

Quadrupelfolgen*

Vorbemerkung (PB)

Die folgenden Abschnitte enthalten Passagen aus den fragmentarischen Manuskripten 73 und 136 von Georg Glöckler. Diese gehören zu demselben Themenbereich wie das Manuskript 189 (Wechselseitige Beziehungen zwischen pythagoräischen Tripeln und Quadrupeln).

1 Elementare Beziehungen zwischen Quadraten (73)

Über Quadratsummen ist aus der Literatur vieles bekannt. Einige der wesentlichen Tatsachen seien kurz angeführt.

1. Die natürliche Zahl n kann dann und nur dann als Summe zweier Quadratzahlen u^2 und v^2 dargestellt werden, wenn $n = n_0 \cdot n_1^2$ ist, wobei n_0 keine Primfaktoren der Form $4m + 3$ enthält.
2. Jede natürliche Zahl kann als Summe von vier Quadratzahlen dargestellt werden (Satz von Lagrange, sog. Vierquadratesatz).
3. Das Produkt von zwei Zahlen, die durch eine Quadratsumme dargestellt werden können ist selber wieder durch eine Quadratsumme darstellbar, und zwar auf zweifach verschiedene Weise:

$$\begin{aligned}(u_1^2 + v_1^2)(u_2^2 + v_2^2) &= (u_1u_2 + v_1v_2)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2 \\ &= (u_2v_1 + u_1v_2)^2 + (u_1u_2 - v_1v_2)^2\end{aligned}$$

4. Eulersche Identität: Das Produkt aus zwei Zahlen, die sich jeweils durch eine Quadrupelsumme darstellen lassen, ist selber wieder durch eine Quadrupelsumme dar-

*Undatierte Manuskripte Nr. 73 und 136 aus dem Nachlass von Georg Glöckler, übertragen von Peter Baum, p.baum@posteo.de im April 2020.

stellbar:¹

$$(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 + t_1^2) (u_2^2 + v_2^2 + w_2^2 + t_2^2) = A^2 + B^2 + C^2 + D^2$$

$$A = u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2 + t_1 t_2$$

$$B = u_1 v_2 - u_2 v_1 + w_1 t_2 - w_2 t_1$$

$$C = u_1 w_2 - w_1 u_2 + t_1 v_2 - t_2 v_1$$

$$D = u_1 t_2 - u_2 t_1 + v_1 w_2 - w_1 v_2$$

2 C) Berechnung von Quadrupelfolgen (73)

Berechnung von Quadrupelfolgen $u_n^2 + v_n^2 + w_n^2 = t_n^2$ mit der Eigenschaft

$$v_n - u_n = c_1 = \text{const}$$

$$w_n - v_n = c_2 = \text{const}$$

für alle $n = 1, 2, 3, \dots$.

Ausgangspunkt sei dabei immer ein ganz bestimmtes pythagoräisches Zahlenquadrupel. In unseren Beispielen unter B)² sind es die folgenden Zahlenquadrupel:

$$2^2 + 6^2 + 9^2 = 11^2 \qquad 2^2 + 10^2 + 25^2 = 27^2$$

Algebraisch werden die zugehörigen Folgen wie folgt erfaßt:

$$2^2 + (2+4)^2 + (2+7)^2 = 11^2 \qquad 2^2 + (2+8)^2 + (2+23)^2 = 27^2$$

$$u_n^2 + (u_n+4)^2 + (u_n+7)^2 = q_n^2 \qquad a_m^2 + (a_m+8)^2 + (a_m+23)^2 = p_m^2$$

Daraus folgt

$$3q_n^2 - (3u_n + 11)^2 = 74 \qquad 3p_m^2 - (3a_m + 31)^2 = 818 \qquad (1)$$

Daraus ergeben sich die zugehörigen Lösungsfolgen in Tabelle (1).

Damit lassen sich die unter B) beschriebenen Quadrupelfolgen berechnen.

