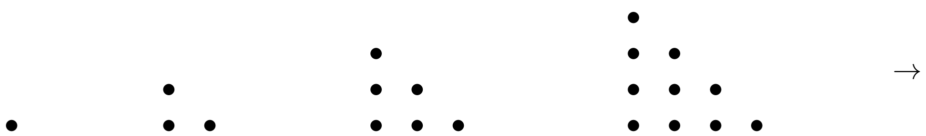
Bemerkenswerte Beziehungen zwischen verschiedenen Polygonalzahlen

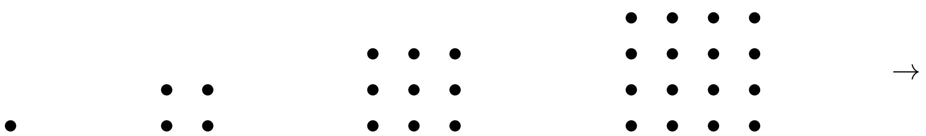
Georg Glöckler[*]

Einführung

Wie schon der Name sagt, leiten sich Polygonalzahlen aus geometrischen Figuren, nämlich Polygonen ab. Sie werden manchmal auch figurierte Zahlen genannt. Dreiecks-, Vierecks- und Fünfeckszahlen ergeben sich z.B. dabei in folgender Weise:

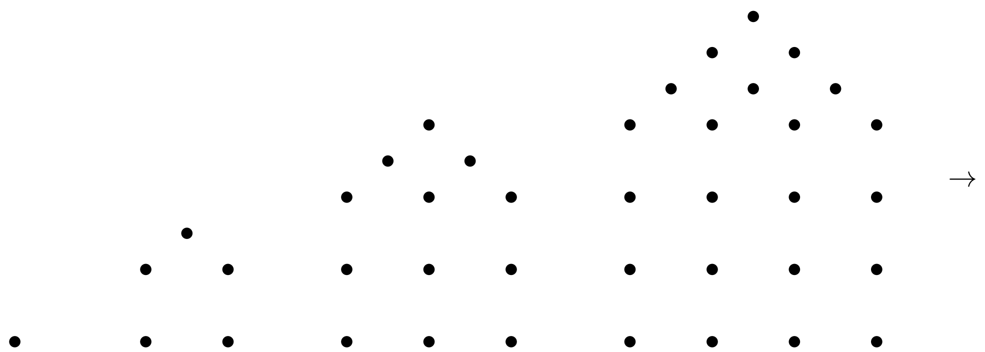


$d_1 = 1$	$d_2 = 1 + 2$	$d_3 = 1 + 2 + 3$	$d_4 = 1 + 2 + 3 + 4$
$d_1 = 1$	$d_2 = 3$	$d_3 = 6$	$d_4 = 10$



$q_1 = 1$	$q_2 = 1 + 3$	$q_3 = 1 + 3 + 5$	$d_4 = 1 + 3 + 5 + 7$
$q_1 = 1$	$q_2 = 4$	$q_3 = 9$	$d_4 = 16$

[*]Undatierte Handschrift aus dem Nachlass, Abschrift von Peter Baum, p.baum@posteo.de



$f_1 = 1$ $\quad f_2 = 1 + 4$ $\quad f_3 = 1 + 4 + 7$ $\quad f_4 = 1 + 4 + 7 + 10$

$f_1 = 1$ $\quad f_2 = 5$ $\quad f_3 = 12$ $\quad f_4 = 22$

A)

Wie lässt sich eine allgemeine Polygonalzahl berechnen?

Es sei mit $P_n(\nu)$ die n-te ν-Eck-Zahl bezeichnet. Nach dem Vorhergehenden ist dann z.B. $P_4(5) = f_4 = 22$. Für alles weitere ist nun grundlegend, dass alle Polygonalzahlen Teilsummen einer arithmetischen Reihe 2.Ordnung sind. Dies lässt sich schon der einführenden Betrachtung entnehmen. Dabei beginnen alle diese Reihen mit 1.

