,6,2,11) $\rightarrow$ **(19,22,26,39)** $\rightarrow$ (87,84,80,145) $\rightarrow$ **(309,312,316,541)**

(3,0,-4,5) $\rightarrow$ **(1,4,8,9)** $\rightarrow$ (21,18,14,31) $\rightarrow$ **(63,66,70,115)** $\rightarrow$ (921,924,928,1601)

wobei die fett gedruckten Quadrupel – ineinander geschachtelt - die Folge a) ergeben. Die restlichen Quadrupel haben die Differenzen -3 und -4 und tauchen deshalb in a) nicht auf.

Anstatt im Starttupel die Vorzeichen zu wenden, könnte man die Folge der oberen Zeile mit D^{-1} nach links verlängern und erhielte auch so die Quadrupel der unteren Zeile, allerdings mit gewendeten Vorzeichen bei den x-, y- und z-Werten:

$$\begin{tikzcd} (-251,-248,-244,429) & (-63,-66,-70,115) \arrow[l] \arrow[d, "E_1E_2E_3"] & (-21,-18-14,31) \arrow[l] & (-1,-4,-8,9) \arrow[l] \arrow[d, "E_1E_2E_3"] & (\mathbf{-3,0,4,5}) \arrow[l, "D^{-1}"'] \\ & (63,66,70,115) & & (1,4,8,9) & \end{tikzcd}$$

30 Bis y=100000 kann ich die Vollständigkeit der Tabellen bestätigen.

Eine weitere Variante besteht darin, mit der Matrix D´:= (- D) Folgen zu bilden, z.B.

(1,4,8,-9) $\xrightarrow{D'}$ (3,0,-4,5) $\rightarrow$ (-9,-6,-2,-11) $\rightarrow$ (19,22,26,39) $\rightarrow$ (-87,-84,-80,-145)

Die hier entstehenden Quadrupel weisen alle dieselben Differenzen auf, denn $y_n - x_n = y_{n-1} - x_{n-1}$, und $z_n - y_n = z_{n-1} - y_{n-1}$, allerdings alterniert die Diagonale im Vorzeichen, was nicht erwünscht ist. Es ist $(D')^{-1} = DE_1E_2E_3T_1$ die auf S. 20 erwähnte Matrix.

Bei Folge c) wählt man dementsprechend die Startwerte (-5,0,12,13) und (5,0,-12,13) um die Differenzen +5 und +12 zu erzielen usw.

Bei den nach unten führenden Folgen ist das benötigte Tripel nicht angegeben, aber man braucht bloß die Differenzen zu bilden, z.B. bei j) die Differenzen 8 und 15, man startet also bei (-8,0,15,17) und (8,0,-15,17).

Bei Folge b) liegt der Sonderfall vor, dass man mit dem Starttupel (-1,0,0,1) bereits die ganz Folge b) erhält. Dies liegt daran, dass (-1,0,0,1) mit D auf (1,0,0,1) abgebildet wird und auf diese Weise die Verlängerung nach links nur die „gespiegelten" Quadrupel liefert.

Bei der Folge k) – und entsprechend auch bei g) – gibt es eine komplette Teilfolge von Quadrupeln, die nicht von (-7,0,24,25) oder (7,9,-24,25) aus erreicht werden. Es gilt dabei

(-77,-84,-108,157) $\xrightarrow{D}$ (-35,-28,-4,45) $\rightarrow$ (13,6,-18,23) $\rightarrow$ **(11,18,42,47)** $\rightarrow$ (107,100,76,165),

die beiden in k) markierten Quadrupel liegen also in „verschiedenen Hälften" einer Folge.

Auch zu den Abständen 9\40 und 11\60 habe ich Quadrupel gefunden, die von den jeweiligen Tripeln aus (also von (-9,0,40,41) oder (9,0,-40,41) etc.) nicht mit D erreicht werden.
G. Kowol gibt unten Bedingungen dafür an, wann solche besonderen Quadrupel auftauchen und wie viele Äquivalenzklassen es jeweils gibt.