Bei genauem Hinschauen auf diese Tabellen erkennt man rein empirisch, daß nur 2 Lösungspaare des Anfangswertes erforderlich sind, um daraus rekursiv alle übrigen Paare bestimmen zu können. es ist nämlich

$$\begin{array}{ll} 11 = 2 \cdot 5 + 1 & 41 = 2 \cdot 17 + 7 \\ 31 = 2 \cdot 9 + 13 & 91 = 2 \cdot 27 + 37 \\ 39 = 2 \cdot 11 + 17 & 147 = 2 \cdot 41 + 65 \\ 115 = 2 \cdot 31 + 53 & 337 = 2 \cdot 91 + 155 \end{array} \qquad (2)$$

¹Die Bezeichnung „Eulersche Identität“ meint üblicherweise einen anderen Sachverhalt, nämlich die Gleichung $e^{i\pi} = -1$ (PB).

²Der Abschnitt B) fehlt im Manuskript 73 (PB).

q_n	$3u_n + 11$	u_n	p_n	$3a_m + 31$	a_m
5	1		17	7	-8
9	13		27	37	2
11	17	2	41	65	
31	53	14	91	155	
39	67		147	253	74
115	199		337	583	184
145	251	80	547	947	
429	743	244	1257	2177	
541	937		2041	3535	1168
1601	2773		4691	8125	2698
2019	3497	1162	7617	13193	
5975	10349	3446	17507	30323	
			28427	49237	16402
			65373	113167	37712

Tabelle 1: Lösungsfolgen

Kommentar(PB) Bei den Gleichungen (1) handelt es sich um Pell'sche Gleichungen der Gestalt

$$y^2 - 3x^2 = N$$

$$(y + \sqrt{3}x)(y - \sqrt{3}x) = N$$

Ihre Lösung gewinnt man durch die Zerlegung im Integritätsring $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$. Im Fall $N = -74 = -2 \cdot 37$ ist

$$-2 \cdot 37 = (1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})(7 + 2\sqrt{3})(7 - 2\sqrt{3})$$

$$(y + \sqrt{3}x)(y - \sqrt{3}x) = (1 + \sqrt{3})(7 + 2\sqrt{3})(1 - \sqrt{3})(7 - 2\sqrt{3})$$

$$(y + \sqrt{3}x)(y - \sqrt{3}x) = (7 + 6 + (7 + 2)\sqrt{3})(7 + 6 - (7 + 2)\sqrt{3})$$

$$(y + \sqrt{3}x)(y - \sqrt{3}x) = (13 + 9\sqrt{3})(13 - 9\sqrt{3})$$

also ist $y = 13$ und $x = 9$ eine Lösung. Weitere Lösungen erhält man nach einem Hinweis³ von Gerhard Kowol durch

$$y_n + \sqrt{3}x_n = (2 + \sqrt{3})^n (13 + 9\sqrt{3})$$

$$y'_n + \sqrt{3}x'_n = (2 + \sqrt{3})^n (13 - 9\sqrt{3})$$

³Siehe Häberlein: „Rekursive Erzeugung der Pythagoräischen Quadrupel nach Georg Glöckler“ S. 44 ff.

also

$$\begin{aligned}(y'_1; x'_1) &= (1; 5) & (y'_2; x'_2) &= (17; 11) \\ (y_0; x_0) &= (13; 9) & (y_1; x_1) &= (53; 31)\end{aligned}$$

und somit in der Tat die Zahlen in der Tabelle (1) von Glöckler, wobei hier nur die positiven Werte notiert sind.

Wegen

$$\begin{aligned}y_n + \sqrt{3}x_n &= (y_{n-1} + \sqrt{3}x_{n-1}) (2 + \sqrt{3}) \\ y_n + \sqrt{3}x_n &= (2y_{n-1} + 3x_{n-1}) + (y_{n-1} + 2x_{n-1}) \sqrt{3}\end{aligned}$$

erhält man die Rekursionsformeln

$$\begin{aligned}y_n &= 2y_{n-1} + 3x_{n-1} \\ x_n &= 2x_{n-1} + y_{n-1}\end{aligned}\tag{3}$$

und

$$\begin{aligned}y_{n-1} &= 2y_n - 3x_n \\ x_{n-1} &= 2x_n - y_n\end{aligned}\tag{4}$$

Immerhin hat Glöckler in (2) die zweite Rekursionsformel $x_n = 2x_{n-1} + y_{n-1}$ rein empirisch gefunden. Im Manuskript 136 (siehe Abschnitt 5 auf Seite 7) hat er auch die erste Rekursionsfolge angegeben. Wie er überhaupt die Lösungen der Gleichung (1) gefunden hat, geht aus den Unterlagen nicht hervor.