Eine allgemeine arithmetische Reihe 2. Ordnung ist durch folgenden Ansatz charakterisiert:

$$a_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + (a + (n-1)\,d)$$

Daraus folgt dann in bekannter Weise

$$a_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)\,d\right] \tag{1}$$

Für unsere Polygonalzahlen ist dann $a = 1$ und $d = \nu - 2$. Damit gilt

$$P_n(\nu) = \frac{n}{2}\left[2 + (n-1)(\nu - 2)\right] \quad \nu > 2 \tag{2}$$

Für allgemeines n und $\nu = 3, 4, 5, \ldots$ ergibt sich dann

$$\begin{array}{lll} P_n(3) = \frac{n}{2}(n+1) = d_n & P_n(4) = n^2 = q_n & P_n(5) = \frac{n}{2}(3n-1) = f_n \\ P_n(6) = 2n^2 - n = h_n & P_n(7) = \frac{n}{2}(5n-3) & P_n(8) = 3n^2 - 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Die Formel (2) weist nun auf eine enge Beziehung aller Polygonalzahlen zu den Dreieckszahlen hin. Es ist nämlich

$$P_n(\nu) = n + \frac{n}{2}(n-1)(\nu - 2) = n + (\nu - 2)\,d_{n-1} \tag{3}$$

Mit dieser Formel lassen sich die Polygonalzahlen besonders leicht berechnen. Beispiel:

$$P_{18}\,(17) = 18 + 15 \cdot 78 = 1183$$

B) Das Spektrum der Polygonalzahlen

Tabelle I: Polygonalzahlen $P_n(\nu - 3) = (\nu - 3) \cdot d_{n-1} + d_n$ ($P_n(2) = n$, $P_n(1) = 1$)

$P_n(1)$	$P_n(2)$	$P_n(3)$	$P_n(4)$	$P_n(5)$	$P_n(6)$	$P_n(7)$	$P_n(8)$	$P_n(9)$	$P_n(10)$	$P_n(11)$	$P_n(12)$	$P_n(13)$	$P_n(14)$	$P_n(15)$	$P_n(16)$	$P_n(17)$	$P_n(18)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51
1	4	10	16	22	28	34	40	46	52	58	64	70	76	82	88	94	100
1	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115	125	135	145	155	165
1	6	21	36	51	66	81	96	111	126	141	156	171	186	201	216	231	246
1	7	28	49	70	91	112	133	154	175	196	217	238	259	280	301	322	343
1	8	36	64	92	120	148	176	204	232	260	288	316	344	372	400	428	456
1	9	45	81	117	153	189	225	261	297	333	369	405	441	477	513	549	585
1	10	55	100	145	190	235	280	325	370	415	460	505	550	595	640	685	730
1	11	66	121	176	231	286	341	396	451	506	561	616	671	726	781	836	891
1	12	78	144	210	276	342	408	474	540	606	672	738	804	870	936	1002	1068
1	13	91	169	247	325	403	481	559	637	715	793	871	949	1027	1105	1183	1261
1	14	105	196	287	378	469	560	651	742	833	924	1015	1106	1197	1288	1379	1470
1	15	120	225	330	435	540	645	750	855	960	1065	1170	1275	1380	1485	1590	1695
1	16	136	256	376	496	616	736	856	976	1096	1216	1336	1456	1576	1696	1816	1936
1	17	153	289	425	561	697	833	969	1105	1241	1377	1513	1649	1785	1921	2057	2193
1	18	171	324	477	630	783	936	1089	1242	1395	1548	1701	1854	2007	2160	2313	2466
1	19	190	361	532	703	874	1045	1216	1387	1558	1729	1900	2071	2242	2413	2584	2755
1	20	210	400	590	780	970	1160	1350	1540	1730	1920	2110	2300	2490	2680	2870	3060
1	21	231	441	651	861	1071	1281	1491	1701	1911	2121	2331	2541	2751	2961	3171	3381
1	22	253	484	715	946	1177	1408	1639	1870	2101	2332	2563	2794	3025	3256	3487	3718
1	23	276	529	782	1035	1288	1541	1794	2047	2300	2553	2806	3059	3312	3565	3818	4071
1	24	300	576	852	1128	1404	1680	1956	2232	2508	2784	3060	3336	3612	3888	4164	4440
1	25	325	625	925	1225	1525	1825	2125	2425	2725	3025	3325	3625	3925	4225	4525	4825
1	26	351	676	1001	1326	1651	1976	2301	2626	2951	3276	3601	3926	4251	4576	4901	5226
1	27	378	729	1080	1431	1782	2133	2484	2835	3186	3537	3888	4239	4590	4941	5292	5643
1	28	406	784	1162	1540	1918	2296	2674	3052	3430	3808	4186	4564	4942	5320	5698	6076
1	29	435	841	1247	1653	2059	2465	2871	3277	3683	4089	4495	4901	5307	5713	6119	6525
1	30	465	900	1335	1770	2205	2640	3075	3510	3945	4380	4815	5250	5685	6120	6555	6990
1	31	496	961	1426	1891	2356	2821	3286	3751	4216	4681	5146	5611	6076	6541	7006	7471
1	32	528	1024	1520	2016	2512	3008	3504	4000	4496	4992	5488	5984	6480	6976	7472	7968
1	33	561	1089	1617	2145	2673	3201	3729	4257	4785	5313	5841	6369	6897	7425	7953	8481
1	34	595	1156	1717	2278	2839	3400	3961	4522	5083	5644	6205	6766	7327	7888	8449	9010
1	35	630	1225	1820	2415	3010	3605	4200	4795	5390	5985	6580	7175	7770	8365	8960	9555
1	36	666	1296	1926	2556	3186	3816	4446	5076	5706	6336	6966	7596	8226	8856	9486	10116
1	37	703	1369	2035	2701	3367	4033	4699	5365	6031	6697	7363	8029	8695	9361	10027	10693
1	38	741	1444	2147	2850	3553	4256	4959	5662	6365	7068	7771	8474	9177	9880	10583	11286
1	39	780	1521	2262	3003	3744	4485	5226	5967	6708	7449	8190	8931	9672	10413	11154	11895
1	40	820	1600	2380	3160	3940	4720	5500	6280	7060	7840	8620	9400	10180	10960	11740	12520
1	41	861	1681	2501	3321	4141	4961	5781	6601	7421	8241	9061	9881	10701	11521	12341	13161
1	42	903	1764	2625	3486	4347	5208	6069	6930	7791	8652	9513	10374	11235	12096	12957	13818
1	43	946	1849	2752	3655	4558	5461	6364	7267	8170	9073	9976	10879	11782	12685	13588	14491
1	44	990	1936	2882	3828	4774	5720	6666	7612	8558	9504	10450	11396	12342	13288	14234	15180
1	45	1035	2025	3015	4005	4995	5985	6975	7965	8955	9945	10935	11925	12915	13905	14895	15885
1	46	1081	2116	3151	4186	5221	6256	7291	8326	9361	10396	11431	12466	13501	14536	15571	16606
1	47	1128	2209	3290	4371	5452	6533	7614	8695	9776	10857	11938	13019	14100	15181	16262	17343
1	48	1176	2304	3432	4560	5688	6816	7944	9072	10200	11328	12456	13584	14712	15840	16968	18096
1	49	1225	2401	3577	4753	5929	7105	8281	9457	10633	11809	12985	14161	15337	16513	17689	18865
1	50	1275	2500	3725	4950	6175	7400	8625	9850	11075	12300	13525	14750	15975	17200	18425	19650

