Ein Denken in übergeordneten Zusammenhängen

Der Gedanke der Metamorphose

Georg Glöckler*

Goethe hat im Schutze der Poesie ein höchst wissenschaftliches Werk geschrieben: Die Metamorphose der Pflanze. Dies ist eine in ihrer Bedeutung gar nicht hoch genug einzuschätzende Entdeckung. In den Vorträgen in Dornach im Jahre 1919 eine Woche vor der Gründung der Waldorfschule in Stuttgart charakterisiert Rudolf Steiner diese Tatsache wie folgt (Zitat aus GA 296 S. 103):

> Wenn Sie daher die kleine Abhandlung von Goethe aus dem Jahre 1790 lesen: «Versuch, die Metamorphose der Pflanzen zu erklären», so finden Sie gerade in dieser Abhandlung, wie Goethe allmählich versucht, die Pflanze werdend zu erfassen, nicht als Totes, Abgeschlossenes, sondern als Werdendes von Blatt zu Blatt. Da sehen Sie den Aufgang jener Erkenntnis, die gerade in diesem fünften nachatlantischen Zeitraum gesucht werden sollte.
>
> Es ist also im Goetheanismus der Grundton angegeben für dasjenige, was gesucht werden soll durch diesen fünften nachatlantischen Zeitraum. Es wird gewissermaßen die Wissenschaft im Goetheschen Sinne aufwachen müssen, vom Toten zum Lebendigen herüberzugehen. Das ist ja gemeint, wenn ich immer wieder und wiederum sage, wir sollen uns aneignen, aus den toten abstrakten Begriffen herauszukommen, in die lebendigen konkreten Begriffe hinein. Und das, was ich vorgestern und gestern gesagt habe, ist im Grunde genommen der Weg in diese lebendigen konkreten Begriffe hinein.

Die Idee der Metamorphose kann sich zum Okular entwickeln für alles was wir gewöhnlich mit Leben in der Welt beschreiben. Die folgenden Skizzen sind nur zwei Beispiele aus diesem Bereich

Metamorphose der Pflanze

Metamorphose der Schmetterlinge

Bemerkenswert ist nun, dass auch die Geometrie von dieser Idee erfasst wird. Der große Mathematiker Felix Klein hat am Anfang des letzten Jahrhunderts seine sogenannte

*undatiertes Manuskript Nr. 211 aus dem Nachlass, übertragen von Peter Baum

Invarianten-Theorie entwickelt. Er untersuchte die Eigenschaften von Transformationen im Hinblick auf das, was bei diesen Transformationen invariant bleibt. Dieses Werk hat den Namen „Erlanger Programm“. Der wesentliche Gedanke dabei ist die Idee des Bleibenden in der Veränderung bzw. in den Verwandlungen. Eine Pflanze verwandelt sich vom Samen in den Keim, von da in die Blattpflanze und dann weiter in die Blütenpflanze und schließlich verwandelt sich die Pflanze in eine Samenpflanze, die Blätter und Blüten fallen ab. Dabei handelt es sich immer um ein und dieselbe Pflanze. Bemerkenswert ist allerdings bei dieser Beschreibung die Tatsache, dass es sich um höhere Pflanzen, d.h. Blütenpflanzen handelt. Dieses bemerkt Gerbert Grohmann in seinem schönen Buch „Die Pflanze“.

Nach dem Skizzierten sind also Metamorphosen grundlegende Gestalt-Wandel. Prozesse, wo das Wesentliche nicht bloß die Veränderung ist, sondern zum Wesentlichen das Gleichbleibende (die Invarianten) in der Veränderung gehört. Auf S. ? haben wir schon eine ganz einfache Metamorphose beschrieben. Sie führt vom Kreis über die Ellipse zur Parabel und schließlich zur Hyperbel. Alle diese Kurven haben die immanente Eigenschaft, Kegelschnitte zu sein.[1]

Nun gibt es wesentlich kompliziertere Verwandlungen. Eine noch einigermaßen leicht zu erfassende Verwandlung ist diejenige der Cassinischen Linienarten. Cassinische Linien sind solche Kurven, deren Abstandsprodukt zu zwei festen Punkten stets konstant ist. Eine solche Metamorphose ist schon siebengliedrig (Abb. 1, Konstruktionen mit Erläuterung im Anhang):

1. Stufe: 2 getrennte Punkte
2. Stufe: 2 getrennte Ovale
3. Stufe: die Lemniskate
4. Stufe: doppelt eingebuchtetes Oval
5. Stufe: „gespanntes“ Oval
6. Stufe: gewöhnliches Oval
7. Stufe: die Peripherie der Ebene als Ferngerade.

Reizvoll ist es, den Prozess der Verwandlungen im Gegenräumlichen zu verfolgen.[2]

Rudolf Steiner war es nun, der die Idee der Metamorphose noch wesentlich erweiterte und zwar nach zwei Richtungen:

1. in Bezug auf den Menschen im Hinblick auf seine verschiedenen Erdenleben. Dabei stülpt sich die radial orientierte Organisation der Gliedmaßen um in die sphärische Hauptesorganisation. Ein Außen wird dadurch zum Innen (vgl. z.B. GA 323 10. Vortrag).

[1] Die letzten beiden Sätze konnten nicht eindeutig entziffert werden. Die Beschreibung der Kegelschnitts-Metamorphosen fehlt im Manuskript und sollte wohl noch ergänzt werden. Ich habe sie im Anhang dargestellt (PB).

[2] Zeichnungen mit Erläuterungen siehe Anhang. Glöckler bezieht sich hier wahrscheinlich auf die von Locher-Ernst in „Freie Geometrie ebener Kurven“, Kapitel 6, Form und Gegenform, (2. Auflage 2016, Verlag am Goetheanum) beschriebenen Gegenformen (PB).

2. in Bezug auf die Metamorphose der Wachstumskräfte in Gedankenkräfte bei der Entwicklung des Menschen. Danach wird die Metamorphosen-Idee zur Grundlage des Entwicklungs-Gedankens überhaupt.