Für $N = -818 = -2 \cdot 409 = (1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})(22 + 5\sqrt{3})(22 - 5\sqrt{3})$ erhält man

$$\begin{aligned}y_n + \sqrt{3}x_n &= (2 + \sqrt{3})^n (37 + 27\sqrt{3}) \\ y'_n + \sqrt{3}x'_n &= (2 + \sqrt{3})^n (37 - 27\sqrt{3})\end{aligned}$$

also die Lösungen $(y_0; x_0) = (37; 27)$ und $(y'_0; x'_0) = (37; -27)$, und daraus erhält man mit den Rekursionsformeln (3) und (4) alle anderen Lösungen.

3 D) Komplementäre pythagoräische Quadrupel (73)

In unseren vorangehenden Tabellen unter C) für die Lösungspaare fällt auf, daß nur die Hälfte der Lösungen brauchbar sind. Die zunächst unbrauchbaren Lösungen weisen aber auf eine zweite pythagoräische Quadrupelfolge hin, die wir im Verhältnis zur ersten komplementär nennen wollen.

Auch hier ist es am besten, wenn wir von einem Beispiel ausgehen.
Gegeben sei das folgende Quadrupel

$$\begin{aligned}u^2 + v^2 + w^2 &= t_0^2 \\ 2^2 + 3^2 + 6^2 &= 7^2\end{aligned}$$

Durch

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 + c^2 &= d^2 \\ 12^2 + 15^2 + 16^2 &= 25^2\end{aligned}$$

ist ein zweites Quadrupel gegeben, das zu dem ersten in einer besonderen Beziehung steht. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned}v - u &= c - b = 1 \\ w - v &= b - a = 3\end{aligned}$$

Quadrupel, die in einem solchen Verhältnis zueinander stehen, wollen wir komplementär nennen. Wir führen dazu die Bezeichnung \iff ein. Es ist also z.B.

$$1^2 + 8^2 + 32^2 = 33^2 \iff 4^2 + 28^2 + 35^2 = 45^2$$

Mit den Ergebnissen unter B) können wir dann zusammenfassend sagen: Zu einem gegebenen pythagoräischen Zahlenquadrupel gehört

1. immer eine ganze Folge mit gleichen Basisdifferenzen und
2. eine Folge komplementärer pythagoräischer Zahlenquadrupel.

Ausgehend von unserem obigen Beispiel wollen wir kurz das ganze Berechnungsschema für die Ermittlung solcher Folgen beispielhaft darstellen:

Gegeben sei

$$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$$

Dann ist

$$\begin{aligned}u_n^2 + (u_n + 1)^2 + (u_n + 4)^2 &= q_n^2 \\ a_m^2 + (a_m + 3)^2 + (a_m + 4)^2 &= q_m^2\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$3q_n^2 - (3u_n + 5)^2 = 26 = 3q_m^2 - (3a_m + 7)^2$$

Es gilt also im wesentlichen die Lösungs-Werte-Paare der Gleichung

$$3q^2 - p^2 = 26$$

zu bestimmen, um damit die pythagoräischen Zahlenquadrupel berechnen zu können. Daraus ergibt sich das Berechnungsschema in Tabelle 2.

