Rekursive Erzeugung der pythagoräischen Quadrupel und Quintupel[1]

Einleitung

Für pythagoräische Tripel $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^3$ mit $a^2 + b^2 = c^2$ ist bekannt, dass man aus dem Grundtripel $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ durch Multiplikation mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ alle primitiven pythagoräischen Tripel erzeugen kann.[2]

Hier soll nun gezeigt werden, dass es auch für pythagoräische Quadrupel aus $\mathbb{Z}^4$ und Quintupel aus $\mathbb{Z}^5$ Matrizen mit ähnlichen Eigenschaften gibt.

Die Matrix D fand ich in nachgelassenen Papieren von Georg Glöckler[3], sie erzeugt alle primitiven pythagoräischen Quadrupel, geht von 3 Urquadrupeln aus, benötigt keine Vertauschungsmatrizen und gestattet sehr einfach die Rückführung zu Quadrupeln mit kleinerer Basis.
Diese Matrix D wird in dem Dokument Dokument „Rekursive Erzeugung der Pythagoräischen Quadrupel nach Georg Glöckler“ ausführlich beschrieben. Die dort beschriebene analytische Herleitung der Matrix D, basierend auf dem Beweis, den P. Baum[4] für die Matrix A geführt hat, habe ich auch hier unten in Kap.12 angefügt.
Die Übertragung dieses Verfahrens auf eine Dimension höher liefert eine Matrix H, deren Spaltenvektoren zwar orthogonal stehen, aber nicht normiert sind, wie es die Spalten der Matrix G sind. Doch gibt es ein Verfahren von G. Kowol[5], mit dem man die Matrix G leicht herausfinden kann, das in Kap. 13 beschrieben wird.

Die Matrizen B und G wurden von mir durch Ausprobieren gefunden. B erzeugt aus einem Urquadrupel alle pythagoräischen Quadrupel, aber nicht nur primitive, sondern auch solche mit ggT=2, während G direkt alle primitiven Quintupel erzeugt.

---

1 Albrecht Häberlein ahaeb@gmx.de, 3.7.2020
2 J. Gollnick, H. Scheid, J. Zöllner: Rekursive Erzeugung der primitiven pythagoräischen Tripel, in: Mathematische Semesterberichte Band 39, Heft 1, 1992.- Hinweise auf die Geschichte dieser Matrix finden sich in A.-M. Fraedrich: Pythagoräische Zahlentripel, in: Didaktik der Mathematik 1985, Band 13, S. 31-49 und 98-117.
3 Georg Glöckler (1933-2019) war von 1990 bis 2003 Leiter der Mathematisch-Astronomischen Sektion am Goetheanum, Dornach.
4 Dass die Matrix A analytisch hergeleitet werden kann, wurde gezeigt in P. Baum: Pythagoras und der Kreis oder die Folgen primitiver pythagoreischer Zahlentripel, p.baum@posteo.de, 22.06.2019.
5 Univ.Prof. Dr. Gerhard Kowol, Wien. Er hat freundlicherweise große Teile dieses Skripts gelesen, Fehler aufgespürt und wertvolle Hinweise gegeben, für die ich ihm sehr dankbar bin.

1. Definition

Der Vektor $v=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\in\mathbb{Z}^4$ heiße pythagoräisches Quadrupel, wenn $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ gilt. Es heiße primitv, wenn ggT(a,b,c,d) = 1 gilt. Die vierte Koordinate d wird als Basis des Quadrupels bezeichnet. Entsprechend seien die Bezeichnungen für die pythagoräischen Quintupel gewählt.

2. Bemerkungen

a) Zu jedem Quadrupel $\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\in\mathbb{Z}^4$ gibt es gleichartige Quadrupel, die durch Permutation der Zahlen a,b,c entstehen. Zu jedem von diesen gibt es noch diejenigen Quadrupel, die sich nur durch Vorzeichen vom ursprünglichen unterscheiden. Im allgemeinen Fall verbirgt sich hinter einem Quadrupel aus $\mathbb{N}^4$ eine Untergruppe von $3! \cdot 2^3$ „Varianten“ in $\mathbb{Z}^4$, von denen viele tatsächlich benötigt werden, um alle primitiven Quadrupel zu erzeugen.

Für die Quintupel gilt Entsprechendes.

b) Die „uneigentlichen“ Quadrupel und Quintupel, die mindestens eine 0 enthalten, sind hier auch als pythagoräisch aufgenommen.

3. Satz 1

Mit Hilfe der Matrizen $B:=\begin{pmatrix}1&1&3&3\\1&2&1&2\\-1&1&1&1\\1&2&3&4\end{pmatrix}$, $\frac{1}{2}B$,

$E_1:=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, $E_2:=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, $E_3:=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, $E_4:=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$,

$F_{12}:=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, $F_{23}:=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ und $F_{13}:=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ lassen sich aus dem pythagoräischen „Urquadrupel“ := $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$ alle primitiven pythagoräischen Quadrupel erzeugen.

4. Bemerkungen zu Satz 1

a) Die Matrix w $\frac{1}{2}B$ wird benötigt, da die Matrix B wegen detB = 4 auch Quadrupel erzeugt, die mit dem Faktor 2 kürzbar sind.

b) Die Vorzeichentausch- und Vertauschungsmatrizen sind alle aufgeführt und benannt, damit später auf sie zurückgegriffen werden kann. Es handelt sich hier offensichtlich nicht um ein minimales Erzeugenden-System, denn wegen $F_{12}E_1F_{12} = E_2$ könnte man z.B. auf E_2 verzichten. Wegen $F_{12}F_{23}F_{12} = F_{13}$ könnte auch F_{13} entfallen. Durch das Weglassen von E_4 könnte man sich auf Quadrupel mit positiver vierter Komponente beschränken, muss dann allerdings für jedes