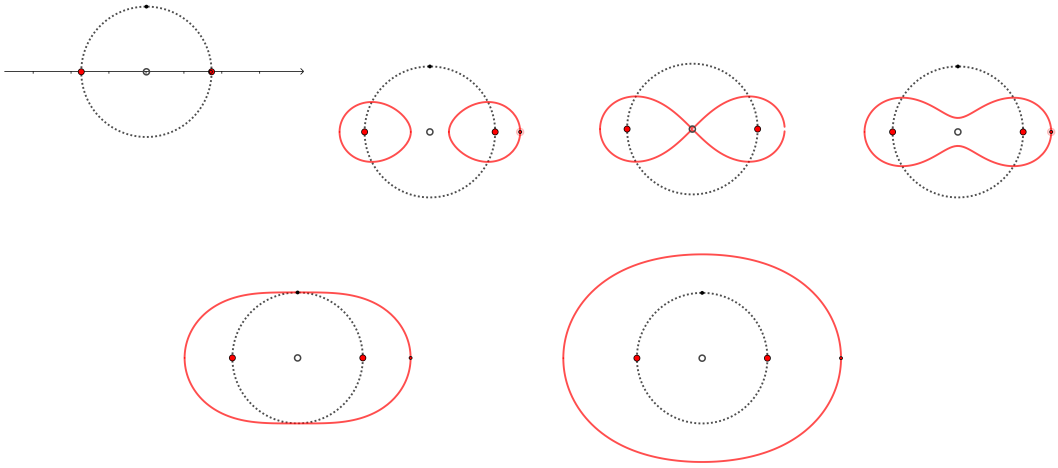

Abbildung 1: Cassinische Kurven

Einige Aspekte zu 1.)

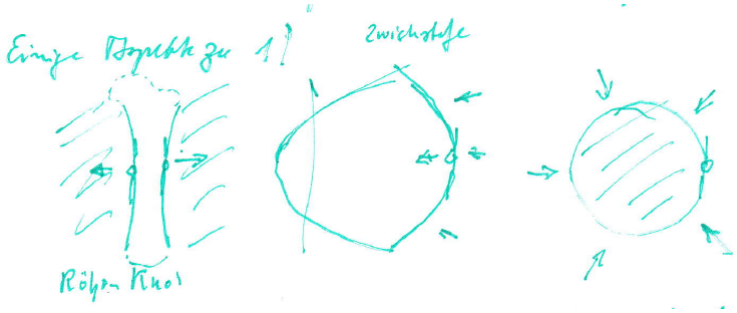

Abbildung 2: Skizze von Glöckler

In der Ebene lässt sich die Metamorphose recht einfach beschreiben.

In Wirklichkeit ist der Röhrenknochen ein kompliziertes Raumgebilde, das sich nicht in anschaulicher geometrischer Kontinuität verwandelt in eine Kugel. Der Vorgang ist in der Tat komplizierter weil hier das Geometrisch Imaginäre hinzugezogen werden muß, was ohne gründliche Voraussezungen hier nicht sachgemäß beschrieben werden kann. Dem mathematischen Kenner zeigt sich das allerdings.

Während die Pflanze räumlich auseinander gliedert was sie zeitlich nacheinander macht, bringt der Mensch in jeder Inkarnation eine Seite seines Wesens zur Erscheinung. Das ewige Ich ist dabei die einzige Invariante dieser Erscheinungsform.

Durch die Erscheinungsformen erfasst der Mensch den ihn umgebenden Raum. In den großen nachtodlichen Bereichen lebt der Mensch in dem, was wir heute begrifflich als Gegenraum mit seinen komplementären Gesetzen erfassen können.

Aus dem Beschriebenen läßt sich etwas von der großen Tragweite der Goetheschen Idee der Metamorphose erahnen. Goethe hat diese Idee wesentlich an der Pflanze erkannt, genauer an den Blütenpflanzen. Es ist aber an der Zeit, im Hinblick darauf eine ganz andere, allerdings für das heutige Zeitempfinden ungewöhnliche Frage zu stellen: Welche Kräfte wirken in einer Pflanze, welche zur Blüte hin strebt? Hier können wir nur erraten, wie wir den weiten kosmischen Umkreis einer Pflanze erfassen. Auf Seite ? haben wir die Gesetze des Pentagramm beschrieben und die eigenartige Tatsache der Blattstellungsfolge entsprechend der Fibonacci-Folge.[3] In den Vorträgen über Pastoralmedizin Rudolf Steiners finden sich nun wesentliche Aussagen im Hinblick auf die durch das Pflanzenwirken spezifischen Planetenkräfte und da wird auf die Venus als in den Pflanzen wirkender Blütenimpuls aufmerksam gemacht.[4]

Nun ist dieser Hinweis gar nicht so überraschend wenn man das von Kepler auf Seite ? Beschriebene berücksichtigt.[5] Dabei kommt aber noch etwas in Betracht was den Astronomen schon lange bekannt war: das sogenannte Pentagramma Veneris. Die Venus macht nämlich in 8 Jahren ziemlich sehr genau 5 synodische Umläufe à 584 Tagen. Denn es ist

$$\frac{584}{365} = \frac{8}{5}$$

wenn man mit 73 kürzt.

Damit ist die Bewegungsgestalt der Venus im Bild erfasst, der Konfiguration des Pentagramm entsprechend.

Die Venus als leuchtender Morgen- oder Abendstern wird oft auch Sonne der Dämmerung genannt. Sie weist uns in ihrem Bewegungsbild auf das Pentagramm aus dessen Eigenschaften wir die Blattstellungsfolge vor allem der Blütenpflanzen entwickeln konnten. Dass es gerade dieser Blütenimpuls der Venus in den Blütenpflanzen ist, der diese Pflanzen uns in dieser so schönen Metamorphosenreihe zeigt und Goethe zu seinem Gedicht[6] angeregt hat, zeigt uns, was alles zusammenwirken muss, um ein Denken in übergeordneten Zusammenhängen handhaben zu können.