Tabelle 1: Polygonalzahlen

In der Tabelle 1 sind alle Polygonalzahlen bis zu den 18-Eck-Zahlen registriert, und zwar bis zu $n = 50$

Eine erste Einsicht ergibt schon eine Reihe bemerkenswerter Tatsachen:

1. Sehr schön lässt sich das Gesetz der Formel (3) verfolgen, wenn man der Reihe nach die Folge der Polygonalzahlen in den einzelnen Zeilen verfolgt.
2. Eine Konsequenz der Formel (3) ist auch, dass stets gilt

$$P_n(\nu) = \frac{P_n(\nu - \mu) + P_n(\nu + \mu)}{2} \quad \mu < \nu - 2 \tag{4}$$

Beispiel für $n = 9$, $\nu = 11$, $\mu = 3$

$$P_9(11) = \frac{P_9(8) + P_9(14)}{2} = \frac{225 + 441}{2} = 333$$

3. Eine Polygonalzahl der einen Art kann zugleich Polygonalzahl einer anderen Art sein. Beispiel:

$$\begin{aligned} P_{12}(7) &= P_3(115) = 342 \\ P_{31}(3) &= P_{16}(6) = P_4(84) = 496 \\ P_{28}(3) &= P_6(7) = P_9(4) = 81 \\ P_{288}(3) &= P_{204}(4) = P_8(1458) = P_7(2776) = P_3(13\,873) = 204^2 \end{aligned}$$

Diese Beispiele weisen auf einen ganz speziellen Fragenkomplex hin. Eines der allgemeinen Gesetze lässt sich aber schon unmittelbar erkennen. Es gilt nämlich

$$P_{2n+3}(n+1) = P_{2n}(n+4) = (2n+3)\,n^2 \tag{5}$$

Diese Zahlen lassen sich paarig in „Rösselprüngen“ um eine Diagonale von links oben nach rechts unten in unserem Spektrum verfolgen:

$$\begin{aligned} P_5(2) &= P_2(5) = 5 \\ P_7(3) &= P_4(6) = 28 \\ P_9(4) &= P_6(7) = 81 \\ P_{11}(5) &= P_8(8) = 176 \\ &\vdots \end{aligned}$$

