Primzahlen und pythagoräische Tripel

Georg Glöckler*

1 Einführung

Zu den berühmtesten Primzahlen zählen diejenigen, die mit dem Namen zweier großer Mathematiker verbunden sind. Es sind dies die Fermat'schen und die Mersenne'schen Primzahlen. Diese Primzahlen beziehen sich auf zwei klassische mathematische Probleme:

1. Welche regulären Vielecke lassen sich mit Zirkel und Lineal konstruieren?
2. Welche natürlichen Zahlen sind vollkommen, das heißt, bei welchen Zahlen ist die Summe ihrer Teiler (sie selbst ausgeschlossen) gleich der Zahl selbst?

Die Fermat-Zahlen haben die Form

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

und die Mersenne-Zahlen lauten

$$M_n = 2^n - 1$$

F_n und M_n sind nicht für alle n Primzahlen. Aber in den Fällen, wo sie es sind, bestimmen sie die Lösungen der beiden obigen Fragestellungen, und zwar in folgender Weise:

Ist $F_n$eine Primzahl, so lässt sich ein reguläres Vieleck mit dieser Primzahl als Seitenzahl konstruieren.

n	F_n	
0	3	mit Zirkel und Lineal konstruierbar
1	5	
2	17	
3	257	
4	65 537	

Ist M_n eine Primzahl, dann ist $2^{n-1}(2^n - 1)$ eine gerade vollkomene Zahl.

n	M_n	$2^{n-1}(2^n - 1)$
2	3	6
3	7	28
5	31	496
7	127	8 128
13	8191	33 550 336

Dies sei hier nur kurz andeutend erwähnt. Eine wesentlich einfachere Bauart haben die folgenden Primzahlen, deren Eigenschaften wir untersuchen wollen.

*Undatiertes Manuskript Nr. 152 aus dem Nachlass, übertragen von Peter Baum

2 Eine elementare Dreigliederung im Bereich der Primzahlen

Im Folgenden konstruieren wir 3 sich gegenseitig ausschließende Typen von Primzahlen:

$$p_1 = 4n + 1 \qquad p_2 = 8n - 1 \qquad p_3 = 8n + 3$$

Um welche Primzahlen es sich dabei handelt und welche Bedeutung ihnen zukommt lässt sich am besten anhand einer Tabelle erkennen. In der vorliegenden Tabelle nehmen wir noch de Typus $p_4 = 8n + 1$ hinzu. Die Primzahlen dieses Typus sind natürlich im Typus p_1 enthalten. Sie bekommen aber in einem speziellen arithmetische Zusammenhang ihre eigene Bedeutung.

n	$p_1 = 4n + 1$	$p_2 = 8n - 1$	$p_3 = 8n + 3$	$p_4 = 8n + 1$
0			3	
1	5	7	11	
2			19	17
3	13	23		
4	17	31		
5			43	41
6		47		
7	29		59	
8			67	
9	37	71		73
10	41	79	83	
11				89
12				97
13	53	103	107	
14				113
15	61			
16		127	131	
17			139	137
18	73			
19		151		
20			163	
21		167		
22	89		179	
23				
24	97	191		193
25	101	199		

Tabelle 1: Primzahltypen

Die Gesamtheit der Primzahlen p_1, p_2 und p_3 umfasst alle Primzahlen. Worin sich die 3 Primzahltypen unterscheiden ist unmittelbar nicht ganz offensichtlich. Eine genaue

Untersuchung ergibt aber das Folgende:

p_1: Für alle Primzahlen dieses Typs benötigt man mindestens 2 Quadratzahlen um sie als Summe dieser Quadratzahlen darstellen zu können:

$$5 = 1^2 + 2^2 \qquad 13 = 2^2 + 3^2 \qquad 17 = 1^2 + 4^2 \qquad \text{etc.}$$

p_3: Für eine entsprechende Darstellung benötigt man mindestens 3 Quadratzahlen:

$$3 = 1^2 + 1^2 + 1^2 \qquad 11 = 1^2 + 1^2 + 3^2 \qquad 19 = 2^2 + 3^2 + 3^2 \qquad \text{etc.}$$

p_2: Für diese Primzahlen benötigt man mindestens 4 Quadratzahlen:

$$7 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 \qquad 23 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 \qquad 31 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 5^2$$

Bemerkung 1. Die Primzahlen des Typs p_3 sind Spezialfälle der natürlichen Zahlen der Form $z = 4^m(8n + 1)$, die sich alle nur durch 4 Quadratzahlen darstellen lassen. Die Folge beginnt mit 7, 15, 23, 28, 31, 39, 47, 55, 60, 63, 71, 79, 87, 92, ...