Quadrupel $\begin{pmatrix}\tilde a\\ \tilde b\\ \tilde c\\ \tilde d\end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^4$ beweisen, dass aus $\tilde d > 0$ immer $d' = \tilde a + 2\tilde b + 3\tilde c + 4\tilde d > 0$ folgt.[6]

c) Wenn zwei Matrizen durch Vorzeichentausch auseinander hervorgehen, wie z.B. $\begin{pmatrix}-a\\ b\\ -c\\ d\end{pmatrix} \overset{E_1, E_3}{\rightarrow} \begin{pmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix}$

dann schreibe ich der Kürze halber statt Angabe der Matrizen glegentlich nur „~“ .

d) Für die Matrix $C := \begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & 2 & 1 & -2\\ 3 & 1 & 1 & -3\\ -3 & -2 & -1 & 4\end{pmatrix}$ rechnet man leicht nach, dass BC = 2·Id und somit

$\frac{1}{2}C$ die zu B inverse Matrix ist bzw. dass C die Matrix $\frac{1}{2}B$ invertiert

5. Beispiele für das Wirken der Matrizen aus Satz 1

a) Verfolgt man, wie B auf das Urquadrupel wirkt, so sieht man folgenden Zusammenhang:

$\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\\ 1\end{pmatrix} \overset{E_3}{\rightarrow} \begin{pmatrix}0\\ 0\\ -1\\ 1\end{pmatrix} \overset{B}{\rightarrow} \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix} \overset{E_2}{\rightarrow} \begin{pmatrix}0\\ -1\\ 0\\ 1\end{pmatrix} \overset{0{,}5\,B}{\rightarrow} \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$, d.h. aus dem Urquadrupel gehen also – durch geeigneten Vorzeichentausch – seine beiden Permutationen hervor, sodass diese im Erzeugnis der angegebenen Matrizen liegen.

b) Aus diesen Quadrupeln mit Basis 1 (also d=1) lassen sich nun alle Permutationen der Quadrupel

mit Basis 3 gewinnen: Es gilt nämlich $\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix} \overset{0{,}5\,B}{\rightarrow} \begin{pmatrix}2\\ 2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix} \overset{0{,}5\,B}{\rightarrow} \begin{pmatrix}2\\ 1\\ 2\\ 3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}-2\\ 1\\ -2\\ 3\end{pmatrix} \overset{0{,}5\,B}{\rightarrow} \begin{pmatrix}1\\ 2\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$.

6 Dies gilt für positive Koordinaten offensichtlich. Es genügt, diese Ungleichung für negative Koordinaten $\tilde a$ bis $\tilde c$ zu beweisen. Für $a := |\tilde a|, b := |\tilde b|$ und $c := |\tilde c|$ ist dann zu zeigen, dass $-a - 2b - 3c + 4\tilde d > 0$ gilt. Dies wird im Beweis von Satz 1 als Ungleichung (5a) bewiesen.

c) Bei den Quadrupeln mit Basis 5, also $\begin{pmatrix}4\\3\\0\\5\end{pmatrix}$ und seinen Permutationen, ist es so, dass einige nur über „Umwege“ mit größerer Basis zu erreichen sind.

Es gilt: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\overset{B}{\rightarrow}\begin{pmatrix}4\\3\\0\\5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-4\\-3\\0\\5\end{pmatrix}\overset{0{,}5\,B}{\rightarrow}\begin{pmatrix}4\\0\\3\\5\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\1\\-2\\3\end{pmatrix}\overset{0{,}5\,B}{\rightarrow}\begin{pmatrix}3\\4\\0\\5\end{pmatrix}$, aber $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\overset{B}{\rightarrow}\begin{pmatrix}6\\3\\2\\7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-6\\-3\\-2\\7\end{pmatrix}\overset{0{,}5\,B}{\rightarrow}\begin{pmatrix}3\\0\\4\\5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-3\\0\\-4\\5\end{pmatrix}\overset{B}{\rightarrow}\begin{pmatrix}0\\3\\4\\5\end{pmatrix}$ und

$$\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\\3\end{pmatrix}\overset{0{,}5\,B}{\rightarrow}\begin{pmatrix}6\\2\\3\\7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-6\\-2\\-3\\7\end{pmatrix}\overset{B}{\rightarrow}\begin{pmatrix}4\\1\\8\\9\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-4\\1\\-8\\9\end{pmatrix}\overset{0{,}5\,B}{\rightarrow}\begin{pmatrix}0\\4\\3\\5\end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Da ich nicht weiß, ob immer alle Permutationen erreicht werden können, habe ich die Vertauschungsmatrizen F_{12} und F_{23} als Erzeugende mit dazu genommen. Denn mit F_{12} und F_{23} erhält man aus $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\overset{0{,}5\,B}{\rightarrow}\begin{pmatrix}2\\2\\1\\3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\overset{B}{\rightarrow}\begin{pmatrix}4\\3\\0\\5\end{pmatrix}$ unter Einbeziehung von E_1 bis E_4 sofort, dass <u>alle</u> Varianten der pythagoräischen Quadrupel mit d=3 und d= 5 erreicht werden.

Ähnlich folgt aus Gleichung (1), dass das Quadrupel $\begin{pmatrix}6\\3\\2\\7\end{pmatrix}$ samt seiner Varianten im Erzeugnis der angegebenen Matrizen liegt.

In Verbindung mit (1) sieht man aus der Beziehung $\begin{pmatrix}-8\\1\\-4\\9\end{pmatrix}\overset{0{,}5\,B}{\rightarrow}\begin{pmatrix}4\\4\\7\\9\end{pmatrix}$, dass auch das zweite Quadrupel mit d=9 erreicht wird.

<u>6. Beweis von Satz 1</u>

<u>Schritt a:</u> Wir betrachten ein beliebiges pyth. Quadrupel $v=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$ mit $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$. (2)

Sei $v'=\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\\d'\end{pmatrix}$ sein Bild unter B. Dann gilt:

$a' = a + b + 3c + 3d$,

$b' = a + 2b + c + 2d$,

$c' = - a + b + c + d$,

$d' = a + 2b + 3c + 4d$.