Nebenbei sei erwähnt, dass man mit <u>jedem</u> Quadrupel mithilfe von D eine Folge von Quadrupeln erhält, von deren Gliedern jedes zweite dieselben Differenzen wie das Ausgangsquadrupel aufweist. Als Beispiel diene das Quadrupel (2,3,6,7) mit Abstand 1\3

(2,3,6,7) $\rightarrow$ (16,15,12,25) $\rightarrow$ (52,53,56,93) $\rightarrow$ (202,201,198,347) $\rightarrow$ (746,747,750,1295).

G. Kowol zeigt zwei Varianten, wie alle Quadrupel im Dokument B11 aufzufinden sind:

Gesucht sind die Lösungen von

$$(x-r)^2 + x^2 + (x+s)^2 = y^2 \text{ mit fixen } r\text{ , } s \geq 0,$$

wobei r, s Elemente eines pythagoräischen Tripels sind: r² + s² = t². Durch Ausrechnen, Multiplizieren mit 3 und Umformen erhält man

$$3\,y^2 - (3\,x + (s-r))^2 = 3\,r^2 + 3\,s^2 - (s-r)^2 = 2\,(r^2 + s^2 + rs)\,.$$

Es sind also die Lösungen der Pellschen Gleichung

$$z^2 - 3y^2 = c$$

gesucht, wobei z= 3x + (s - r) gesetzt wurde. Falls eine solche überhaupt existiert - was hier der Fall ist: z = s - r (x = 0), y = t - so gibt es stets unendlich viele Lösungen.

Alle Lösungen findet man folgendermaßen: Man benützt die Zerlegung $z^2 - 3y^2 = (z + \sqrt{3}\,y)(z - \sqrt{3}\,y)$ *und rechnet im Integritätsring* $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$. *Dieser ist ein sogenannter euklidischer Ring, d.h. es gibt wie im Bereich der ganzen Zahlen* $\mathbb{Z}$ *eine Division mit Rest. Aufgrund dessen haben diese beiden Bereiche, was die Zerlegung von Elementen betrifft, dieselben Eigenschaften.*

Der für die Primelementzerlegung in einem solchen euklidischen Ring $\mathbf{R}$ *relevante Satz lautet:*

Jedes Element $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ *und keine Einheit, lässt sich eindeutig bis auf Einheiten und Reihenfolge als Produkt von primen Elementen schreiben.*
Einheiten sind die Teiler von 1, also in $\mathbb{Z}$ *die Zahlen ±1. In* $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ *sind sie gegeben durch* $\pm\varepsilon^n$, $n \in \mathbb{Z}$, *wobei* $\epsilon = 2 + \sqrt{3}$ *die sogenannte Fundamentaleinheit ist. Die primen Elemente sind Nicht-Einheiten und als echte unzerlegbare Elemente (= keine echten Teiler) definiert; oder was in* $\mathbb{Z}$ *und auch* $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ *dazu äquivalent ist: als Elemente, die, wenn sie ein Produkt teilen, mindestens einen Faktor teilen. In* $\mathbb{Z}$ *sind das die Zahlen ±p, p Primzahl in* $\mathbb{N}$. *In* $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ *sind es bis auf Einheiten einerseits die Primzahlen* $p \in \mathbb{N}$, *wo* $p \not\equiv 1\ (12)$ *, andererseits die beiden Faktoren in der Zerlegung von p, wenn* $p \equiv 1\ (12)$ *(das ist ein tiefliegendes Ergebnis). Schließlich ist noch* $1 + \sqrt{3}$ *Primelement als bis auf eine Einheit einziger Faktor von 2:*
$2 = -(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3}) = \epsilon^{-1}(1 + \sqrt{3})^{2.}$

In den von Glöckler behandelten Fällen hat c die Gestalt c = - 2k mit k gleich 1 oder ein Produkt verschiedener Primzahlen p_i *der Gestalt* $p_i \equiv 1(12)$. *Im Weiteren sei an einem Beispiel (Fall k): r = 7, s = 24, z = 3x + 17) die allgemeine Argumentation vorgeführt: Gesucht sind die Lösungen* $z^2 - 3y^2 = -2 \cdot 13 \cdot 61$. *Man zerlegt die rechte Seite in Primelemente:*
$(z + y\sqrt{3})(z - y\sqrt{3}) = (1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})(4 + \sqrt{3})(4 - \sqrt{3})(8 + \sqrt{3})(8 - \sqrt{3})$.