4. Als eine Art zweites Symmetrie-Gesetz kann folgende Beziehung angesehen werden:

$$P_n(n) = P_{n-1}(n+2) + 1 \quad n = 2, 3, \ldots \tag{6}$$

mit $P_n(2) = n$. Beispiel für $n = 14$:

$$P_{14}(14) = P_{13}(16) + 1 = 1\,105 + 1 = 1\,106$$

5. Verfolgt man die auftretenden Quadratzahlen in den einzelnen Zeilen, so lässt sich folgendes feststellen:

4. Zeile	7. Zeile	9. Zeile	25. Zeile
$P_4(2) = 2^2$	$P_7(4) = 7^2$	$P_9(2) = 3^2$	$P_{25}(2) = 5^2$
$P_4(4) = 4^2$	$P_7(11) = 14^2$	$P_9(4) = 9^2$	$P_{25}(4) = 25^2$
$P_4(12) = 8^2$	$P_7(39) = 28^2$	$P_9(8) = 15^2$	$P_{25}(6) = 35^2$
$P_4(18) = 10^2$	$P_7(60) = 35^2$	$P_9(14) = 21^2$	$P_{25}(12) = 55^2$
$P_4(34) = 14^2$	$P_7(116) = 49^2$	$P_9(22) = 27^2$	$P_{25}(16) = 65^2$
$P_4(44) = 16^2$	$P_7(151) = 56^2$	$P_9(32) = 33^2$	$P_{25}(26) = 85^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Diese Beispiele mögen zunächst genügen. Natürlich lassen sich die jeweiligen Formeln auch formelmäßig erfassen. Für die 7. Zeile sieht dies dann folgendermaßen aus:

$$P_7\left(21n^2 + 14n + 4\right) = P_{7(3n+1)}(4) = [7(3n+1)]^2$$
$$P_7\left(21n^2 + 28n + 11\right) = P_{7(3n+1)}(4) = [7(3n+2)]^2 \quad \text{für n=0,1,2}$$

Das sind zwei miteinander „verzahnte Folgen“.

6. Ganz oben rechts in unserem Spektrum lässt sich die Folge der Quadrate aus den Dreieckszahlen und die Folge der Kubikzahlen verfolgen, die wir auch in einer entsprechenden Formel wiedergeben können:

$$\begin{array}{cc} P_1(6) = 1^2 & P_1(6) = 1^3 \\ P_2(9) = 3^2 & P_2(8) = 2^3 \\ P_3(13) = 6^2 & P_3(10) = 3^3 \\ P_4(18) = 10^2 & P_4(12) = 4^3 \\ P_5(24) = 15^2 & P_5(14) = 5^3 \\ & P_6(16) = 6^3 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

$$P_n\left(\frac{1}{2}\left(n^2 + 3n\right) + 8\right) = P_n(3)^2 = d_n^2 \qquad P_n(2n+4) = n^3$$

Damit wollen wir unsere erste unmittelbare Einsicht in das Spektrum der Polygonalzahlen abschließen. Im Folgenden wenden wir uns einigen komplexeren Beziehungen des Spektrums zu.

C)

1. Rekursive Ermittlung von Polygonalzahlen der Form $P_n(2\nu)$ durch alternierende Reihen aus Polygonalzahlen der Form $P_n(\nu+1)$.

Um in die hier vorliegenden Zusammenhänge einzuführen gehen wir von einem Beispiel aus.
Es sei durch $f_n = P_n(5) = \frac{n}{2}(3n-1)$ die Folge der Fünfeckzahlen gegeben;

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$P_n(5)$	1	5	12	22	35	51	70	92	117	...

Damit können wir die folgende alternierende Reihe bilden:

$$1-5+12-22+35-51+70-92+$$

Daraus ergibt sich formell folgende Teilsummenfolge

$$S_n = P_1(5) + [P_3(5) - P_2(5)] + [P_5(5) - P_4(5)] + \cdots + [P_{2n-1}(5) - P_{2n-2}(5)]$$

Es ist also

$$\begin{aligned}
S_1 &= 1 && = P_1(8)\\
S_2 &= 1+7 = 8 && = P_2(8)\\
S_3 &= 1+7+13 = 21 && = P_3(8)\\
S_4 &= 1+7+13+19 = 40 && = P_4(8)\\
S_5 &= 1+7+13+19+25 = 65 && = P_5(8)\\
&\vdots && \vdots
\end{aligned}$$

