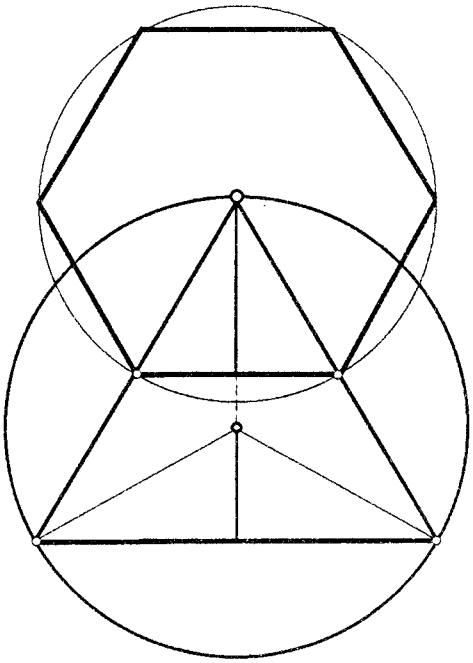


Rekursives Rechnen

(Vorläufiger Manuskriptdruck)

- Seine Anwendung auf elementare arithmetische und geometrische Probleme
- Die drei klassischen Mittelbildungen
- Geschichtliches
- Spezielle Skalen
- Bezüge zur Musik, Astronomie und Spektroskopie

Georg Glöckler

VORWORT 3

TEIL I

1. Die Berechnung der Kreiszahl π nach Archimedes 4

2. Die Berechnung der Kreiszahl π nach Cusanus 7

3. Die drei klassischen Mittelbildungen 12

4. Untersuchung von Rekursionsfolgen, die sich aus den drei klassischen Mittel bildungen entwickeln lassen 17
   4.1. Fortlaufende arithmetische Mittelbildung 17
   4.2. Fortlaufende harmonische Mittelbildung 21
   4.3. Fortlaufende geometrische Mittelbildung 24
   4.4. Drei Bemerkungen zu den Rekursionsfolgen 27

5. "Der Prozeß als solcher ist stärker als die Ausgangsdaten" 28
   5.1. Eine arithmetische Betrachtung 28
   5.2. Eine geometrisch - arithmetische Betrachtung 30

6. Rekursive Rechengrundlagen der Trigonometrie 39
   6.1. Grundlagen 39
   6.2. Folgerungen 41

7. Rekursive Rechengrundlagen der Berechnung der Logarithmen 46
   7.1. Eine Vorbetrachtung 46
   7.2. Beweis der Formel XVIb 47

TEIL II - FOLGEN UND SKALEN

1. Ergänzende Bemerkungen zu den Begriffen "Harmonisches Mittel" und "Harmonisch gelegene Punkte" 51

2. Arithmetische, geometrische und harmonische Folgen und die drei sie konstituierenden klassischen Mittelbildungen 53
   2.1. Erste Charakterisierung der Folgen: 54
   2.2. Zweite Charakterisierung der Folgen: 54
   2.3. Dritte übergreifende Charakterisierung der drei Folgen 55

3. Die den drei Folgentypen entsprechenden Skalentypen 57

4. Proportionen der Dur-Ton-Intervalle 60

5. Harmonische Mittelbildungen im Zusammenhang mit der Dur-Tonskala 61
   5.1. Rechnerische Grundlagen 61
   5.2. Verschiedene Konstruktionen einer entsprechenden Skala 63

6. Einige Bemerkungen zu der Proportionenfolge $z_n = \dfrac{z_0 z_1}{2^{n-1} z_0 - \left(2^{n-1} - 1\right) z_1}$ 66

7. Arithmetische Mittebildung und die Titius-Bode-Reihe 68
   7.1. Rechnerische Grundlagen 68
   7.2. Tabellarische Vergleiche von Planetenabständen 69
   7.3. Konstruktion der Planetenabstände im Heliozentrischen Weltbild gemäß der Titius-Bode Folge 70

8. Einige historische Hinweise zu den drei klassischen Mittelbildungen, vor allem im Hinblick auf die griechische Harmonielehre: 72