Die projektive Geometrie ermöglicht auf der Grundlage der Begiffsbildung Raum und Gegenraum den von Goethe entwickelten Gedanken der Metamorphose in ganz umfassender Weise gedanklich zu erfassen. Das Studium geometrischer Verwandlungen bzw. Transformationen escheint so in einem neuen Licht. Wesentliche Verwandlungen sind dabei diejenigen, die Räumliches in Gegenräumliches stetig verwandeln und umgekehrt. Dies alles führt zu einem Denken in übergeordneten Zusammenhängen was im Grunde den ganzen Reiz eines modernen Mathematikunterricht ausmacht.

[3] Glöckler bezieht sich hier auf eine Abhandlung, die bislang nicht aufgefunden wurde (PB).

[4] GA 318 S. 109 (PB).

[5] Siehe Fußnote 3 (PB)

[6] Wahrscheinlich meinte Glöckler das Gedicht „Die Metamorphose der Pflanzen“, https://de.wikisource.org/wiki/Die_Metamorphose_der_Pflanzen

Anhang

Die Metamorphose der Kegelschnitte kann in verschiedener Weise vollzogen werden. Ihre Darstellung von Georg Glöckler war im Nachlass nicht zu finden.

Leitkreiskonstruktion Im Folgenden gehen wir von der Leitkreiskonstruktion aus: Gegeben sind zwei feste Punkte F und L und ein Leitkreis, der durch L geht und seinen Mittelpunkt M_L auf der Achse FL hat. Eine sich um F drehende Gerade f schneidet den Kreis in zwei Punkten L_1 und L_2, die bei der Drehung von f auf dem Leitkreis wandern. Die beiden Mittelsenkrechten der Strecken $\overline{FL_1}$ und $\overline{FL_2}$ treffen die Strecken $\overline{M_L L_1}$ und $\overline{M_L L_2}$ im zwei Kurvenpunkten P_1 und P_2, die in jeder Lage von M_L bei der Drehung von f den Kegelschnitt erzeugen.

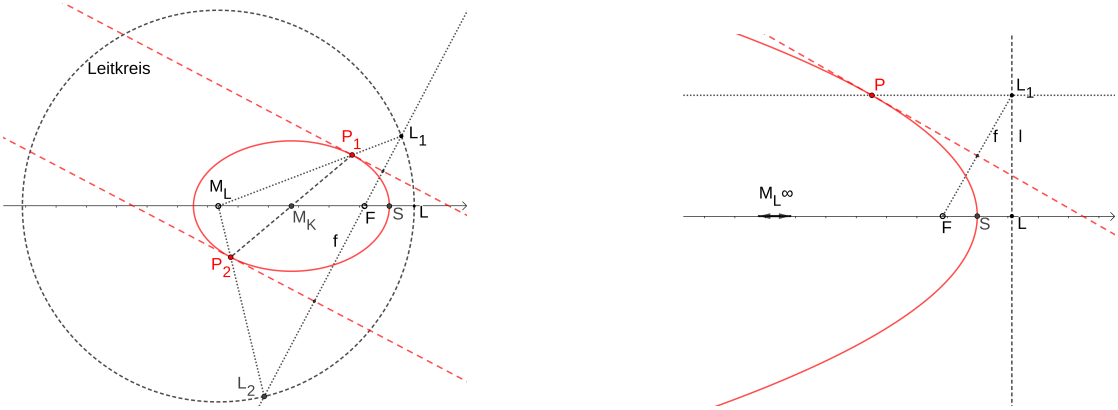

Abbildung 3: Metamorphosen der Kegelschnitte: Ellipse → Parabel

Liegt F im Inneren des Kreises, so beschreiben P_1 und P_2 eine Elipse mit M_L als zweitem Brennpunkt und dem Schnittpunkt von P_1P_2 mit der Achse als Mittelpunkt M_K. Die Mittelsenkrechten sind zwei parallele Ellipsentangenten, und der rechte Scheitelpunkt S ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{FL}$ (Abb. 3 links).

Wandert nun M_L (bei festgehaltenem F und L) auf der Achse FL nach links, so werden der Leitkreis und die Ellipse, die bei jeder Lage von M_L durch die Drehung von f erzeugt wird, immer größer. Im Grenzfall liegt M_L im Unendlichen und der Leitkreis ist zur Leitgerade l geworden, die im Punkt L auf der Achse FL senkrecht steht. Die Ellipse hat sich in eine Parabel verwandelt, und der linke Ellipsenscheitel ist zum Fernpunkt der Parabel geworden (Abb. 3 rechts).

Wenn nun der Kreismittelpunkt M_L von rechts aus dem Unendlichen kommend wieder erscheint, ist das vormals Innere des Kreises nun zum Äußeren geworden, die „Strecken“ $M_L L_1$ und $M_L L_2$ gehen über das Unendliche und schneiden die Mittelsenkrechten in zwei Hyperbelpunkten P_1 und P_2 (Abb. 4 links). Ist die Gerade f eine Tangente an den Leitkreis, so fallen L_1 und L_2 in einem Punkt zusammen und auch P_1 und P_2 fallen in einem Fernpunkt der Hyperbel zusammen und die Mittelsenkrechten fallen in einer Asymptote zusammen, die zugleich Tangente in dem Fernpunkt ist (Abb. 4 rechts).