Aufgrund der eindeutigen Primelementzerlegung ergeben sich für $z + y\sqrt{3}$ *bis auf Einheiten die folgenden 4 Möglichkeiten – indem man überall* $\sqrt{3}$ *durch* $-\sqrt{3}$ *ersetzt, erhält man jeweils die zugehörige Zerlegung von* $z - y\sqrt{3}$:

$$z + y\sqrt{3} = (1 + \sqrt{3})(4 + \sqrt{3})(8 + \sqrt{3}) \Rightarrow x = 18$$

$$z + y\sqrt{3} = (1 + \sqrt{3})(4 + \sqrt{3})(8 - \sqrt{3}) \Rightarrow x = 8$$

$$z + y\sqrt{3} = (1 + \sqrt{3})(4 - \sqrt{3})(8 + \sqrt{3}) \Rightarrow x = 0$$

$$z + y\sqrt{3} = (1 + \sqrt{3})(4 - \sqrt{3})(8 - \sqrt{3}) \Rightarrow x = -6.$$

Zufälligerweise kann man hier stets $1 + \sqrt{3}$ *als ersten Faktor aus der Zerlegung von -2 nehmen, damit sich ganzzahlige Quadrupel ergeben. Um allgemein den richtigen Faktor zu finden, berechnet man zuerst das Produkt der anderen Faktoren. Es ist von der Gestalt* $a + b\sqrt{3}.$ *Wenn a ≡ s – r (3), so wählt man* $1 + \sqrt{3}$; *wenn a ≡ - (s – r) (3), dann ist* $1 - \sqrt{3}$ *der richtige Faktor. Das liefert dann stets ganzzahlige Quadrupel. (Aus Kongruenzüberlegungen folgt, dass stets* $a \not\equiv 0\ (3)$ *und* $(s - r) \not\equiv 0\ (3)$, *wenn man von einem pythagoräischen Tripel ausgeht.)*

Diese vier Lösungen sind nicht zueinander äquivalent, d.h. unterscheiden sich nicht nur um eine Einheit. Alle anderen Lösungen der Pellschen Gleichung bekommt man durch Multiplikation mit einer beliebigen Einheit. Man erhält somit genau 4 Äquivalenzklassen von Lösungen. So enthält die erste Klasse genau die Elemente

$$(\pm\epsilon^{n})(1+\sqrt{3})(4+\sqrt{3})(8+\sqrt{3})\,,\; n\in\mathbb{Z}\,,$$

und darunter kommt z.B. $(1-\sqrt{3})(4+\sqrt{3})(8+\sqrt{3})$ *vor. Dabei führen jedenfalls diejenigen Lösungen auf pythagoräische Quadrupel, die sich aus den 4 zuvor gefundenen durch Multiplikation mit* $\epsilon^{2n}, n\in\mathbb{Z}$, *ergeben.*

Man kann das Ganze auch mittels Matrizenrechnung durchführen. Der Fundamentaleinheit ϵ *entspricht die Matrix* $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ *und man erhält alle Lösungen der Pellschen Gleichung durch*

$$\pm A^{n}\begin{pmatrix}y\\ z\end{pmatrix},\; n\in\mathbb{Z}\,,\ \text{mit}\ \begin{pmatrix}y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}47\\ 71\end{pmatrix},\begin{pmatrix}33\\ 41\end{pmatrix},\begin{pmatrix}25\\ 17\end{pmatrix},\begin{pmatrix}23\\ -1\end{pmatrix}.$$ [31]

Diejenigen Lösungen, für welche z – 17 (allgemein z – (s – r)) durch 3 teilbar ist, führen auf ein pythagoräisches Quadrupel.

Durch eine Zusatzüberlegung kann man unter allen Lösungen auch die herausfiltern, die auf positive Quadrupelwerte führen. Doch soll dies hier unterbleiben.

31 Die Matrix A entspricht genau der Matrix D von Glöckler, beide lassen sich in einander umformen. Man kann A auch aus den Formeln von Cayley (siehe S.10) herleiten.