9. Prozesse die aus wechselseitigen Beziehungen der drei klassischen Mittelbildungen hervorgehen und weitere Ergänzungen 76

10. Zu einigen Aspekten der Spektroskopie 79

ANHANG

Von der Gedankenlosigkeit in der Behandlung der Mathematik, *L.Locher-Ernst* 85
Literaturhinweise 96

VORWORT

Rekursives Rechnen ist ein solches, bei dem man durch Zurückgreifen auf erste Rechenschritte die dabei auftretenden Gesetzmäßigkeiten erkennen muß, so daß daraus die nächsten Rechenschritte folgerichtig vollzogen werden können. Die bekannte Folge 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... läßt eine Gesetzmäßigkeit erkennen, die sich in der Rekursionsformel $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ erfassen läßt. Solches Rechnen vollzieht sich im Prinzip in gleichartig sich wiederholenden Schritten und ist daher geeignet, "unendliche Prozesse" sachgerecht zu beschreiben. Die folgenden Beiträge widmen sich elementaren mathematischen Fragestellungen wie z.B. der Berech-nung der Kreiszahl π, die auch zum Teil inhaltlich geeignet sind in dieser Form an der Oberstufe einer Schule behandelt zu werden. In den einzelnen Beiträgen soll gezeigt werden, wie die rekursive Denkweise für diese Fragestellungen in der Natur der Sache gegründet ist. In einer Zeit, in welcher der Gebrauch des Taschenrechners im Unterricht immer selbstverständlicher wird, ist es wichtig, dasjenige stärker ins Bewußtsein zu heben, was sich sonst im Computer unbewußt abspielt: Ein technisch realisierter *iterativer Prozeß.* Aus dem Dargestellten ergibt sich ganz von selbst, wo und wann der Einsatz des Taschenrechners wirklich sinnvoll wird. Die einzelnen Beiträge können als Teil eines umfassenderen Ganzen – dem Rhythmologischen Rechnen – aufgefaßt werden.

Im weiteren finden sich ergänzende Aspekte inbezug auf Arithmetik, Musik, Astronomie, Geschichte, und Spektroskopie. Das Kapitel "Rekursive Rechengrundlagen der Berechnung von Logarithmen" und die im Teil IIa dargestellten Zusammenhänge überschreiten zum Teil schon die Grenze der elementaren Mathematik. Möge diese provisorische Schrift einige Anregungen für den Mathematikunterricht geben. Für weiterführende Ergänzungen bin ich dankbar.

Die beiden Aufsätze von L. Locher-Ernst – vor mehr als 30 Jahren geschrieben und in den "Elementen der Mathematik"[1] veröffentlicht – sind heute so aktuell wie damals. L. Locher-Ernst macht in diesen Aufsätzen auf gewisse Unzulänglichkeiten im Mathematikunterricht aufmerksam und gibt Hinweise auf einige verstärkt zu behandelnde Unterrichts-Gebiete. Ich habe mich deshalb entschlossen, diese Aufsätze im Anhang dieser Betrachtungen wieder abzudrucken.

Zum Schluß gebührt Wolfgang Held der Dank für die Drucklegung mit den zum Teil recht komplizierten Figuren.

Georg Glöckler Dornach, im März 1994

---

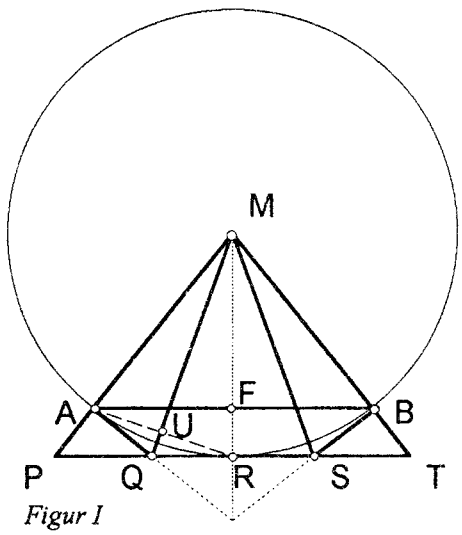
[1] "Elemente der Mathematik"Jahrgang 1961 Band XVI, Nr. 5,6, Jahrgang 1962 Band XVII, Nr. 1,2