Also gilt auch

$a'^2 = a^2 + b^2 + 9c^2 + 9d^2 + \; 2\,(ab + 3ac + 3ad + 3bc + 3bd + 9cd)$

$b'^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \quad 2\,(2ab + ac + 2ad + 2bc + 4bd + 2cd)$

$c'^2 = a^2 + 4b^2 + c^2 + 4d^2 + \; 2\,(-ab - ac - ad + bc + bd + cd)$,

zusammen also

$a'^2 + b'^2 + c'^2 \; = 3a^2 + 6b^2 + 11c^2 + 4d^2 + 2(2ab + 3ac + 4ad + 6bc + 8bd + 12cd)$.

Andererseits ist

$d'^2 \qquad = a^2 + 4b^2 + 9c^2 + 14d^2 + 2(2ab + 3ac + 4ad + 6bc + 8bd + 12cd)$.

Da der Unterschied $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2d^2$ nach (2) gerade Null beträgt, ist auch v´ ein pythagoräisches Quadrupel.

Schritt b: Gezeigt wird für ein primitives v, dass v´entweder auch primitiv ist oder sein ggT(v´) = 2 beträgt.

Sei $v \in \mathbb{Z}^4$ primitiv, seien also seine Komponenten teilerfremd, und sei v´= Bv.
Sodann sei t := ggT(v´), d.h. es existiert ein $w \in \mathbb{Z}^4$ mit v´= tw.

Da C eine homogene Abbildung ist, folgt hieraus Cv´ = C(tw) = t·Cw.

Daneben ist nach 4d): CBv = 2v.

Zusammen ergibt sich $2v = t \cdot Cw$ bzw. $v = \frac{1}{2} t \cdot Cw$ mit $Cw \in \mathbb{Z}^4$ (3)

1. Fall: cw ist durch 2 kürzbar.

Dann gibt es ein $z \in \mathbb{Z}^4$ mit Cw = 2z

und es ist $v = \frac{1}{2} t \cdot Cw = \frac{1}{2} t \cdot 2z = tz$.

Da v primitiv ist, muss t = 1 sein, d.h. v´ ist auch primitiv.

2. Fall: Cw ist nicht durch 2 kürzbar.

Dann muss $\frac{1}{2} t$ aus (3) den Wert 1 haben, also ist t=2,

d.h. v´ ist nach dem Kürzen mit 2 primitiv.

<u>Schritt c:</u> Es wird gezeigt, dass alle primitiven Quadrupel erreicht werden.

Für ein beliebiges primitives pyth. Quadrupel $\tilde{v}=\begin{pmatrix}\tilde{a}\\ \tilde{b}\\ \tilde{c}\\ \tilde{d}\end{pmatrix}\in\mathbb{Z}^4$ mit $|\tilde{d}|>1$ sei $v=\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}|\tilde{a}|\\ |\tilde{b}|\\ |\tilde{c}|\\ |\tilde{d}|\end{pmatrix}\in\mathbb{N}^4$.

Die Beweisidee besteht nun darin, mittels der Matrix C von v aus zu einem Quadrupel mit kleinerer Basis als d zu kommen. Wiederholt man dieses Verfahren – mit geeignetem Vorzeichentausch - , so kommt man in endlich vielen Schritten zur Basis 1, also zu einem Grundquadrupel. Der Rückweg von dort aus führt mit Matrix dann wieder zu $\tilde{v}$.

Sei also $\begin{pmatrix}a'\\ b'\\ c'\\ d'\end{pmatrix}:=C\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix}$, mit posiven a, b und c $\quad a^2+b^2+c^2=d^2.$ (4)

Dann gilt $\quad d' = -3a - 2b - c + 4d$.

Zu zeigen ist dann sowohl $\quad 0 < d'$, gleichbedeutend mit $3a + 2b + c < 4d$ (5a)

als auch $\quad d' < d$, gleichbedeutend mit $3d < 3a + 2b + c$. (5b)

<u>Zuerst soll (5a) bewiesen werden.</u>
Quadrieren von(5a) führt mit der Abkürzung $\quad H := 2(6ab + 3ac + 2bc)$
auf die äquivalente Ungleichung $9a^2 + 4b^2 + c^2 + H < 16d^2$.
Setzt man (4) ein, heißt das, dass $\quad H < 7a^2 + 12b^2 + 15c^2$
zu beweisen ist.

Nun folgt aus $0 \le (2a - 3b)^2$, dass $\quad 12ab \le 4a^2 + 9b^2$,
aus $0 \le (a - 3c)^2$ folgt ebenso $\quad 6ac \le a^2 + 9c^2$,
und aus $0 \le (b - 2c)^2$ folgt entsprechend $\quad 4bc \le b^2 + 4c^2$,
addiert folgt $\quad H \le 5a^2 + 10b^2 + 13c^2$.

Hieraus folgt, dass die obige Ungleichung für H erfüllt und (5a) somit bewiesen ist.

<u>Zur Ungleichung (5b):</u>
Diese Ungleichung $3d < 3a + 2b + c$ ist nicht immer erfüllt, wie man beim

Vektor $\begin{pmatrix}3\\ 0\\ 4\\ 5\end{pmatrix}$ sieht; bei ihm ist nämlich $3\cdot5 > 3\cdot3+0+4$ und es gilt $\begin{pmatrix}3\\ 0\\ 4\\ 5\end{pmatrix}\xrightarrow{C}\begin{pmatrix}-6\\ -3\\ -2\\ 7\end{pmatrix}$, sodass er auch nicht zu einer kleineren Basis führt.

Die Bedingung (5b) lässt sich jedoch erfüllen, wenn $a \ge b \ge c$ vorausgesetzt wird; dies lässt sich mit den Vertauschungsmatrizen F_{12} usw. einrichten.