B12 Eine erstaunliche Quadrupelfolge[32]

$$
A'\quad
\begin{array}{lcl}
x_n & = & -x_{n-1} \phantom{+ y_{n-1}} + z_{n-1} + t_{n-1} \\
y_n & = & -x_{n-1} + y_{n-1} + t_{n-1} \\
z_n & = & + y_{n-1} + z_{n-1} + t_{n-1} \\
t_n & = & -x_{n-1} + y_{n-1} + z_{n-1} + 2t_{n-1}
\end{array}
\qquad
(A')^{-1}\quad
\begin{array}{lcl}
x_n & = & -x_{n-1} - y_{n-1} + t_{n-1} \\
y_n & = & + y_{n-1} + z_{n-1} - t_{n-1} \\
z_n & = & + x_{n-1} + z_{n-1} - t_{n-1} \\
t_n & = & -x_{n-1} - y_{n-1} - z_{n-1} + 2t_{n-1}
\end{array}
$$

a) Grenzwerte

für $n \to \infty$

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} \to g^2 \qquad \frac{x_n}{t_n} \to \frac{1}{2}$$

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} \to g^2 \qquad \frac{y_n}{t_n} \to \frac{g}{2}$$

$$\frac{z_n}{z_{n+1}} \to g^2 \qquad \frac{z_n}{t_n} \to \frac{1}{2g}$$

für $n \to \infty$

$$\frac{t_n}{t_{n+1}} \to g^2 \qquad \to \quad Y_n : X_n : z_n \;=\; g^2 : y : 1$$

$$\to \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{g}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4g}\right)^2 = 1$$

b) Rekursionsformeln

$$t_n = 3\cdot t_{n-1} - t_{n-2} - \frac{1+(-1)}{2}^{n+1}\cdot 3 + \frac{1+(-1)}{2}^{n}\cdot 7 \qquad t_1 = 9 \qquad t_2 = 29$$

$$
\begin{array}{lcrcrcrcr}
t_3 & = & 3\cdot\ 29 & - & 9 & - & 1\cdot 3 & = & 75 \\
t_4 & = & 3\cdot\ 75 & - & 29 & + & 1\cdot 7 & = & 203 \\
t_5 & = & 3\cdot 203 & - & 75 & - & 1\cdot 3 & = & 531 \\
t_6 & = & 3\cdot 531 & - & 302 & + & 1\cdot 7 & = & 1397
\end{array}
$$

$$z_n = 3\cdot z_{n-1} - z_{n-2} - \frac{1+(-1)}{2}^{n}\cdot 3 + \frac{1+(-1)}{2}^{n+1}\cdot 7 \qquad z_1 = 8 \qquad z_2 = 21$$

$$
\begin{array}{lcrcrcrcr}
z_3 & = & 3\cdot\ 21 & - & 8 & + & 1\cdot 7 & = & 62 \\
z_4 & = & 3\cdot\ 62 & - & 21 & - & 1\cdot 3 & = & 162 \\
z_5 & = & 3\cdot 162 & - & 62 & + & 1\cdot 7 & = & 431
\end{array}
$$

32 Quelle: MAS 02.05.2001. Umformatiert von A.Hä.

$$y_n = 3 \cdot y_{n-1} - y_{n-2} + \frac{1+(-1)^n}{2} \cdot 3 - \frac{1+(-1)^{n+1}}{2} \cdot 7 \qquad y_1 = 4 \qquad y_2 = 12$$

$$\begin{array}{lcrcrcrcr}
y_3 & = & 3 \cdot 12 & - & 4 & - & 1 \cdot 7 & = & 25 \\
y_4 & = & 3 \cdot 25 & - & 12 & + & 1 \cdot 3 & = & 66 \\
y_5 & = & 3 \cdot 66 & - & 25 & - & 1 \cdot 7 & = & 166
\end{array}$$

$$x_n = 3 \cdot x_{n-1} - x_{n-2} - \frac{1+(-1)^{n+1}}{2} \cdot 13 + \frac{1+(-1)^n}{2} \cdot 17 \qquad x_1 = 1 \qquad x_2 = 16$$

$$\begin{array}{lcrcrcrcr}
x_3 & = & 3 \cdot 16 & - & 1 & - & 1 \cdot 13 & = & 34 \\
x_4 & = & 3 \cdot 34 & - & 16 & + & 1 \cdot 17 & = & 103 \\
x_5 & = & 3 \cdot 103 & - & 34 & - & 1 \cdot 13 & = & 262
\end{array}$$

c) Bemerkenswert ist das Hervorgehen dieser Quadrupelfolgen aus einem Keim.