TEIL I

1. DIE BERECHNUNG DER KREISZAHL π NACH ARCHIMEDES

Im Folgenden soll die Kreiszahl π nach der Ausschöpfmethode des Archimedes berechnet wer-den, und zwar rekursiv aus den Umfängen eines dem Kreis mit Radius $r = 1$ einbeschriebenen und umbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks. Diese Umfänge u_n bzw. U_n seien zunächst gegeben. Aufgrund elementargeometrischer Beziehungen lassen sich dann die entsprechenden Umfänge u_{2n} bzw. U_{2n} für die dem Kreis einbeschriebenen bzw. umbeschriebenen regelmäßigen $2n$-Ecke ermitteln.

Wir betrachten zunächst die folgende Grundfigur:



Figur I

Voraussetzung: $AB = s_n$ sei die Seite eines dem Kreis einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks

Weiter ist dann: $PT = S_n$ die Seite des dem Kreis umbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks.

$AR = s_{2n}$ die Seite des dem Kreis einbeschriebenen regelmäßigen $2n$-Ecks.

$QS = S_{2n}$ die Seite des dem Kreis umbeschriebenen regelmäßigen $2n$-Ecks.

Dabei gilt: $\Delta QRM \cong \Delta QAM$

und auch: $AQ = RQ$ sowie $MR = MA$

Nun gilt weiter: $\Delta APQ \sim \Delta AFM \sim \Delta PRM$

Daraus folgt: $$\frac{MF}{MA} = \frac{MR}{MP} = \frac{MA}{MP} = \frac{AF}{PR}$$

Weiter gilt: $$\frac{AQ}{PQ} = \frac{MF}{MA} = \frac{AF}{PR}$$

Wir erhalten so die erste geometrische Fundamentalbeziehung:

$$\boxed{\frac{AQ}{PQ} = \frac{AF}{PR} \qquad (1)}$$

Zur besseren Übersicht stellen wir die wichtigsten Bezeichnungen nochmals zusammen:

$AB = s_n$	$AF = \frac{1}{2} s_n$	
$PT = S_n$	$PR = \frac{1}{2} S_n$	$PQ = PR - QR = \frac{1}{2} S_n - \frac{1}{2} S_{2n}$
$AR = s_{2n}$	$UR = \frac{1}{2} s_{2n}$	$AQ = \quad QR \quad = \frac{1}{2} S_{2n}$
$QS = S_{2n}$	$QR = \frac{1}{2} S_{2n}$	

Aus (1) folgt dann: $$\frac{\frac{1}{2}S_{2n}}{\frac{1}{2}S_n - \frac{1}{2}S_{2n}} = \frac{\frac{1}{2}s_n}{\frac{1}{2}S_n}$$

und daraus: $$S_{2n} = \frac{s_n \cdot S_n}{s_n + S_n} \quad (*)$$

Nun gilt für die entsprechenden Umfänge der Vielecke:

$$\begin{aligned} u_n &= n \cdot s_n & \qquad U_n &= n \cdot S_n \\ u_{2n} &= 2n \cdot s_{2n} & \qquad U_{2n} &= 2n \cdot S_{2n} \end{aligned} \qquad \text{(a)}$$

und damit aus (*): $$S_{2n} = \frac{U_{2n}}{2n} = \frac{\frac{u_n}{n} \cdot \frac{U_n}{n}}{\frac{u_n}{n} + \frac{U_n}{n}}$$

oder: $$U_{2n} = \frac{2u_n \cdot U_n}{u_n + U_n}$$

anders geschrieben $$\boxed{\frac{1}{U_{2n}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{U_n} \right) \qquad \text{I}}$$