Es ist leicht einzusehen, dass mit Ausnahme von 6 alle vollkommenen Zahlen dazugehören.

3 Die Primzahlen p_3 und p_4 und die primitiven Zahlentripel

Pythagoräische Zahlentripel sind drei natürliche Zahlen x_n, y_n und z_n, die durch die Beziehung $x_n^2 + y_n^2 = z_n^2$ miteinander verbunden sind. Man nennt diese Tripel primitiv, wenn x_n und y_n keine gemeinsamen Teiler (> 1) besitzen. In allen anderen Fällen nennt man sie imprimitiv.

In der Tabelle 2 auf Seite 6 sind die ersten 52 primitiven pythagoräischen Zahlentripel aufgelistet, und zwar in der Reihenfolge $z_n > z_{n-1}$. Man bemerkt insbesondere die zu jedem Tripel gehörigen Werte der Basisdifferenzen $y_n - x_n$ und die Basissumme $x_n + y_n$.

Der ausführlichen Tabelle 1 auf der vorherigen Seite können einige interessante Tatsachen entnommen werden:

1. Unter den natürlichen Zahlen der Form $4^m(8n - 1)$ sind die am Anfang unserer Darstellung schon erwähnten Mersenne'schen Zahlen und natürlich dann auch die speziellen Mersenne'schen Primzahlen (7, 31, 127, 8191, ...).
2. Abgesehen von der vollkommenen Zahl 6 sind alle weiteren vollkommenen Zahlen (28, 496, ...) nicht durch eine Summe von drei Quadratzahlen darstellbar:

$$28 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 5^2 = 1^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2$$
$$496 = 2^2 + 10^2 + 14^2 + 14^2 = 4^2 + 4^2 + 8^2 + 20^2 = 10^2 + 10^2 + 10^2 + 14^2$$

Man kann beweisen, dass jede natürliche Zahl durch eine Summe von höchstens 4 Quadratzahlen darstellbar ist (sog. Vierquadratesatz).

4 Eine zweite Charakterisierung der Primzahlen p_3

Der Blick auf die Tabelle 2 auf Seite 6 der ersten sog. primitiven pythagoräischen Zahlentripel zeigt unmittelbar, in welchem Zusammenhang die Primzahlen p_3 konstitutiv sind. Pythagoräische Zahlentripel sind drei Zahlen x_n, y_n und z_n, die durch die Beziehung $x_n^2 + y_n^2 = z_n^2$ miteinander verbunden sind. Man nennt sie primitiv, wenn x_n und y_n teilerfremd sind, in allen anderen Fällen imprimitiv.

Die Tabelle weist uns auf folgende Gesetzmäßigkeiten hin:

1. Die Basissummen x_n+y_n und die Basisdifferenzen y_n-x_n sind bei allen primitiven pythagoräischen Zahlentripeln Primzahlen der Form p_2 und p_4 oder Produkte aus diesen.[1]
2. Alle auftretenden Basissummen $x_n + y_n$ treten an anderer Stelle auch als Basisdifferenzen auf.
3. Zu jeder Basisdifferenz $y_n - x_n$ gehören unbegrenzt viele Tripel, dagegen zu jeder Basissumme endlich viele. Ist z.B. $x_n + y_n$ eine Primzahl, dann gehört zu ihr nur ein Tripel. Dazu ein Beispiel (Basissumme und Bassdifferenz = 7) :

$$3^2 + 4^2 = 5^2 \qquad \begin{aligned} 5^2 + 12^2 &= 13^2 \\ 8^2 + 15^2 &= 17^2 \\ 48^2 + 55^2 &= 73^2 \\ 65^2 + 72^2 &= 97^2 \\ 297^2 + 304^2 &= 435^2 \\ 396^2 + 403^2 &= 565^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