Es gilt:

$$\begin{array}{rcllll}
x_n & = & 3 \cdot x_{n-1} & - & x_{n-2} & + \; 3 \cdot (-1)^n \\
y_n & = & 3 \cdot y_{n-1} & - & y_{n-2} & + \; (-1)^n \\
z_n & = & 3 \cdot z_{n-1} & - & z_{n-2} & + \; (-1)^{n+1} \\
t_n & = & 3 \cdot t_{n-1} & - & t_{n-2} & + \; (-1)^n
\end{array}$$

mit $x_1 = z_1 = 0$ $\quad$ $y_1 = -1$ $\quad$ $t_1 = 1$
und $x_2 = t_2 = 1$ $\quad$ $y_2 = z_2 = 0$
für $n \geq 3$
ergibt sich

$$\begin{array}{rcccccccc}
x_3 & = & 3 \cdot 1 & - & 0 & - & 3 & = & 0 \\
y_3 & = & 3 \cdot 0 & + & 1 & - & 1 & = & 0 \\
z_3 & = & 3 \cdot 0 & - & 0 & + & 1 & = & 1 \\
t_3 & = & 3 \cdot 1 & - & 1 & - & 1 & = & 1 \\
\\
x_4 & = & 3 \cdot 0 & - & 1 & + & 3 & = & 2 \\
y_4 & = & 3 \cdot 0 & - & 0 & + & 1 & = & 1 \\
z_4 & = & 3 \cdot 1 & - & 0 & - & 1 & = & 2 \\
t_4 & = & 3 \cdot 1 & - & 1 & + & 1 & = & 3 \\
\\
x_5 & = & 3 \cdot 2 & - & 0 & - & 3 & = & 3 \\
y_5 & = & 3 \cdot 1 & - & 0 & - & 1 & = & 2 \\
z_5 & = & 3 \cdot 2 & - & 1 & + & 1 & = & 6 \\
t_5 & = & 3 \cdot 3 & - & 1 & - & 1 & = & 7 \\
\vdots & & & & \vdots & & & & \vdots
\end{array}$$

<u>Kommentar</u> (A. Hä.):

Die hier angeführte Rekursion gehört zu der Matrix $A':=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

Mit den Bezeichnungen von oben ist $A' = D_2E_1$ und identisch mit der Folge (10) aus B2.

Betrachtet man im obigen Dokument unter b) die Rekursionsformeln, so fällt auf, dass die ersten drei untereinander sehr ähnlich sind und dass wechselweise 3 subtrahiert und 7 addiert wird bzw. umgekehrt.

Um die vier Formeln für beliebiges n zu beweisen, nehme man an, dass alle vier schon für n-1 bewiesen seien; mit der Abkürzung $a_n := \frac{1+(-1)^n}{2}$ gelte also:

$$t_{n-1} = 3t_{n-2} - t_{n-3} - 3a_n + 7a_{n-1}$$

$$z_{n-1} = 3z_{n-2} - z_{n-3} - 3a_{n-1} + 7a_n$$

$$y_{n-1} = 3y_{n-2} - y_{n-3} + 3a_{n-1} - 7a_n$$

$$x_{n-1} = 3x_{n-2} - x_{n-3} - 13a_n + 17a_{n-1}.$$

Mit der Abbildung A´ erhält man daraus x_n :

$$x_n = -x_{n-1} + z_{n-1} + t_{n-1}.$$

Setzt man hier die Induktionsannahme ein, so bekommt man

$$x_n = -3x_{n-2} + x_{n-3} + 13a_n - 17a_{n-1} + 3z_{n-2} - z_{n-3} - 3a_{n-1} + 7a_n + 3t_{n-2} - t_{n-3} - 3a_n + 7a_{n-1}$$

und umsortiert

$$x_n = -3x_{n-2} + 3z_{n-2} + 3t_{n-2} + x_{n-3} - z_{n-3} - t_{n-3} + 13a_n - 17a_{n-1} - 3a_{n-1} + 7a_n - 3a_n + 7a_{n-1}.$$