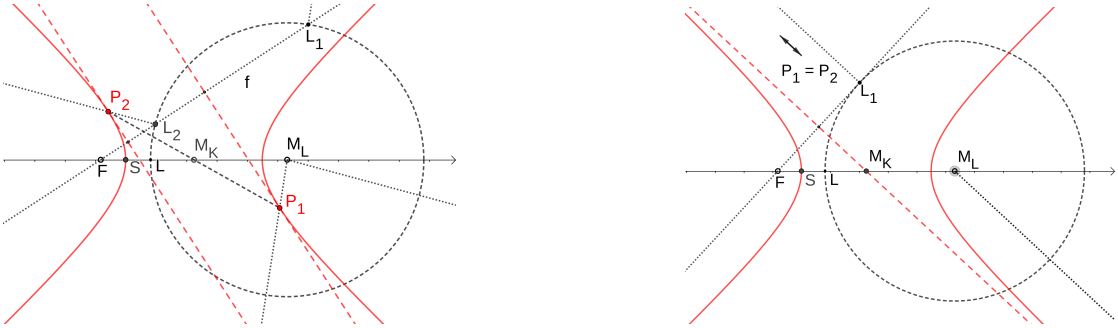

Abbildung 4: Hyperbel, Asymptote

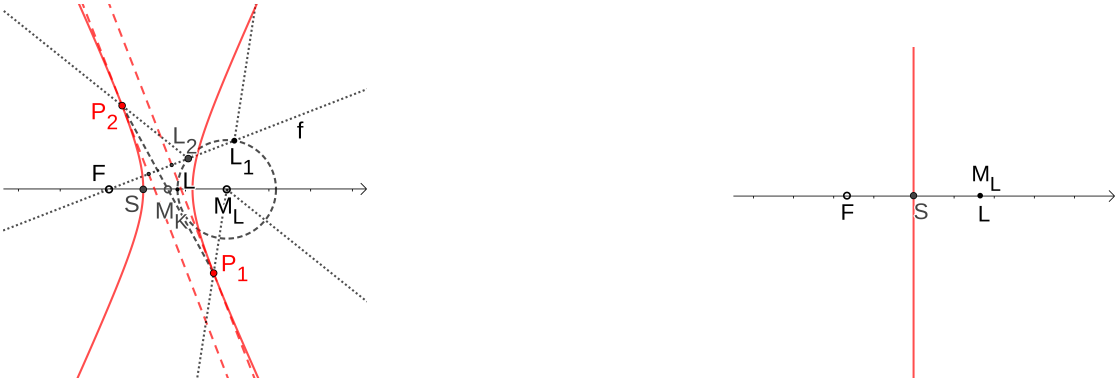

Abbildung 5: Hyperbel → Gerade

Wandert M_L weiter nach links auf L zu, so wird der Leitkreis immer kleiner, die beiden Hyperbeläste nähern sich an und die beiden Fernpunkte der Hyperbel wandern aufeinander zu, d.h der Winkel zwischen den beiden Asymptoten wird immer kleiner (Abb. 5 links). Ist schließlich $M_L = L$, so ist der Leitkreis zu seinem Mittelpunkt degeneriert und die beiden Hyperbeläste sind zu einer auf der Achse im Punkt S senkrechten Geraden degeneriert und mit den beiden Asymptoten zusammengefallen (Abb. 5 rechts).

Wandert M_L weiter nach links, so entsteht der Leitkreis wieder, und die Hyperbeläste werden immer schmaler (Abb. 6 links). Im Grenzfall ist $M_L = S$, der Leitkreis geht durch F, und die Hyperbeläste fallen mit der uneigentlichen „Strecke“ FS zusammen (Abb. 6 rechts).

Wandert M_L weiter nach links, entsteht wieder eine zunächst sehr schmale Ellipse, weil F wieder im Kreisinneren liegt (Abb. 7 links). Diese Ellipse fällt im vorigen Grenzfall ($M_L = S$) mit der eigentlichen Strecke $\overline{FS}$ zusammen, sodass die ganze Achse den Kegelschnitt im Grenzfall darstellt (Abb. 6 rechts).

Wandert M_L weiter nach links in den Punkt F, so wird die Ellipse immer runder und schließlich zum Kreis (Abb. 7 rechts).

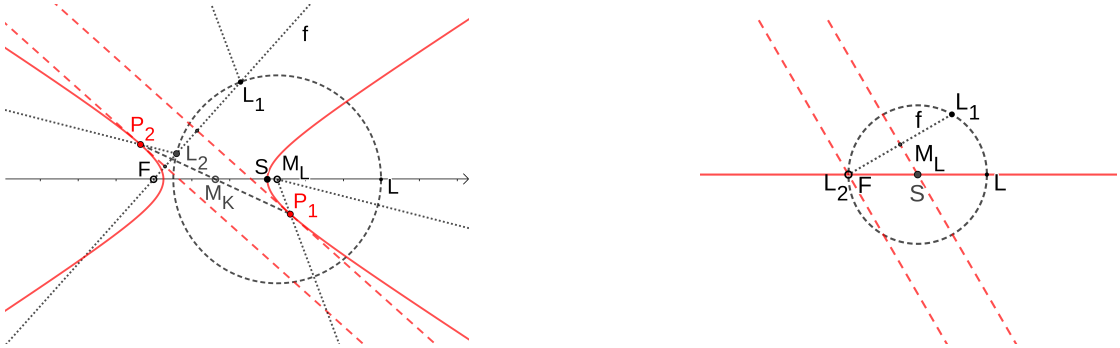

Abbildung 6: Hyperbel →Achse

Abbildung 7: Ellipse → Kreis

Leitgeradenkonstruktion Ebenso kann eine Metamorphose der Kegelschnitte durch die Leitlinieneigenschaft erzeugt werden: Alle Punkte, deren Abstände von einer festen Gerade (Leitlinie) und einem festen Punkt ein konstantes Verhältnis ϵ haben, liegen auf einem Kegelschnitt (Abb. 8).