   Ist z.B. die Basissumme ein einfaches Produkt aus den Primzahlen p_2 und p_4, so gehören zu ihr 2 Tripel mit dieser Basissumme, aber natürlich unbegrenzt viele mit der gleichen Basisdifferenz, welche dieser Basissumme entspricht (Beispiel für Summe und Differenz $= 119 = 7 \cdot 17$):

$$\begin{aligned} 39^2 + 80^2 &= 89^2 \\ 20^2 + 99^2 &= 101^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 24^2 + 143^2 &= 145^2 \\ 49^2 + 168^2 &= 175^2 \\ 57^2 + 176^2 &= 185^2 \\ 180^2 + 299^2 &= 349^2 \\ 261^2 + 380^2 &= 461^2 \\ 481^2 + 600^2 &= 769^2 \\ 660^2 + 779^2 &= 1021^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

[1] Dies folgt nach etwas Rechnung aus der Parametrisierung $x = a^2 - b^2$, $y = 2ab$ mit der Nebenbedingung, dass a und b nicht beide zugleich gerade oder ungerade sind. (PB)

4. Die Primzahlen p_4 sind in 2-facher Weise konstitutiv. Sie können einerseits als Summe zweier Quadratzahlen charakterisiert[2] werden. Andererseits treten sie als Basissumme bzw. Basisdifferenz bei primitiven pythagoräischen Zahlentripeln auf.

$$
\begin{array}{ccc}
17 = 1^2 + 4^2 & 5^2 + 12^2 = 13^2 & 7^2 + 24^2 = 25^2 \\
 & & 28^2 + 45^2 = 53^2 \\
 & & 88^2 + 105^2 = 137^2 \\
 & & \vdots \\
41 = 4^2 + 5^2 & 20^2 + 21^2 = 29^2 & 36^2 + 77^2 = 85^2 \\
 & & 39^2 + 80^2 = 89^2 \\
 & & 319^2 + 360^2 = 481^2 \\
 & & \vdots \\
73 = 3^2 + 8^2 & 28^2 + 45^2 = 53^2 & 44^2 + 117^2 = 125^2 \\
 & & 95^2 + 168^2 = 193^2 \\
 & & 455^2 + 528^2 = 697^2 \\
 & & \vdots
\end{array}
$$

[2] Jede Primzahl vom Typus p_4 ist auch eine Primzahl vom Typus p_1, aber nicht umgekehrt. Letztere sind, wie Glöckler im Abschnitt 2 richtig betont hat, dadurch charakterisiert, dass sie alle als Summe von nur zwei Quadratzahlen darstellbar sind. Die Primzahlen p_4 sind also nicht die einzigen Primzahlen mit dieser Eigenschaft. (PB)

Pythagoreische Tripel und Primzahlen

		x	y	z	x + y	x - y	Primzahl mod 8			
a	b	$a^2 - b^2$	2ab	$a^2 + b^2$	$a^2 - b^2 + 2ab$	$a^2 - b^2 - 2ab$	≡ 1	≡ 3	≡ 5	≡ 7
2	1	3	4	5	7	1	1	3	5	7
3	2	5	12	13	17	7	17	11	13	23
4	1	15	8	17	23	7	41	19	29	31
4	3	7	24	25	31	17	73	43	37	47
5	2	21	20	29	41	1	89	59	53	71
6	1	35	12	37	47	23	97	67	61	79
5	4	9	40	41	49	31	113	83	101	103
7	2	45	28	53	73	17	137	107	109	127
6	5	11	60	61	71	49	193	131	149	151
7	4	33	56	65	89	23	233	139	157	167
8	1	63	16	65	79	47	241	163	173	191
8	3	55	48	73	103	7	257	179	181	199
7	6	13	84	85	97	71	281	211	197	223
9	2	77	36	85	113	41	313	227	229	239
8	5	39	80	89	119	41	337	251	269	263
9	4	65	72	97	137	7	353	283	277	271
10	1	99	20	101	119	79	401	307	293	311
10	3	91	60	109	151	31	409	331	317	359
8	7	15	112	113	127	97	433	347	349	367
11	2	117	44	125	161	73	449	379	373	383
11	4	105	88	137	193	17	457	419	389	431
9	8	17	144	145	161	127		443	397	439
12	1	143	24	145	167	119		467	421	463
10	7	51	140	149	191	89			461	
11	6	85	132	157	217	47				
12	5	119	120	169	239	1				
13	2	165	52	173	217	113				
10	9	19	180	181	199	161				
11	8	57	176	185	233	119				
13	4	153	104	185	257	49				
12	7	95	168	193	263	73				
14	1	195	28	197	223	167				
13	6	133	156	205	289	23				
14	3	187	84	205	271	103				
11	10	21	220	221	241	199				
14	5	171	140	221	311	31				
15	2	221	60	229	281	161				
13	8	105	208	233	313	103				
15	4	209	120	241	329	89				
14	7	147	196	245	343	49				
16	1	255	32	257	287	223				
12	11	23	264	265	287	241				
16	3	247	96	265	343	151				
13	10	69	260	269	329	191				
14	9	115	252	277	367	137				
16	5	231	160	281	391	71				
15	8	161	240	289	401	79				
16	7	207	224	305	431	17				
13	12	25	312	313	337	287				
14	11	75	308	317	383	233				
16	9	175	288	337	463	113				
14	13	27	364	365	391	337				
16	11	135	352	377	487	217				