Nun weiß man mit A´, dass

$x_{n-2} = -x_{n-3} + z_{n-3} + t_{n-3}$. und

$3x_{n-1} = 3(-x_{n-2} + z_{n-2} + t_{n-2})$, sodass man durch Einsetzen findet, dass

$x_n = 3x_{n-1} - x_{n-2} + 17a_n - 13a_{n-1}$ was wegen $a_{n+1} = a_{n-1}$ gerade zu beweisen war.

Auf dieselbe Art lassen sich auch die anderen drei Formeln aus b) sowie die Formeln aus c) überprüfen.

Während die Formeln aus b) allgemeingültig sind, sind die Formeln aus c) nur für die angegebenen Startquartupel v_1= (0,-1,0,1) und v_2= (1, 0, 0, 1) gültig. Bemerkenswert ist zudem, dass die Rekursion c) mit dem dritten Folgenglied auf v_3= (0, 0, 1, 1) führt, sodass auch das dritte Ur-Quadrupel in dieser Folge auftaucht.

Der Grenzwert aus a) für die Folge x_n lässt sich verifizieren, wenn man annimmt, dass

$b := \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n-1}}{x_n}$ existiert.

Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n-2}}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n-2}}{x_{n-1}}\cdot\frac{x_{n-1}}{x_n}=b^2$ und wir erhalten aus der

Rekursionsformel $x_n=3x_{n-1}-x_{n-2}+17a_n-13a_{n+1}$ durch Division mit x_n

die Beziehung $1=3\frac{x_{n-1}}{x_n}-\frac{x_{n-2}}{x_n}+\frac{17a_n}{x_n}+\frac{13a_{n11}}{x_n}$

und für $n\to\infty$ $1=3b-b^2+0$

Die Lösung dieser Gleichung ist (wegen b<1) $b=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Quadriert man andererseits $g=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, so sieht man, das b = g² ist.

Ebenso berechnet man die Limiten von $\frac{y_n}{y_{n+1}},\frac{z_n}{z_{n+1}}$ und $\frac{t_n}{t_{n+1}}$.

Um die Grenzwerte $\alpha:=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{t_n},\beta:=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{t_n}$ und $\gamma:=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{z_n}{t_n}$ aufzusuchen, kann man aus der ersten Zeile von A´ durch Teilen und Erweitern der Gleichung folgende Formel gewinnen:

$$\frac{x_n}{t_n}=-\frac{x_{n-1}}{x_n}\cdot\frac{x_n}{t_n}+\frac{z_{n-1}}{z_n}\cdot\frac{z_n}{t_n}+\frac{t_{n-1}}{t_n}$$

und für $n\to\infty$ $(\mathrm{I})\,\alpha=-g^2\cdot\alpha+g^2\cdot\gamma+g^2.$

Aus den anderen Zeilen gewinnt man entsprechend die Gleichungen

$$(\mathrm{II})\,\beta=-g^2\cdot\alpha+g^2\cdot\beta+g^2.$$

$$(\mathrm{III})\,\gamma=\quad g^2\cdot\beta+g^2\cdot\gamma+g^2.$$

Dieses Gleichungssystem lässt sich lösen und man erhält - nach etlichen Mühen - die Lösungen

$\alpha=\frac{1}{2},\beta=\frac{g}{2}$ und $\gamma=\frac{1}{2g}$.

B13 Liste der hier nicht aufgenommenen Dokumente von G. Glöckler, die sich auch mit Quadrupeln befassen

- Folgen von pythagoräischen Quadrupeln, MAS 9.5.2001. (Wird oben in A2 zitiert und beinhaltet einen Formelsatz zur Erzeugung von pythagoräischen Tripeln.)

- 6 Rekursionsformeln aus denen pythagoräische Zahlen-Tripel hervorgehen (mit Beispielen), 29.3.01, MAS 1.5.2001. (Hier wird eine Auswahl von 6 Formeln aus dem Dokument B2 vorgestellt.)