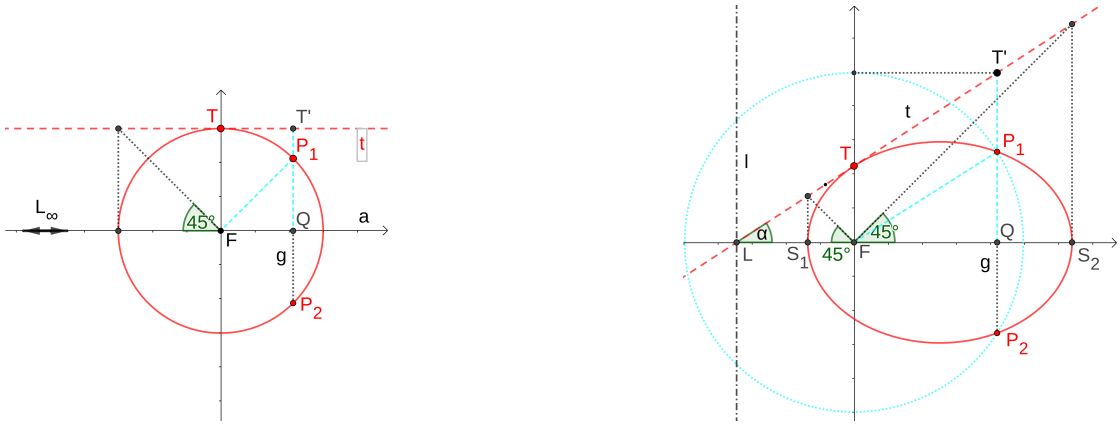

Abbildung 8: Leitgeradenkonstruktion

Gegeben sei eine feste Gerade a und ein fester Punkt T, der nicht auf a liegt. Das Lot von T auf a trifft a im Punkt F. Eine beliebige durch T gehende Gerade t (die sich dann als Tangente herausstellt) schneidet a in einem Punkt L. Die Orthogonale in L zu a ist die Leitlinie l.
Es sei nun T' ein beliebiger Punkt auf t und g die durch T' gehende Orthogonale zu a, welche a in einem Punkt Q schneidet. Der Kreis um F mit dem Radius $r = \overline{QT'}$ schneidet g dann in zwei Kurvenpunkten P_1und P_2 des Kegelschnitts (Abb. 8).

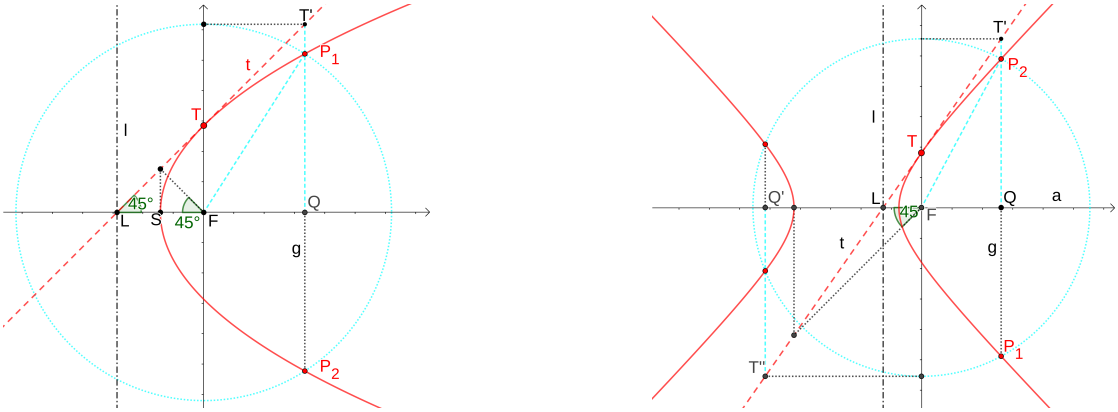

Abbildung 9: Parabel und Hyperbel

Ist α der von a und t eingeschlossene spitze Winkel, so ist laut Konstruktion offenbar stets

$$\frac{\overline{FP}}{\overline{QL}} = \frac{\overline{QT'}}{\overline{QL}} = \tan\alpha = \epsilon$$

also ist die Leitlinieneigenschaft in der Tat erfüllt.

Für $0 < \epsilon < 1$, also $0° < \alpha < 45°$ entsteht eine Ellipse (Abb. 8 rechts) und im Fall $\alpha = 0°$ und $\epsilon = 0$ wegen $\overline{FP} = \overline{QT'} = \overline{FT}$ ein Kreis (Abb. 8 links).

Für $\alpha = 45°$ ($\epsilon = 1$) entsteht eine Parabel (Abb. 9 links) und für $\alpha > 45°$ ($\epsilon > 1$) entsteht eine Hyperbel. (Abb. 9 rechts). Im Fall $\alpha = 90°$ ($\epsilon = \infty$) ziehen sich die Hyperbeläste auf die Gerade t zusammen.

Die Scheitelpunkte der Kurven erhält man durch zwei durch F gehende 45° Geraden, die die Tangente t in zwei Punkten S_1' und S_2' treffen. Die Lote von diesen Punkten auf die Achse a liefern die Scheitelpunkte S_1 und S_2. Im Fall der Parabel ist einer der beiden Scheitelpunkte der Fernpunkt der Achse.

Dreht sich nun die Tangente t kontinuierlich um den festen Punkt T entgegen dem Uhrzeigersinn, so entstehen der Reihe nach die Metamorphosen der Kegelschnitte: Kreis, Ellipse, Parabel nach rechts geöffnet, Hyperbel, Gerade FT, Hyperbel (Abb. 10 links), Parabel nach links geöffnet (Abb. 10 rechts), Ellipse, und schließlich wieder der Kreis.

Konstruktion der Cassinischen Kurven Für die Punkte einer Cassinischen Kurve gilt: Das Produkt der Abstände von zwei festen Punkten F_1 und F_2 ist constant. Die Kon-