Tabelle 2: primitive Tripel

Was aus der Tabelle 2 auf der vorherigen Seite nur im Ansatz erkennbar ist, ist das Folgende: Ist $x_n + y_n$ eine Primzahl, so entspricht dieser Primzahl genau ein pythagoräisches Zahlentripel mit dieser Summe, aber unbegrenzt viele Tripel, welche diese Summe als Differenz haben. Ist z.B. $x_n + y_n = 7$, so erkennt man in der Tabelle bereits 4 Tripel, welche diese Summe als Basisdifferenz haben.

Eine kleine algebraische Betrachtung versetzt uns in die Lage, unbegrenzt viele pythagoräische Zahlentripel mit der Basisdifferenz 7 zu ermitteln.
Wir suchen alle Tripel mit der Eigenschaft

$$x_n^2 + (x_n + 7)^2 = z_n^2$$

Daraus folgt dann

$$2z_n^2 - (2x_n + 7)^2 = 49$$

Mit der Abkürzung $s_n = 2x_n + 7$ ist dann

$$2z_n^2 - s_n^2 = 49$$

Dies ist eine allgemeine sog. Pell'sche Gleichung, deren erste Lösungen (siehe Tabelle 3 auf der nächsten Seite) man in diesen einfachen Fällen (wenn nämlich $x_n + y_n$ eine Primzahl der Form $8n \pm 1$ ist)[3] leicht bestimmen kann.
Die Rechnung ergibt einige Überraschungen:

1. Die praktische Rechnung bei der Ermittlung der Lösungen der verallgemeinerten Pell'schen Gleichung wird durch die Gültigkeit der Rekursionsformel

   $$s_{n+3} = 8z_n + s_{n-3}$$

   wesentlich erleichtert.[4]
2. Die gekürzten pythagoräischen Quadrupel sind stets solche mit der Basisdifferenz $x_n - y_n = 1$. Sie hätten sich aus der klassischen Pell'schen Gleichung

   $$2z^2 - s^2 = \pm 1$$

   unmittelbar ergeben.
3. Für die t_n gilt die Rekursionsformel

   $$6t_n - t_{n-1} = t_{n+1} \qquad \text{für } n \geq 2$$

4. Hätten wir an Stelle der Primzahl 7 eine andere der Primzahlen unter $x_n + y_n$ gewählt, wäre das Ergebnis das gleiche. Jedes 3. Tripel ist nämlich imprimitiv und ergibt gekürzt die Tripel mit der Basisdifferenz $y_n - x_n = 1$.

[3] Siehe Fußnote 1 auf Seite 4.