- 8 charakteristische Folgen von Zahlenquadrupeln, Gloeckler Liste Baum, Nr. 51. (In dieser Vorstufe von B2 bzw. B3 werden alle Variationen der Matrix D vorgestellt.)

- Aus einem pythagoräischen Zahlenquadrupel (u,v,w,t) mit der Eigenschaft $u^2 + v^2 + w^2 = t^2$ gehen 22 wesentlich verschiedene Folgen von pythagoräischen Zahlenquadrupeln hervor, 24.1.2001, Gloeckler Liste Baum, Nr. 45. MAS: Pythagoräisches Zahlenquadrupel_22Folgen, 16.5.2001. (In dieser Vorstufe zu B3 werden die Folgen II b,e,c vorgestellt.).)

- Aus einem pythagoräischen Tripel gehen sieben wesentlich verschiedene pythagoräische Tripelfolgen hervor, 23.1.2001, Gloeckler Liste Baum, Nr. 61. MAS: Pyth. Tripel-Folgen, 1.5.2001. (Dieses Blatt gehört in das Umfeld von B6 und wurde dort auch zitiert.)

- Aus einem pythagoräischen Tripel gehen 8 unbegrenzt viele Tripel und Quadrupel hervor, Gloeckler Liste Baum, Nr. 58. (Dieses Blatt gehört inhaltlich zu B5 und wurde dort auch zitiert.)

- Pythagoräische Zahlenquadrupel mit „gleichen Basisdifferenzen" (A)18.3.2003, Gloeckler Liste Baum, Nr. 159. MAS: Zahlenquadrupel mit gleichen Basis A, 17.5.2002. (Die obere Hälfte dieses Blatts ist im Dokument Pythagoräische Zahlenquadrupel mit „gleichen Basisdifferenzen" (B), Gloeckler Liste Baum, Nr. 160, enthalten, siehe oben B11. Darunter stehen noch Tripelfolgen- mit gleichen Basisdifferenzen - die mit der Matrix A herleitbar sind.)

- Drei elementare Quadratsummen, undatierte Handschrift aus dem Nachlass, übertragen von Peter Baum 2019. (Ein wesentliches Anliegen dieser Arbeit ist es, das Zusammenspiel von Tripeln und Quadrupeln zu untersuchen.)

> Die folgenden Dokumente stehen vor allem in Zusammenhang mit den „Drei elementaren Quadratsummen" s.o. und sollten in dem dortigen Zusammenhang gewürdigt werden:

- Primitive pythagoräische Zahlentripel und Quadrupel als alternierende Folgen, Gloeckler Liste Baum, Nr.151. (Hier handelt es sich um den Fall m=2 aus den „Drei elementaren Quadratsummen" oben.)

- Wechselseitige Beziehungen zwischen pythagoräischen Zahlentripeln und Quadrupeln, 2.5.20013, Gloeckler Liste Baum, Nr. 189. (Anhand von drei Beispielen wird wieder der Fall m=2 aus den „Drei elementaren Quadratsummen" illustriert.)

- Aus einem pythagoräischen Zahlentripel gehen 2 alternierende Doppelfolgen von pythagoräischen Zahlentripeln und pythagoräischen Zahlenquadrupel hervor, Gloeckler Liste Baum, Nr. 59. MAS: 27.1.2004. (Hier handelt es sich um den Fall m=3 aus den „Drei elementaren Quadratsummen“ oben.)

- Das Spektrum derjenigen pythagoräischen Zahlenquadrupel, aus denen pythagoräische Zahlentripel hervorgehen, 26,4,2005. MAS: 18.5.2005. (Hier werden drei Formeln für Quadrupel angegeben, die zweite stimmt mit der Formel (2) aus den „Drei elementaren Quadratsummen“ oben überein.)

- Tabelle II Pythagoräische Quadrupel als Basis einer alternierenden Folge – Ein Spektrum, 30.5(oder 6?).2005. MAS: 5.9.2005. (Es handelt sich um die Formel (2) aus den „Drei elementaren Quadratsummen“ oben.)