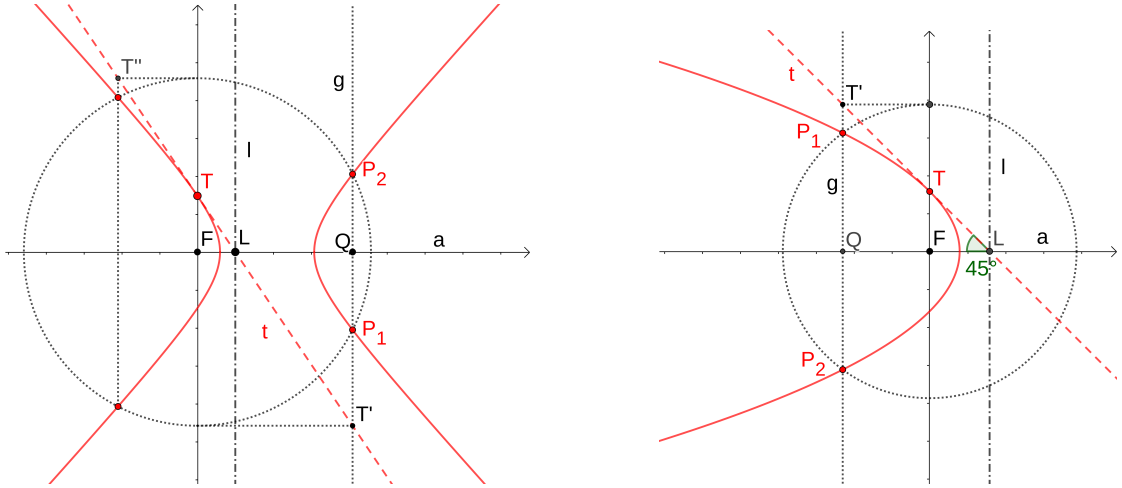

Abbildung 10: Hyperbel, und Parabel, nach links geöffnet

struktion der Cassinischen Kurven ist aus Abb. 11 ersichtlich. Ein fester Kreis k um den Mittelpunkt O mit dem Radius r schneidet die x-Achse in zwei Punkten F_1 und F_2. Rechts von F_2 befindet sich ein beliebiger Punkt S auf der x-Achse, sein Abstand vom Mittelpunkt O sei $d = \overline{OS}$. Eine beliebige durch S gehende Kreissekante schneidet den Kreis k in zwei Punkten K_1 und K_2. Im Grenzfall wird die Sekante zur Tangente mit dem Berührpunkt $K_1 = K_2 = T$, mit $\overline{ST} = a$. Nach dem Sekanten-Tangenten-Satz ist dann $\overline{SK_1} \cdot \overline{SK_2} = \overline{ST}^2 = a^2 = \text{const.}$ Somit schneidet der Kreis k_1 um F_1 mit dem Radius $r_1 = \overline{SK_1}$ den Kreis k_2 um F_2 mit dem Radius $r_2 = \overline{SK_2}$ in zwei Punkten P und P' einer Cassinischen Kurve. Im Fall der Tangente ist $r_1 = r_2 = \overline{ST} = a$, die beiden Kreise k_1 und k_2 sind gleich groß und schneiden sich auf der y-Achse falls $a \geqq r$ ist. Im Fall $a = r$ ist wegen $d^2 = r^2 + a^2$ (Pythagoras)

$$d^2 = 2r^2$$
$$d = \sqrt{2} \cdot r$$

und die Kurve ist eine Lemniskate mit dem Doppelpunkt O.

Die sieben Stufen ergeben sich dann folgendermaßen:

1. Stufe:	2 getrennte Punkte	$d = r$, also $a = 0$
2. Stufe:	2 getrennte Ovale	$r < d < \sqrt{2} \cdot r$
3. Stufe:	die Lemniskate	$d = \sqrt{2} \cdot r$ und $a = r$
4. Stufe:	doppelt eingebuchtetes Oval (Abb. 11)	$\sqrt{2} \cdot r < d < \sqrt{2}$
5. Stufe:	„gespanntes“ Oval	$d = \sqrt{3} \cdot r$ und $a = \sqrt{2} \cdot r$
6. Stufe:	gewöhnliches Oval	$\sqrt{3} \cdot r < d$
7. Stufe:	die Peripherie der Ebene als Ferngerade	$d = \infty$

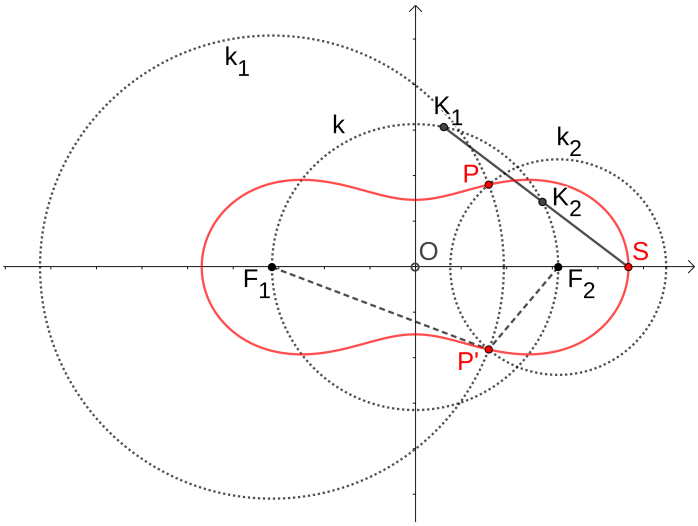

Abbildung 11: Cassini-Konstruktion

Die Gegenformen der Cassinischen Kurven Den Begriff Gegenform einer Kurve hat Locher-Ernst in seinem Buch „Freie Geometrie ebener Kurven“ , 2. Aufl. 2016 geprägt.[7] Die Konstruktion einer Gegenform einer gegebenen Kurve ist aus Abb. 12 am Beispiel der Lemniskate ersichtlich:

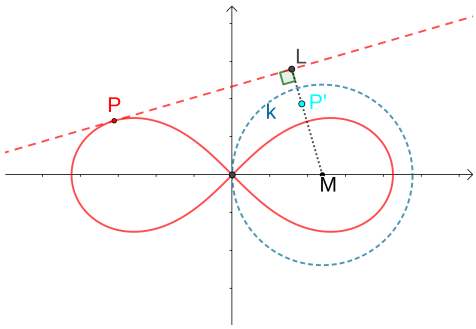

Abbildung 12: Konstruktion der Gegenform

Gegeben sei außer der Lemniskate ein beliebiger Kreis k („Polarisator“). Jede Tangente der Lemniskate mit ihrem Berührpunkt P hat dann als Polare von k einen Pol P’. Wandert nun P mit seiner Tangente auf der Lemniskate, so beschreibt P’ eine Gegenform der Lemniskate. Die Gestalt der Gegenform hängt natürlich nicht nur von der Kurve, sondern auch von der Lage des Polarisationskreises k ab. Alle so mit beliebigen Kreisen erzeugten Gegenformen stimmen aber in gewissen Eigenschaften überein:

[7] Eine sehr schöne Darstellung findet man auch in dem Buch „Projektive Geometrie“, edition waldorf 2009, von Alexander Stolzenburg

- Es gibt fünf Singularitäten, die sich folgendermaßen polar entsprechen:

Doppelpunkt	$\longleftrightarrow$	Doppeltangente
Dornspitze	$\longleftrightarrow$	Wendestelle
Schnabelspitze	$\longleftrightarrow$	Schnabelspitze

  Zu jeder Singularität einer Kurve hat die Gegenform eine polare Singularität. Da die Lemniskate zwei Wendestellen besitzt, die einen gemeinsamen Punkt haben, hat jede Gegenform der Lemniskate zwei Dornspitzen, die eine gemeinsame Tangente haben.
- Die Ordnung einer Kurve (Maximalzahl von Schnittpunkten mit einer beliebigen Geraden) ist gleich der Klasse der Gegenform (Maximalzahl der Tangenten, die durch einen beliebigen Punkt gehen), und die Klasse einer Kurve ist gleich der Ordnung der Gegenform.
- Ein Punktgebiet wird mit der Anzahl der Tangenten notiert, die durch jeden Punkt dieses Gebietes gehen, Ein Geradengebiet wird mit der Anzahl der Schnittpunkte notiert, die jede Gerade des Gebietes mit der Kurve hat. Die Anzahl der Punktgebiete der Kurve mit jeweils derselben Notation ist gleich der Anzahl der Geradengebiete der Gegenform mit derselben Notaion, und umgekehrt.

Die Lemniskate hat drei 2-Punktgebiete und ein 4-Punktgebiet (Abb. 13, die Ferngerade ist hier keine Gebietsgrenze!). Daher gehen durch jeden Punkt der Ebene mindestens zwei Tangenten, also auch durch den Mittelpunkt eines beliebigen Polarisationskreises, und da die Pole dieser Tangenten Fernpunkte sind, hat jede Gegenform einer Lemniskate mindestens zwei Fernpunkte, kann also als geschlossene Kurve nicht ganz im Endlichen liegen.

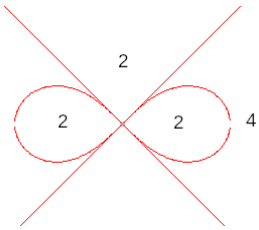

Abbildung 13: Punktgebiete der Lemniskate

Auch ohne die Konstruktion mit Hilfe eines Polarisationskreises (oder eines beliebigen Kegelschnitts) kann man mit obigen Kriterien eine „richtige“ Gegenform erfinden, was Georg Glöckler meisterhaft gelang.

Nicht alle der folgenden Gegenformen der Cassinischen Kurven sind exakt konstruiert, sondern „erfunden“.

1. Stufe: 2 getrennte Punkte Die Gegenform des Kreises als Punktgebilde ist der Kreis als Tangentengebilde. Die Gegenform des Kreisinneren als Punktgebiet ist das

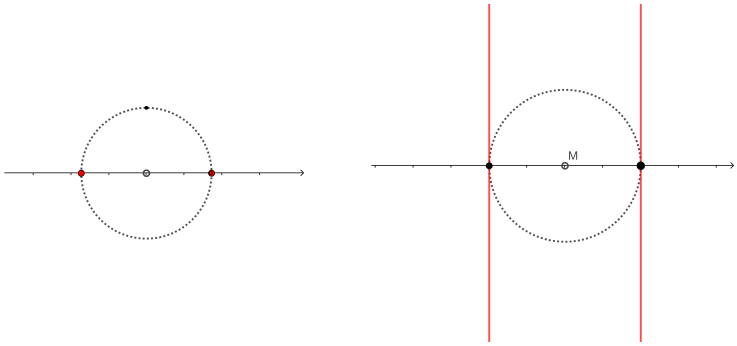

Abbildung 14: 2 Kreispunkte $\longleftrightarrow$ 2 Kreistangenten

Kreisäußere als Geradengebiet. Die Gegenform des Kreismittelpunktes ist daher die Ferngerade. Da die Verbindungsgerade der Cassini-Punkte durch den Kreismittelpunkt geht, muss der Treffpunkt der beiden Tangenten in der Gegenform auf der Ferngeraden liegen (Abb. 14).

2. Stufe: 2 getrennte Ovale Ein Oval ist eine Eilinie, die dadurch charakterisiert ist, dass sie mit jeder Geraden höchstens zwei gemeinsame Punkte hat und dass durch jeden Punkt der projektiven Ebene höchstens zwei Tangenten der Eilinie gehen. Dies gilt für alle Kegelschnitte, daher sind auch Parabeln und Hyperbeln Eilinien.

Zwei auseinanderliegende Ovale besitzen vier Doppeltangenten, also Tangenten, die beide Eilinien in je einem Punkt berühren. Die Gegenform muss also aus zwei Eilinien bestehen, die sich in vier Doppelpunkten schneiden. In Abb. 15 rechts sind 2 der 4 Doppelpunkte Fernpunkte. Ihre Richtungen sind orthogonal zu den beiden Tangenten, die durch den Kreismittelpunkt gehen.

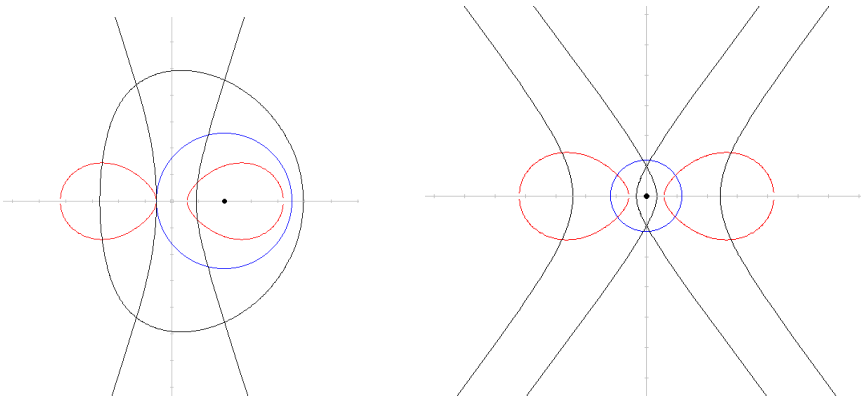

Abbildung 15: 2 getrennte Ovale mit 4 Doppeltangenten $\longleftrightarrow$2 Eilinien mit 4 Doppelpunkten