$u_n^2 + (u_n + 1)^2 + (u_n + 4)^2 = q_n^2$	u_n	q	p	a_m	$a_m^2 + (a_m + 3)^2 + (a_m + 4)^2 = q_m^2$
		3	1	-2	$(-2)^2 + 1^2 + 2^2 = 3^2$
		5	7	0	$0^2 + 3^2 + 4^2 = 5^2$
$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$	-2	7	11		
$8^2 + 9^2 + 12^2 = 17^2$	-8	17	29		
		25	43	12	$12^2 + 15^2 + 16^2 = 25^2$
		63	109	34	$34^2 + 37^2 + 38^2 = 63^2$
$52^2 + 53^2 + 56^2 = 93^2$	52	93	161		
$134^2 + 135^2 + 138^2 = 235^2$	134	235	407		
		347	601	198	$198^2 + 201^2 + 202^2 = 347^2$
		877	1519	504	$504^2 + 507^2 + 508^2 = 877^2$
$746^2 + 747^2 + 750^2 = 1295^2$	746	1295	2243		
$1888^2 + 189^2 + 1892^2 = 3273^2$	1888	3273	5669		
		4833	8371	2788	$2788^2 + 2791^2 + 2792^2 = 4833^2$
		12215	21157	7050	$7050^2 + 7053^2 + 7054^2 = 12215^2$
$10412^2 + 10413^2 + 10416^2 = 18037^2$	10412	18037	31241		
$26318^2 + 26319^2 + 26322^2 = 45578^2$	26318	45578	78959		

Tabelle 2: Berechnungsschema

Kommentar(PB) Für $N = -26$ in der Pell'schen Gleichung $y^2 - 3x^2 = N$ ergibt sich nach dem im Kommentar zum Abschnitt 2 beschriebenen Verfahren wegen

$$-2 \cdot 13 = (1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})(5 + 2\sqrt{3})(5 - 2\sqrt{3})$$

$$y_n + \sqrt{3}x_n = (2 + \sqrt{3})^n (11 + 7\sqrt{3})$$

$$y'_n + \sqrt{3}x'_n = (2 + \sqrt{3})^n (11 - 7\sqrt{3})$$

mit den Lösungen $(y_0; x_0) = (11; 7)$ und $(y'_0; x'_0) = (11; -7)$, und daraus erhält man mit den Rekursionsformeln (3) und (4) alle anderen Lösungen.

4 D) Komplementäre pythagoräische Quadrupelfolgen (136)

In unseren vorangehenden Tabellen⁴ für die Lösungspaare fällt auf, daß nur die Hälfte der Lösungen brauchbar sind. Diese zunächst unbrauchbaren Lösungen weisen aber auf eine zweite p.Q.F. hin,, die wir im Verhältnis zur ersten komplementär nennen wollen. Ein zu einem Quadrupel komplementäres Quadrupel ergibt sich einfach durch Austausch der Differenzen zwischen der Basiszahlen des Quadrupels. Ein Beispiel zeigt das am besten.

$$u^2 + v^2 + w^2 = t^2$$

$$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$$

⁴Ich habe sie im Manuskript 136 nicht gefunden (PB).

Komplementäre Tripel:

$$\begin{aligned}
 a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 &= d_n^2 \\
 12^2 + 15^2 + 16^2 &= 25^2 \\
 34^2 + 37^2 + 38^2 &= 63^2 \\
 198^2 + 201^2 + 202^2 &= 347^2 \\
 504^2 + 507^2 + 508^2 &= 877^2
 \end{aligned}$$

Zu jedem pythagoräischen Zahlenquadrupel gehört also eine ganze Folge von komplementären Quadrupeln,⁵ für die gilt:

$$\begin{aligned}
 v - u = 1 &= c_n - b_n \\
 w - v = 3 &= b_n - a_n
 \end{aligned}$$