Nun seien t und u so gewählt, dass $\quad b = ta$ mit $0 < t \le 1$ und
$c = ua$ mit $0 \le u \le t$.
Der Fall t=0 wäre dabei gleichbedeutend mit b=c=0, was nicht berücksichtigt zu werden braucht.

Unter dieser Voraussetzung folgt aus (4) $\quad d^2 = a^2 + (ta)^2 + (ua)^2 = a^2 (1 + t^2 + u^2)$, sodass $a=\frac{d}{\sqrt{1+t^2+u^2}}$; $b=\frac{td}{\sqrt{1+t^2+u^2}}$; $c=\frac{ud}{\sqrt{1+t^2+u^2}}$.

Die Bedingung (5b) wird dann zu $3d<\frac{3d}{\sqrt{1+t^2+u^2}}+\frac{2td}{\sqrt{1+t^2+u^2}}+\frac{ud}{\sqrt{1+t^2+u^2}}$

und wegen d>0 für $A(t,u):=\frac{3+2t+u}{\sqrt{1+t^2+u^2}}-3$ zur Bedingung A(t,u) > 0. (6)

Hieraus gewinnt man $3\cdot\sqrt{1+t^2+u^2}<3+2t+u$

und durch Quadrieren $9(1+t^2+u^2)<9+4t^2+u^2+12t+6u+4tu$,

also äquivalent zu (6): $8u^2-(6+4t)u+5t^2-12t<0.$ (6b)

Betrachtet man nun die linke Seite von (6b) „scheibchenweise“ als quadratische Funktion von u mit Parameter t: $g_t(u):=8u^2-(6+4t)u+5t^2-12t$,

so lässt sich in Abhängigkeit von t das Intervall für u angeben, für welches diese Funktion positiv ist:

Löst man die Gleichung $g_t(u)=0$,

so ist die Diskriminante D = 36(- 4t² + 12t + 1)

positiv für $-0.08\approx\frac{3-\sqrt{10}}{2}\leqslant t\leqslant\frac{3+\sqrt{10}}{2}\approx 3{,}08$,

also insbesondere für alle t mit $0\leqslant t\leqslant 1$,

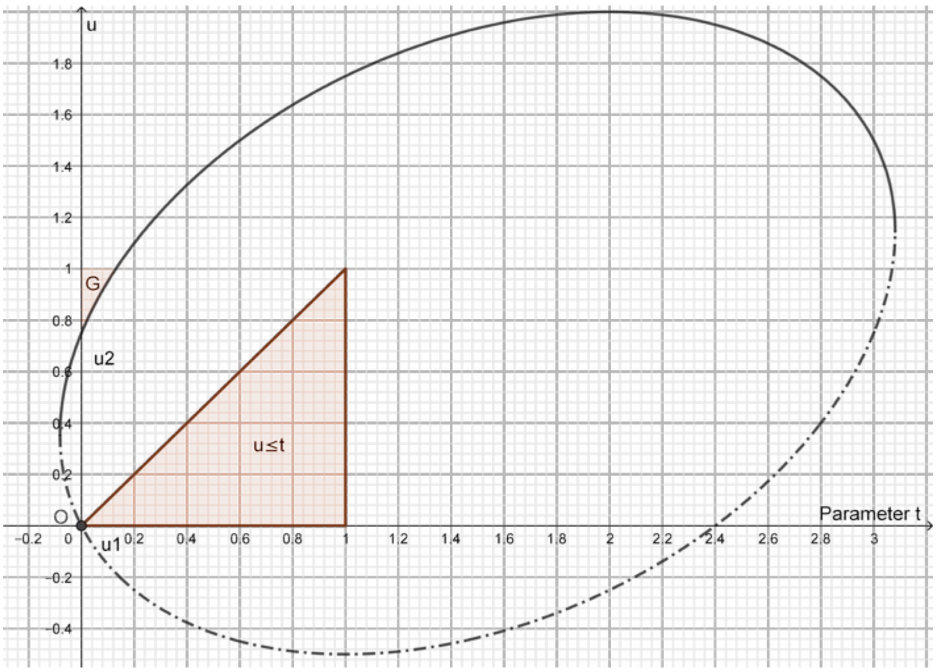
und man erhält in Abhängigkeit von t die Nullstellen

$$u_1(t)=\frac{1}{8}\cdot(3+2t-3\sqrt{D})$$

und $u_2(t)=\frac{1}{8}\cdot(3+2t+3\sqrt{D})$ mit $u_1\leqslant u_2$,

zwischen denen die Funktion g_t negativ und – äquivalent dazu - die Funktion A(t,u) positiv ist.

Einen Überblick bietet folgendes t-u-Diagramm, in dem $u_1(t)$ und $u_2(t)$ eingetragen sind. Die beiden Kurven umschließen ein elliptisches Gebiet, in dessen Innerem A(t,u) positiv ist. Dieses Gebiet wiederum umschließt das Dreieck, in welchem $0\leqslant u\leqslant t<1$ und $t>0$ gilt, sodass hiermit die Ungleichung (5b) und der ganze Satz 1 bewiesen sind:



Man kann auch erkennen, dass es im Einheitsquadrat ein kleines Gebiet G mit kleinem t und großem u gibt, in welchem A(t,u) negativ ist.
Dorthin gehört z.B. das Quadrupel mit a=12, b=1, c=12 und d=17, also mit t=1/12) und u=1.
Hier ist u>t und die Bedingung $3d < 3a + 2b + c$ (5) verletzt.

7. Satz 2 (nach G. Glöckler)[7]

Die von den Matrizen $D := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$E_1 := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_4 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

erzeugte Gruppe lässt aus den pythagoräischen „Urquadrupeln“ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{und} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ alle primitiven pythagoräischen ganzzahligen Quadrupel entstehen.