[4] Die Lösungen einer Pellschen Gleichung gestatten im Allgemeinen mehrere Rekursionsformeln. Es ist auch $z_{n+3} = 6z_n - z_{n-3}$. (PB)

n	z_n	s_n	Tripel	gekürzt
1	5	1	$(-3)^2 + 4^2 = 5^2$	
2	7	7	$7^2 = 7^2$	$0^2 + 1^2 = 1^2 = t_1^2$
3	13	17	$5^2 + 12^2 = 13^2$	
4	17	23	$8^2 + 15^2 = 17^2$	
5	35	49	$21^2 + 28^2 = 35^2$	$3^2 + 4^2 = 5^2 = t_2^2$
6	73	103	$48^2 + 55^2 = 73^2$	
7	97	137	$65^2 + 72^2 = 97^2$	
8	203	287	$140^2 + 147^2 = 203^2$	$20^2 + 21^2 = 29^2 = t_3^2$
9	425	601	$297^2 + 304^2 = 425^2$	
10	565	799	$396^2 + 403^2 = 565^2$	
11	1183	1673	$833^2 + 840^2 = 1183^2$	$119^2 + 120^2 = 169^2 = t_4^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
14	6895	9751	$4872^2 + 4879^2 = 6895^2$	$696^2 + 697^2 = 985^2 = t_5^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
17	40187	56833	$28413^2 + 28420^2 = 40187^2$	$4059^2 + 4060^2 = 5741^2 = t_6^2$

Tabelle 3: Pell'sche Gleichung, Lösungen

Im Folgenden wollen wir uns nun den interessanten Fällen zuwenden, wo die Basissumme ein Primpotenzprodukt aus den Primzahlen $p = 8n \pm 1$ ist. Es sei z.B.

$$
\begin{aligned}
x_n + y_n = 7^2 \qquad \text{oder} \qquad &= 119 = 7 \cdot 17 \\
&= 161 = 7 \cdot 23 \\
&= 833 = 7^2 \cdot 17 \\
&= 2737 = 7 \cdot 17 \cdot 23 \\
&= 7^2 \cdot 17 \cdot 23 \\
&= 7^2 \cdot 17^2 \cdot 23 \\
&= 7^3 \cdot 17 \cdot 23 \\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

Es ist von vornherein klar, dass es nur endlich viele Tripel geben kann, bei welchen die Basissumme gleich einer der oben angeführten Zahlen ist. Tripel mit den obigen Zahlen als Basisdifferenz gibt es dagegen unbegrenzt viele. Das folgt schon aus den lösbaren zugeordneten Pell'schen Gleichungen.

Kommentar (PB) Hier endet das Manuskript.
Georg Glöckler fiel in den Tabellen folgendes auf (N. 3 auf Seite 4):
1) Ist die Basissumme $x + y = p$ eines pythagoräischen Tripels (x, y, z) eine Primzahl p, so gibt es kein zweites Tripel (x', y', z') mit $x' + y' = p$.
2) Ist die Basissumme $x + y = p \cdot q$ ein Produkt aus zwei Primzahlen, so gehören zu ihr

genau zwei Tripel mit dieser Basissumme.

Diese beiden aus den Tabellen sich ergebenden Phänomene 1) und 2) kann man in der Tat beweisen. Gerhard Kowol hatte eine Beweisidee, die Albrecht Häberlein aufgegriffen und ausgeführt hat. Daraus resultiert die folgende Formulierung von Gerhard Kowol:

Behauptung 1. Gegeben seien zwei pythagoräische Tripel (a, b, c) und (d, e, f) mit a + b = d + e = p, p prim. Sind alle Zahlen positiv, so sind die Tripel identisch.

Lässt man die Voraussetzung weg, so ist die Aussage offensichtlich falsch. Beispielsweise gilt für $p = 7$:

$$32 + 42 = 52 \qquad (-5)^2 + 12^2 = 13^2 \qquad (-297)^2 + 304^2 = 425^2 \qquad \cdots$$

Beweis: (Häberlein – Kowol). Aufgrund der Parametrisierung gilt

$$\begin{array}{llll} a = m^2 - n^2 & b = 2mn & c = m^2 + n^2 & m > n > 0 \\ d = r^2 - s^2 & e = 2rs & f = r^2 + s^2 & r > s > 0 \end{array}$$

Damit folgt $p = a+b = (m+n)^2 - 2n^2$ und analog im 2. Fall. Es geht also um die Anzahl der Lösungen der Pellschen Gleichung $x^2 - 2y^2 = p$ mit folgender Nebenbedingung: Da $y = n$, $x = m + n$ und $m > n > 0$ muss $x > 2y > 0$ sein.