Damit können wir z.B. eine der unter C) beschriebenen Tabellen durch die entsprechenden komplementären Quadrupel vervollständigen.⁶

$$\begin{aligned}
 u_n^2 + (u_n + 4)^2 + (u_n + 7)^2 &= q_n^2 = a_n^2 + (a_n + 3)^2 + (a_n + 7)^2 \\
 3q_n^2 - (u_n + 11)^2 &= 74 = 3q_n^2 - (3a_n + 10)^2
 \end{aligned}$$

	n	q_n	$3u_n + 11$	$3u_n + 10$	u_n	
	1	5		1	-3	$(-3)^2 + 0^2 + 4^2 = 5^2$
	2	9		13	1	$1^2 + 4^2 + 8^2 = 9^2$
$+412^2 + 6^2 + 9^2 = 11^2$	3	11	17		2	
	4	31	53		14	
	5	39		67	19	$19^2 + 22^2 + 26^2 = 39^2$
	6	115		199	63	$63^2 + 66^2 + 70^2 = 115^2$
$80^2 + 84^2 + 87^2 = 145^2$	7	145	251		80	
	8	429	743		244	
	9	541		937	309	$309^2 + 312^2 + 316^2 = 541^2$
	10	1601		2773	927	$927^2 + 930^2 + 934^2 = 1601^2$
$1162^2 + 1166^2 + 1169^2 = 2019^2$	11	2019	3497		1162	
$3446^2 + 3450^2 + 3453^2 = 5975^2$	12	5975	10349		3446	

Tabelle 3: Lösungen

5 E) Eine Zwischenbetrachtung (136)

Es ergibt sich unmittelbar die Frage nach den natürlichen Zahlen n, für die diese Gleichung primitive Lösungen hat.

⁵im Original steht „Tripeln“

⁶Siehe Kommentar (PB) im Abschnitt 2.

Die folgenden kleinen Tabellen geben eine erste Übersicht über die möglichen Lösungspaare solcher Gleichungen:

$3x^2 - y^2 = 2$		$3x^2 - y^2 = 11$		$3x^2 - y^2 = 8183$		$3x^2 - y^2 = 1586$	
x_n	y_n	x_n	y_n	x_n	y_n	x_n	y_n
1	1	3	4	53	17	23	1
3	5	5	8	61	55	25	17
11	19	10	17	89	125	33	41
41	71	18	31	123	193	45	67
153	265	37	64	177	293	47	71
571	989	67	116	303	517	67	109
2131	3691	138	239	493	755	107	181
7953	13775	250	433	647	1117	157	269
29681	51409	515	892	1123	1943	165	283
110771	191861	933	1616	1633	2827	243	419

Tabelle 4: Lösungspaare

Die Erstellung solcher Tabellen wird wesentlich erleichtert durch leicht erkennbare rekursive Beziehungen unter den Wertepaaren. Wir wollen sie kurz notieren:

<p>(1)</p> $x_n = 2x_{n-1} + y_n$ $y_n = 3x_{n-1} + 2y_{n-1}$ $n > 2$	<p>(2)</p> $x_n = 2x_{n-2} + y_{n-2}$ $y_n = 3x_{n-2} + 2y_{n-2}$ $n > 3$	<p>(3)</p> $x_n = 2x_{n-3} + y_{n-3}$ $y_n = 3x_{n-3} + 2y_{n-3}$ $n > 3$	<p>(4)</p> $x_n = 2x_{n-4} + y_{n-4}$ $y_n = 3x_{n-4} + 2y_{n-4}$ $n > 4$
$x_n = 2y_{n-1} + x_{n-2}$ $n > 2$	$x_n = 2y_{n-2} + x_{n-4}$ $n > 4$	$x_n = 2y_{n-3} + x_{n-6}$ $n > 6$	$x_n = 2y_{n-4} + x_{n-8}$ $n > 8$

Diese Formeln lassen sich durch einsetzen in die Ausgangsgleichung beweisen.⁷ Es ist dann z.B. für (1)

$$\begin{aligned}
 3x_{n+1}^2 - y_{n+1}^2 &= 3(2x_n + y_n)^2 - (3x_n + 2y_n)^2 \\
 &= 12x_n^2 + 12x_ny_n + 3y_n^2 - 9x_n^2 - 12x_ny_n - 4y_n^2 \\
 &= 3x_n^2 - y_n^2
 \end{aligned}$$

⁷Es scheint so, dass Glöckler die Rekursionsformeln empirisch gefunden hat. Wie man sie herleiten kann, ist im Kommentar zum Abschnitt 2 beschrieben (PB).