In Abb. 15 links liegt der Mittelpunkt des Polarisators in einem 2-Punktgebiet außerhalb

des linken Ovals, daher hat die Gegenform des linken Ovals zwei Fernpunkte, ähnlich einer Hyperbel. In Abb. 15 rechts gehen durch den Mittelpunkt des Polarisationskreises zwei Doppeltangenten, daher haben die beiden hyperbelähnlichen und aus Gründen der Symmetrie kongruenten Gegenformen dieselben zwei Fernpunkte, die daher beide Doppelpunkte sind.

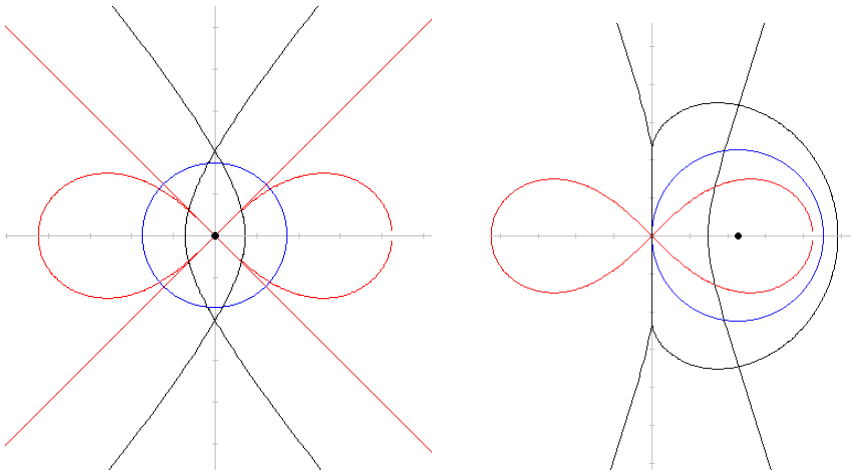

Abbildung 16: Lemniskate $\longleftrightarrow$ Gegenform

3. Stufe: die Lemniskate Die Lemniskate besitzt als geschlossene Kurve zwei Doppeltangenten und zwei Wendestellen, die in einem Doppelpunkt liegen. Die Gegenform muss daher als geschlossene Kurve zwei Doppelpunkte und eine Doppeltangente besitzen, auf der zwei Dornspitzen liegen. In Abb. 16 links liegt der Doppelpunkt im Mittelpunkt des Polarisationskreises, daher sind die Dornspitzen der Gegenform zwei verschiedene Fernpunkte, deren Richtung jeweils orthogonal zu den beiden Tangenten im Doppelpunkt sind. Da diese beiden Lemniskatentangenten zueinander orthogonal sind, geben sie die Richtungen der beiden Fernpunkte der Gegenform an. Die Doppeltangente der Gegenform ist die Ferngerade, die zugleich Tangente der beiden Dornspitzen ist.

In der Abb. 16 rechts geht der Polarisationskreis durch den Doppelpunkt der Lemniskate, daher ist die Doppeltangente der Gegenform auch Kreistangente (y-Achse) und auf ihr liegen die Dornspitzen (die Punkte auf der y-Achse zwischen den Dornspitzen gehören nicht zur Gegenform!).

4. Stufe: doppelt eingebuchtetes Oval Das doppelt eingebuchtete Oval besitzt als geschlossene Kurve vier Wendestellen und zwei Doppeltangenten Die Gegenform muss daher als geschlossene Kurve vier Dornspitzen und zwei Doppelpunkte besitzen (Abb. 17).

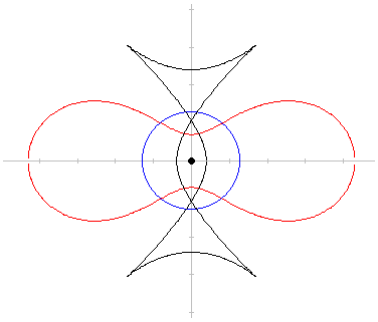

Abbildung 17: Eingebuchtetes Oval $\longleftrightarrow$ Gegenform

5.Stufe: gespanntes Oval Wenn nun je zwei Wendepunkte des eingebuchteten Ovals aufeinander zu wandern, bis sie schließlich zusammenfallen und im gleichen Moment ihre Eigenschaft als Wendestellen verloren haben, ist das eingebuchtete Oval zum gespannten Oval geworden mit dem Kreis k als Inkreis. Die beiden Doppeltangenten haben sich dabei jeweils in eine einfache Tangente verwandelt. In der Gegenform wandern bei diesem Prozess je zwei Dornspitzen auf einander zu, bis beide mit ihrem benachbarten Doppelpunkt zusammenfallen. Im gleichen Moment haben sie ihre Eigenschaft Dornspitze bzw. Doppelpunkt verloren, und es ist eine einfache Eilinie entstanden (Abb. 18).

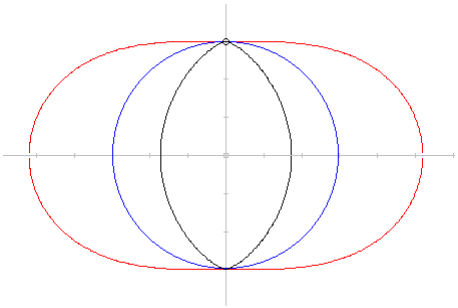

Abbildung 18: gespanntes Oval und eine Gegenform

Die Ovale der 6. Stufe haben, je nach Lage des Polarisationkreises, ähnliche Gegenformen wie die beiden getrennten Ovale. In der 7. Stufe ist die Cassinische Kurve zur Ferngeraden degeneriert, und deren Gegenform ist immer der Mittelpunkt des Polarisationskreises.