Bemerkung: Man könnte sich wieder auf Quadrupel mit positiver Basis beschränken und E_4 streichen.[8]

7 Eine ausführliche Beschreibung der Folgen, die G. Glöckler mit Hilfe Matrix D erzeugt hat, findet sich im Dokument „Rekursive Erzeugung der Pythagoräischen Quadrupel nach Georg Glöckler“, in welchem auch die Kapitel 7 und 8 der vorliegenden Arbeit enthalten sind.

8 Denn aus d´= a+b+c+2d folgt, dass für negative a,b,c die Ungleichung $2d > |a| + |b| + |c|$ zu zeigen ist. Diese Ungleichung wird im Schritt c) mitbewiesen.

Beweis von Satz 2:

Schritt a: Der Nachweis, dass mit v auch Dv pythagoräisch ist, geht ebenso wie in 6. bei Schritt a.

Schritt b: Es gilt detD = 1 und die zu D inverse Matrix ist $D^{-1} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Deshalb überträgt sich das Primitiv-Sein von v auch auf Dv.[9]

Schritt c:

Es wird gezeigt, dass alle primitiven Quadrupel erreicht werden.

Wir betrachten ein beliebiges Quadrupel $\tilde{v} = \begin{pmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \\ \tilde{c} \\ \tilde{d} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^4$, dazu $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} |\tilde{a}| \\ |\tilde{b}| \\ |\tilde{c}| \\ |\tilde{d}| \end{pmatrix} \in \mathbb{N}_0^4$ mit

$a^2 + b^2 + c^2 = d^2$. und es sei $v' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{pmatrix} := D^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$, sodass $d' = -a - b - c + 2d$

Zu zeigen ist wie bei Satz 1:	$0 < d' < d$,	
gleichbedeutend mit	$0 < -a - b - c + 2d < d$,	
also	$-2d < -a - b - c < -d$	
bzw.	$d < a + b + c < 2d$	
quadriert also	$d^2 < a^2 + b^2 + c^2 + H < 4d^2$	mit $H := 2(ab + ac + bc)$
und	$0 < H < 3(a^2 + b^2 + c^2)$	
Nun gilt aber wie oben	$0 < 2ab < a^2 + b^2$	
	$0 < 2ac < a^2 + c^2$	
und	$0 < 2bc < b^2 + c^2$,	
zusammen also	$0 < H < 2(a^2 + b^2 + c^2)$,	

sodass die obige Ungleichung für H sicher erfüllt ist.

9 Sei nämlich wie oben $v' := Dv$ dargestellt als $v' = tw$ mit ganzzahligem w und $t \in \mathbb{N}$, so gilt $v = D^{-1}(tw) = t \cdot D^{-1}(w)$ mit $D^{-1}(w) \in \mathbb{Z}^4$, sodass jeder Teiler von v´ auch ein Teiler von v ist.

Wiederholt man die Anwendung von D^{-1}, ggf. mit Vorzeichentausch, so kommt man in endlich vielen Schritten herunter zur Basis 1, also zu einem der drei Urquadrupel $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$.

Umgekehrt werden demnach alle primitiven Quadrupel $\tilde{v} \in \mathbb{Z}^4$ durch die Matrizengruppe aus obigem Satz 2 erreicht, indem man von einem der Grundtupel aus – durch Anwendung von D und geeigneten Vorzeichentausch – zu v und $\tilde{v}$ aufsteigt.

8. Beispiele für das Wirken der Matrizen aus Satz 2

a) Es gilt: $\begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\\3\end{pmatrix} \xrightarrow{D} \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \xrightarrow{D} \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \xrightarrow{D} \begin{pmatrix}1\\2\\2\\3\end{pmatrix}$ und ebenso $\begin{pmatrix}-2\\-1\\-2\\3\end{pmatrix} \xrightarrow{D} \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix} \xrightarrow{D} \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \xrightarrow{D} \begin{pmatrix}2\\1\\2\\3\end{pmatrix}$, sodass die beiden Urquadrupel sozusagen jeweils für sich bleiben. Man muss, um alle Permutationen zu erhalten, entweder Vertauschungsmatrizen mit dazunehmen oder - wie in Satz 2 durchgeführt – alle drei Urquadrupel als Ausgang zulassen.

b) Einen größeren Bereich zeigt folgendes Bild (diesmal in Koordinatenschreibweise):

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & (3,-4,0,5) & \longrightarrow & (2,9,6,11) \\
 & & & & (-3,4,0,5) & \longrightarrow & (8,1,4,9) \\
 & & (-1,-2,2,3) & \longrightarrow & (3,4,0,5) & \longrightarrow & (9,8,12,17) \\
 & & (-1,2,2,3) & \longrightarrow & (7,4,4,9) & \longrightarrow & (17,20,20,33) \\
(1,0,0,1) & \longrightarrow & (1,2,2,3) & \longrightarrow & (7,6,6,11) & \longrightarrow & (23,24,24,41) \\
 & & (1,-2,2,3) & \longrightarrow & (3,6,2,7) & \longrightarrow & (15,12,16,25) \\
 & & & & (-3,6,2,7) & \longrightarrow & (15,6,10,19) \\
 & & & & (3,-6,2,7) & \longrightarrow & (3,12,4,13) \\
 & & & & (3,6,-2,7) & \longrightarrow & (11,8,16,21) \\
 & & & & (-3,6,-2,7) & \longrightarrow & (11,2,10,15) \\
 & & & & (3,-6,-2,7) & \longrightarrow & (-1,8,4,9)
\end{array}
$$

9. Satz 3

Die von den Matrizen $G:=\begin{pmatrix}0&1&0&1&1\\1&0&0&1&1\\0&0&1&2&2\\1&1&2&2&3\\1&1&2&3&4\end{pmatrix}$, $E_1:=\begin{pmatrix}-1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$ bis $E_5:=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&-1\end{pmatrix}$,

und $F_{12}:=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$ bis $F_{34}:=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$ erzeugte Gruppe lässt aus $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$, dem

pythagoräischen „Urquintupel“, alle primitiven pythagoräischen ganzzahligen Quintupel entstehen.[10]