Die Pellsche Gleichung ist genau dann lösbar, wenn $p \equiv +1\,(8)$ gilt. Wie üblich rechnet man in $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$. Es sei $x + y\sqrt{2}$ eine Lösung, die die Nebenbedingung erfüllt. Man erhält alle durch Multiplikation mit einer Einheit in $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$. Eine solche Einheit hat die Form $\pm\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^k$, $k \in \mathbb{Z}$. Nun muss man zeigen, dass für $k \neq 0$ und positives Vorzeichen die Bedingung $x > 2y > 0$ stets verletzt ist. Ist k positiv, so muss das positive Vorzeichen gewählt werden. Hier kann man ein Argument von Häberlein anwenden. Für $k = 1$ erhält man

$$\left(x + y\sqrt{2}\right)\left(1 + \sqrt{2}\right) = (x + 2y) + (x + y)\sqrt{2} = x' + y'\sqrt{2}$$

wobei aber offensichtlich $y' < x' < 2y'$ gilt. Ist $k > 1$, so haben die Einheiten die Gestalt $z + n\sqrt{2}$ mit $z, n \in \mathbb{N}$. Nun ist

$$\left(x' + y'\sqrt{2}\right)\left(z + n\sqrt{2}\right) = \left(x'z + 2y'n\right) + \left(x'n + y'z\right)\sqrt{2} = x'' + y''\sqrt{2}$$

Damit folgt aber $x'' - 2y'' = (x' - 2y')\,z + 2\,(y' - x')\,n < 0$.

Ist $k = -m$, $m \in \mathbb{N}$, so ist $\pm\left(1 + \sqrt{2}\right)^k = \pm\left(1 - \sqrt{2}\right)^m$. Zunächst sei das positive Vorzeichen angenommen. Es ist

$$\left(x + y\sqrt{2}\right)\left(1 - \sqrt{2}\right) = (x - 2y) + (-x + y)\sqrt{2} = x' + y'\sqrt{2}$$

mit $x' > 0,\ y' < 0$. Ist $m > 1$, so haben die Einheiten die Gestalt $z - n\sqrt{2}$ mit $z, n \in \mathbb{N}$. Nun ist

$$\left(x' + y'\sqrt{2}\right)\left(z - n\sqrt{2}\right) = \left(x'z - 2y'n\right) + \left(-x'n + y'z\right)\sqrt{2} = x'' + y''\sqrt{2}.$$

Hier ist wieder $x'' > 0,\ y'' < 0$. Verwendet man andererseits zu Beginn das negative Vorzeichen, so folgt $x'' < 0,\ y'' > 0$. Somit ist in beiden Fällen die Nebenbedingung stets verletzt.

Behauptung 2. Gegeben seien zwei pythagoräische Tripel (a, b, c) und (d, e, f) mit $a + b = d + e = pq$ und p,q prim. Sind alle Zahlen positiv, so gibt es genau zwei Tripel.

Dabei müssen beide Primzahlen von der Gestalt $\equiv \pm 1\,(8)$ sein.

Zum Beweis. Gilt

$$p = \left(x_1 + y_1\sqrt{2}\right)\left(x_1 - y_1\sqrt{2}\right) \qquad q = \left(x_2 + y_2\sqrt{2}\right)\left(x_2 - y_2\sqrt{2}\right)$$

mit $x_i > 2y_i > 0$, so erhält man die zwei Lösungen

$$\left(x_1 + y_1\sqrt{2}\right)\left(x_2 + y_2\sqrt{2}\right) \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{l} \left(x_1 + y_1\sqrt{2}\right)\left(x_2 - y_2\sqrt{2}\right) \text{oder} \\ \left(x_1 - y_1\sqrt{2}\right)\left(x_2 + y_2\sqrt{2}\right) \end{array}$$

Von den letzten zwei Möglichkeiten erfüllt genau eine die geforderte Nebenbedingung. Die restliche Argumentation verläuft wie im ersten Fall.