Die S_n sind also lauter 8-Eck-Zahlen.
Dies spezielle Ergebnis lässt sich nun verallgemeinern: Alle Polygonalzahlen der Form $P_n(2\nu)$ lassen sich durch alternierende Reihen darstellen, die aus Polygonalzahlen der Form $P_n(\nu+1)$ gebildet sind. Es gilt

$$\begin{aligned}
P_n(2\nu) = {} & P_1(\nu+1) + [P_3(\nu+1) - P_2(\nu+1)] + [P_5(\nu+1) - P_4(\nu+1)] + \cdots\\
& + [P_{2n-1}(\nu+1) - P_{2n-2}(\nu+1)]\\
& = 1 + (2\nu-1) + (4\nu-3) + (6\nu-5) + ... + [2(n-1)\nu + 3 - 2n]\\
& = n[(n-1)(\nu-1)+1]
\end{aligned}$$

Bei den letzten Zeilen wurden wiederholt die Formeln (2) bzw. (3) angewandt. Beispiel:

$$P_n(2\nu) = P_7(58) = 7 + 56 \cdot d_6 = 1\,183$$

Damit ist also $n=7$ und $\nu=29$. Daraus folgt dann

$$P_7(58) = P_1(30) - P_2(30) + P_3(30) - + \cdots - P_{12}(30) + P_{13}(30)$$

Die Folge der 30-Eck-Zahlen sieht wie folgt aus:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
$P_n(30)$	1	30	87	172	285	426	595	792	1017	1270	1551	1860	2197	...

Damit ist

$$\begin{aligned} P_7(58) &= 1 - 30 + 87 - 172 + 285 - + \cdots - 1860 + 2197 \\ &= 1183 = 7 \cdot 13^2 \end{aligned}$$

2, Einige Aspekte zu den speziellen Beziehungen zwischen den Dreieckszahlen und den Quadratzahlen.

Von solchen Beziehungen gibt es einfache, aber auch recht komplizierte. Die Beweise für die Richtigkeit dieser Formeln lassen sich relativ leicht mit den Formeln (2) oder (3) durchführen. Wir betrachten zunächst der Reihe nach einige der einfacheren Beziehungen:

Beispiele:

a) $d_{n-1} + d_n = n^2$ $\qquad d_4 + d_5 = 10 + 15 = 25$

b) $d_{n-1}^2 + d_n^2 = d_{n^2}$ $\qquad d_5^2 + d_6^2 = 15^2 + 21^2 = d_{36} = 666$

c) $d_{\nu n} - \nu d_n = d_{\nu-1} \cdot n^2$ $\qquad d_{240} - 10 \cdot d_{24} = d_9 \cdot 24^2$

$$28\,920 - 10 \cdot 300 = 45 \cdot 576 = 25\,920$$

Es folgen Darstellungen von Dreieckszahlen durch alternierende Reihen.

d)
$$\begin{aligned} d_n &= n^2 - (n-1)^2 + (n-2)^2 - + \cdots + (-1) \\ d_{11} &= 11^2 - 10^2 + 9^2 - 8^2 + 7^2 - 6^2 + 5^2 - 4^2 + 3^2 - 2^2 + 1^2 = 66 \end{aligned}$$

e) $d_{8n^2+6n-1} = d_{4n}^2 - d_{4n-2}^2 + d_{4n-4}^2 + - \cdots + d_4^2 - d_2^2$. Für n=2 ist

$$\begin{aligned} d_{43} &= d_8^2 - d_6^2 + d_4^2 - d_2^2 \\ &= 36^2 - 21^2 + 10^2 - 3^2 = 946 \end{aligned}$$

Auch das Umgekehrte ist möglich, wie die folgenden Beispiele zeigen:

f)
$$\begin{aligned} n^2 &= d_{2n-1} - d_{2n-2} + d_{2n-3} - + \cdots - d_2 + d_1 \\ 3^2 &= d_5 - d_4 + d_3 - d_2 + d_1 \\ 9 &= 15 - 10 + 6 - 3 + 1 \end{aligned}$$

Die Beziehung e) kann nicht mehr zu den ganz einfachen gezählt werden.[1]

[1] Hier bricht die Darstellung ab. Georg Glöckler hatte die letzten Formeln ab a) gestrichen, wahrscheinlich um sie noch etwas anders zu formulieren. Ich habe sie hier dennoch aufgenommen, da an Ihnen der Einfallsreichtum von Glöckler deutlich wird (PB).