10. Beispiele für das Wirken der Matrix G aus Satz 3

a) Es gilt: $\begin{pmatrix}-2\\-2\\-4\\-5\\7\end{pmatrix}\xrightarrow{G}\begin{pmatrix}-0\\0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\xrightarrow{G}\begin{pmatrix}2\\2\\4\\5\\7\end{pmatrix}$ sodass – ähnlich wie in Satz 2 - das Urquintupel für sich bleibt und man erst mit Hilfe der Vertauschungsmatrizen die übrigen Urquintupel (0,0,1,0,1) etc. gewinnt.

b) Die folgende Übersicht zeigt, wie die weiteren pythagoräische Quintupel, bis zur Basis 9, entstehen:

(0,0,-1,0,1)	→	(1,1,1,1,2)		
		(-1,-1,1,-1,2)	→	(0,0,3,4,5)
		(1,-1,1,-1,2)	→	(0,2,3,6,7)
		(1,-1,-1,1,2)	→	(2,4,5,6,9)
		(1,1,1,-1,2)		(2,2,3,8,9)
(0,-1,0,0,1)	→	(0,1,2,2,3)		
		(1,-2,-2,0,3)	→	(1,4,4,4,7)
		(2,-2,0,-1,3)	→	(0,4,4,7,9)
(1,0,0,0,1)	→	(1,2,2,4,5)		
(0,0,1,0,1)	→	(1,1,3,5,6)		
(0,0,0,1,1)	→	(2,2,4,5,7)		

10 Auch hier könnt man sich auf positive Basen beschränken, wie sich unten aus dem Beweis von (8a) ergibt.

11. Beweis von Satz 3

Schritt a: Der Nachweis, dass mit v auch Gv pythagoräisch ist, geht ebenso wie in 6. bei Schritt a.

Schritt b: Es gilt detG = 1 und die zu G inverse Matrix ist $G^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Deshalb überträgt sich das Primitiv-Sein von v auch auf Gv.

Schritt c: Sei nun $\tilde{v} = \begin{pmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \\ \tilde{c} \\ \tilde{d} \\ \tilde{e} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^5$ ein beliebiges pythagoräisches Quintupel und $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} |\tilde{a}| \\ |\tilde{b}| \\ |\tilde{c}| \\ |\tilde{d}| \\ |\tilde{e}| \end{pmatrix} \in \mathbb{N}_0^5$,

sodass $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2$ (7)

Sei also $v' := \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \\ e' \end{pmatrix} := G^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}$, mit nicht-negativen a, b, c, d und e.

Dann gilt $e' = - a - b - 2c - 3d + 4e$.

Zu zeigen ist dann sowohl $0 < e'$, gleichbedeutend mit $a + b + 2c + 3d < 4e$ (8a)

als auch $e' < e$, gleichbedeutend mit $3e < a + b + 2c + 3d$. (8b)

Zuerst soll (8a) bewiesen werden, mit derselben Methode wie bei Satz 1.

Mit der Abkürzung $H := 2(ab + 2ac + 3ad + 2bc + 3bd + 6cd)$

ergibt Quadrieren von (8a) $a^2 + b^2 + 4c^2 + 9d^2 + H < 16e^2$,
also $H < 15a^2 + 15b^2 + 12c^2 + 7d^2$.

Nun gewinnt man wie oben

$$\begin{aligned}
2ab &\le a^2 + b^2 \\
4ac &\le 4a^2 + c^2 \\
6ad &\le 9a^2 + d^2 \\
4bc &\le 4b^2 + c^2 \\
6bd &\le 9b^2 + d^2
\end{aligned}$$

und $12cd \le 9c^2 + 4d^2$,

zusammen also $H \le 14a^2 + 14b^2 + 11c^2 + 6d^2$,

sodass die obige Ungleichung für H auf alle Fälle erfüllt ist.

Zur Ungleichung (8b):

Diese Bedingung ist nicht immer erfüllt, wie man beim Vektor $\begin{pmatrix}1\\23\\1\\25\\34\end{pmatrix}$ mit $\begin{pmatrix}1\\23\\1\\25\\34\end{pmatrix}\overset{G^{-1}}{\rightarrow}\begin{pmatrix}14\\-8\\-17\\-26\\35\end{pmatrix}.$ sieht;

bei ihm gilt 102 > 1 + 23 + 2 + 75 , und die Basis wird unter G^{-1} nicht kleiner.

Die Bedingung (8b) lässt sich jedoch erfüllen, wenn – ähnlich wie in Satz 1 - vorausgesetzt wird, dass $a \le b \le c \le d$.

Entsprechend zu oben seien t, u und v so gewählt, dass

$$c = td \text{ mit } 0 < t \le 1$$

und $$b = ud \text{ mit } 0 \le u \le t$$

und $$a = vd \text{ mit } 0 \le v \le u.$$

Der Fall t=0 wäre dabei gleichbedeutend mit a=b=c=0, was nicht berücksichtigt zu werden braucht.

Dann gilt nach (7) $$e^2 = (vd)^2 + (ud)^2 + (td)^2 + d^2 = d^2 (v^2 + u^2 + t^2 + 1)$$

und es folgt $$a=\frac{ve}{\sqrt{v^2+u^2+t^2+1}};\, b=\frac{ue}{\sqrt{v^2+u^2+t^2+1}};\, c=\frac{te}{\sqrt{v^2+u^2+t^2+1}} \text{ und } d=\frac{e}{\sqrt{v^2+u^2+t^2+1}}$$

Die Bedingung (8b) wird dann zu

$$3e<\frac{ve}{\sqrt{v^2+u^2+t^2+1}}+\frac{ue}{\sqrt{v^2+u^2+t^2+1}}+\frac{2te}{\sqrt{v^2+u^2+t^2+1}}+\frac{3e}{\sqrt{v^2+u^2+t^2+1}}$$

und wegen e>0 zu $$3\sqrt{v^2+u^2+t^2+1}<v+u+2t+3$$

und durch Quadrieren und Umsortieren zu

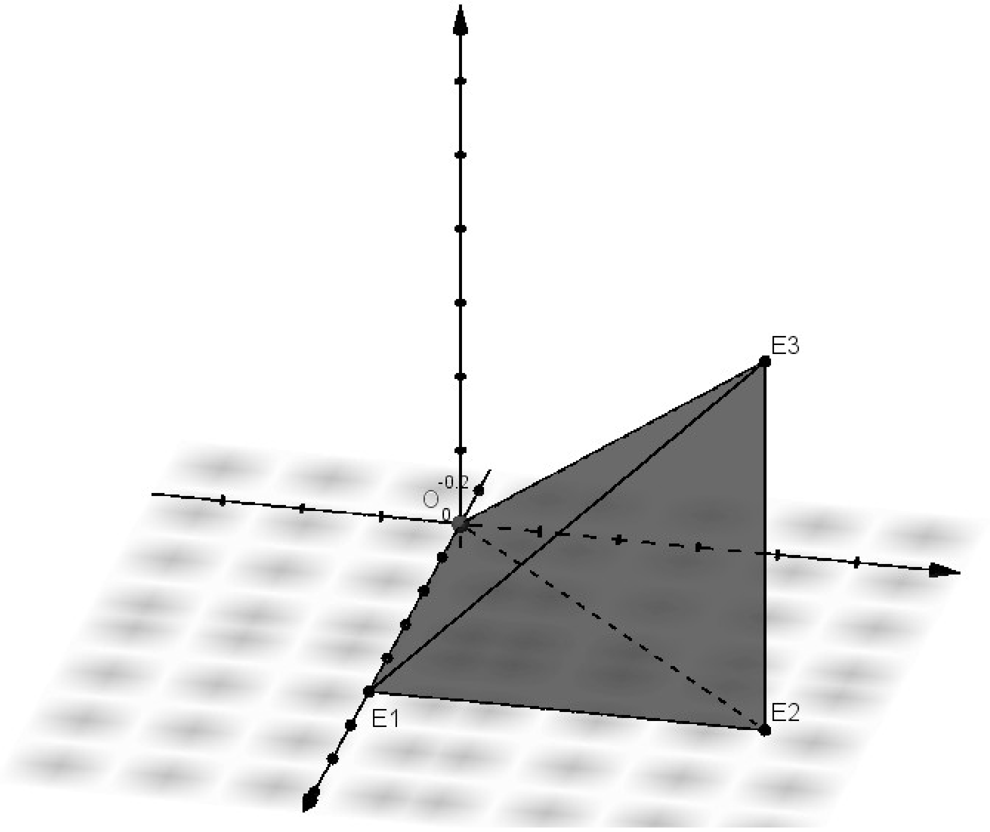
$$0<-5t^2-8v^2-8u^2+4tu+4tv+2uv+12t+6u+6v=:A(t,u,v) \qquad (9)$$

Nun stellt A(t,u,v) = 0 im tuv-Raum ein Ellipsoid dar und es genügt zu zeigen, dass die durch $0 \le v \le u \le t \le 1$ und t>0 beschriebene Pyramide ganz in diesem Ellipsoid liegt (siehe Bild auf der nächsten Seite).

Dazu prüfe ich, ob die Ecken der Pyramide die Bedingung (9) erfüllen, denn dann liegt wegen der Kovexität des Ellipsoids auch die ganz Pyramide im Ellipsoid und alle seine Punkte erfüllen die Bedingung.

Nun hat E_1 die Koordinaten	t=1, u=0, v=0 und es gilt	A(1,0,0) = - 5 + 12 = 7 > 0,
und E_2 die Koordinaten	t=1, u=1, v=0 und es gilt	A(1,1,0) = - 5 – 8 + 4 +12 + 6 = 7 > 0
und für E_3 mit	t=1, u=1, v=1 gilt	A(1,1,1) = = 13 > 0.

Weil der Ursprung als vierte Ecke gerade auf dem Ellipsoid liegt, ist die Bedingung (9) und damit auch die Bedingung (8b) erfüllt, das neue Quintupel v´ hat also eine kleinere positive Basis als das Quintupel v, sodass der Beweis von Satz 3 vollständig ist.



12. Analytische Herleitung der Matrix D

P. Baum (siehe Fußnote 4) hat ausgeführt, wie man von einem Punkt P auf dem Einheitskreis, der einem pythagoräischen Tripel v entspricht, zu einem nächsten solchen Punkt kommen kann:
Man spiegelt P z.B. am Ursprung, durch den so gewonnenen Punkt P* und den Punkt Q(1/1) legt man eine Gerade und schneidet diese mit dem Einheitskreis. Dieser Schnittpunkt P´ gehört nun zu dem Tripel v´= Av mit der Matrix A von Seite 1.

Dieser Gedanke soll nun auf pythagoräische Quadrupel angewendet werden und zur Matrix D führen.

Ausgangspunkt ist das pythagoräische Quadrupel $v\,(a/b/c/d) \in \mathbb{N}^4$ und der dazugehörige Punkt $P\,(\frac{a}{d}/\frac{b}{d}/\frac{c}{d})$, der auf der Einheitskugel liegt.

Durch Spiegelung am Ursprung geht P in P* $(-\frac{a}{d}/-\frac{b}{d}/-\frac{c}{d})$ über.

Wegen $-\frac{a}{d}-1=-\frac{1}{d}(a+d)$ hat für Q(1/1/1) die Gerade QP* dann die Gleichung

QP*: $\vec{X} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}a+d\\b+d\\c+d\end{pmatrix}$, wobei der Punkt P* zum Parameter $t = -\frac{1}{d}$ gehört

Schneiden mit der Einheitskugel führt auf die Gleichung

$$(1 + t\,(a+d))^2 + (1 + t\,(b+d))^2 + (1 + t\,(c+d))^2 = 1$$

d.h. $t^2\,((a+d)^2 + (b+d)^2 + (c+d)^2) + 2t\,(a+d + b+d + c+d) + 3 = 1$

$$t^2\,(a^2 + b^2 + c^2 + 3d^2 + 2(ad + bd + cd)) + 2t\,(a+b+c + 3d) + 2 = 0$$

Mit $s := a+b+c$ und wegen $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ lässt sich das umschreiben zu:

$t^2\,(4d^2 + 2ds) + 2t\,(s + 3d) + 2 = 0$, dh.
$2d\,(2d+s)\,t^2 + 2(s+3d)\,t + 2 = 0$, also

$$d\,(2d+s)\,t^2 + (s+3d)\,t + 1 = 0$$

Für die Determinante D dieser quadratischen Gleichung gilt

$$D = (s+3d)^2 - 4d(2d+s) = s^2 + 6ds + 9d^2 - 8d^2 - 4ds = s^2 + 2ds + d^2 = (s+d)^2 ,$$

und die Lösungen ergeben sich zu

$\underline{t_1} = \frac{-(s+3d)-(s+d)}{2d\,(2d+s)} = \frac{-4d-2s}{2d\,(2d+s)} = \frac{-2\,(2d+s)}{2d\,(2d+s)} = \underline{-\frac{1}{d}}$, dieser Wert führt zum bekannten Punkt P*,

„und“ $\underline{t_2} = \frac{-(s+3d)+s+d}{2d\,(2d+s)} = \frac{-2d}{2d\,(2d+s)} = \underline{\frac{-1}{2d+s}}$.

Setzt man t_2 in die Geradengleichung ein, erhält man wegen $s = a+b+c$

$$\vec{P}' = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{-1}{2d+s}\begin{pmatrix}a+d\\b+d\\c+d\end{pmatrix} = \frac{1}{2d+s}\begin{pmatrix}2d+s-a-d\\2d+s-b-d\\2d+s-c-d\end{pmatrix} = \frac{1}{2d+s}\begin{pmatrix}b+c+d\\a+c+d\\a+b+d\end{pmatrix}.$$

Zu diesem Punkt P´ gehört nun das pythagoräische Quadrupel
v´(b+c+d / a+c+d / a+b+d / a+b+c+2d)
und das entspricht genau der Matrix D.

Dieses Verfahren lässt sich in ganz entsprechender Weise auch für pythagoräische Quintupel durchführen, indem man im vierdimensionalen Vektorraum rechnet.
Es ergibt sich aber nicht die Matrix G, sondern die Matrix

$$H := \begin{pmatrix}-1 & 2 & 2 & 2 & 2\\ 2 & -1 & 2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & -1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2 & -1 & 2\\ 2 & 2 & 2 & 2 & 5\end{pmatrix},$$

für welche $\det(H) = -3^5$ gilt.

Die mit H erzeugten pythagoräischen Quintupel sind also nicht alle primitiv, und die Matrix

$$\tilde{H} := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

ergibt mit H multipliziert die 9-fache Einheitsmatrix.

Im Sinne von Kap.13 haben die Spalten von H alle die Norm 9 bzw - 9.

Nebenbei sei bemerkt, dass - wie die Matrizen A und D - auch H die Eigenschaft hat, bei Iteration einem festen Punkt auf der „Sphäre" zuzzustreben, im Falle von H ist es der Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, im Falle von D der Punkt $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ [11] und im Falle von A der Punkt $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

13. Herleitung der Matrix G

Nach einem Hinweis von G. Kowol[12] kann man pythagoräische Quintupel mit

$$a^2+b^2+c^2+d^2=e^2$$

umschreiben zu

$$a^2+b^2+c^2+d^2-e^2=0$$

und die linke Seite der Gleichung als Norm des Vektors (a,b,c,d,e) interpretieren.

Das entsprechende innere Produkt hat dann die Gestalt

$$\langle (a,b,c,d,e)(v,w,x,y,z) \rangle = av+bw+cx+dy-ez.$$

Für „orthonormale" Matrizen, die also bezüglich dieser Norm winkel- und längenerhaltend sind, benötigt man solche Spalten- bzw. Zeilenvektoren, die die „Länge" 1 bzw. -1 besitzen und auf einander „senkrecht" stehen.

Die Vektoren v_1:= (0,1,0,1,1) , v_2:= (1,0,0,1,1) , v_3:= (0,0,1,2,2) erfüllen diese Bedingungen, wie man leicht nachrechnet.

Der allgemeine Ansatz v = (a,b,c,d,e) liefert die Gleichungen

(I) $\langle v_1\, v \rangle = 0$, also $b+d-e=0$

(II) $\langle v_2\, v \rangle = 0$, also $a+d-e=0$

(III) $\langle v_3\, v \rangle = 0$, also $c+2d-2e=0$ und

(IV) $\langle v\, v \rangle = \pm 1$, also $a^2+b^2+c^2+d^2-e^2=\pm 1$.

Setzt man aus (I) $e=b+d$ in (II) und (III) ein, so erhält man v = (b, b, 2b, e-b, e) .

11 Vgl. „Rekursive Erzeuguung der Pythagoräischen Quadrupel nach Georg Glöckler" S.19.
12 Siehe Fußnote 5.

Probiert man b=1 , so ergibt (IV) die Lösungen $e_1 = 3$ und $e_2 = 4$ und somit die beiden zueinander orthoganalen Vektoren v_4:= (1,1,2,2,3) mit Länge 1 und v_5:= (1,1,2,3,4) mit Länge -1.

Alle Vektoren zusammen bilden nun die Matrix G.

Auch die Matrizen A (siehe Seite 1) und D (siehe Seite 8)) lassen sich auf entsprechende Weise herleiten.