Nun ist weiter: $\Delta QRU \sim \Delta ARF$

Daraus ergibt sich die zweite geometrische Fundamentalbeziehung:

$$\boxed{\frac{QR}{UR} = \frac{AR}{AF} \qquad (2)}$$

Mit den eingeführten Bezeichnungen folgt daraus zunächst:

$$\frac{\frac{S_{2n}}{2}}{\frac{s_{2n}}{2}} = \frac{s_{2n}}{\frac{s_n}{2}} \qquad \text{oder:} \qquad s_{2n}^2 = \frac{s_n \cdot S_{2n}}{2}$$

Mit (a) ergibt sich daraus: $$\boxed{\frac{1}{u_{2n}} = \sqrt{\frac{1}{u_n} \cdot \frac{1}{U_{2n}}} \qquad \text{II}}$$

Wir erhalten also das schöne Resultat: Einerseits ergibt sich der Umfang des dem Kreis *um*beschriebenen regelmäßigen $2n$-Ecks als harmonisches Mittel aus den beiden Umfängen des dem Kreis einbeschriebenen und umbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks. Andererseits ist der Umfang des dem

Kreis *ein*beschriebenen regelmäßigen $2n$-Ecks das geometrische Mittel aus den Umfängen des dem Kreis einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks und dem Kreis umbeschriebenen regelmäßigen $2n$-Ecks.

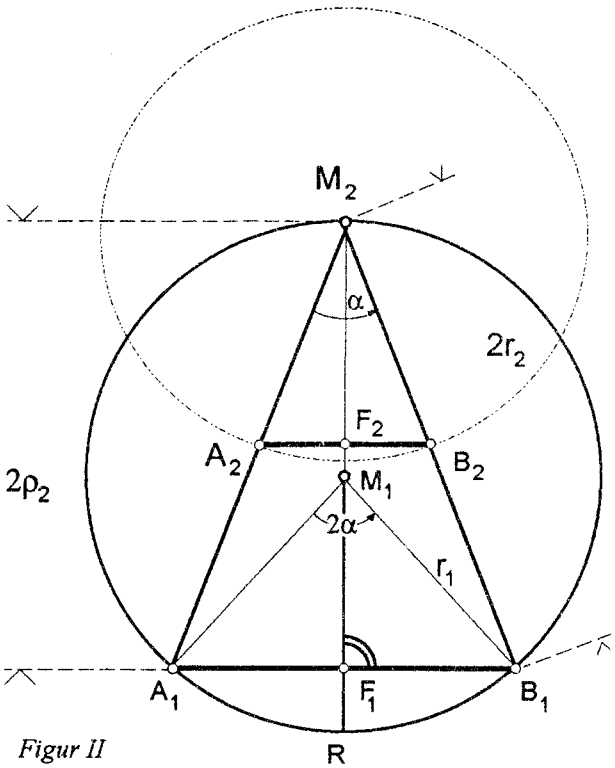
Archimedes (290 – 212 v. Chr.) hat den Umfang eines Kreises dadurch bestimmt, daß er diesen Umfang durch regelmäßige ein- und umbeschriebene Vielecke angenähert hat. Verfolgt man diesen Weg und geht man von einem regelmäßigen ein- bzw. umbeschriebenen Vieleck aus, berechnet deren Umfänge u_n bzw. U_n und bestimmt dann die Umfänge u_{2n} bzw. U_{2n} der zugehörigen (ein und umbeschriebenen) $2n$-Ecke, so lassen sich diese Umfänge rekursiv durch die folgenden Formeln berechnen:

$$\frac{1}{U_{2n}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{U_n} \right) \quad \text{I} \qquad \frac{1}{u_{2n}} = \sqrt{\frac{1}{u_n} \cdot \frac{1}{U_{2n}}} \quad \text{II}$$

Bemerkenswert dabei ist das Auftreten des arithmetischen bzw. geometrischen Mittels aus den Kehrwerten entsprechender Umfänge. Allerdings tritt dabei in II der Kehrwert von U_{2n} auf.

2. Die Berechnung der Kreiszahl π nach Cusanus

Ganz anders geht Nikolaus Cusanus (1401–1464) vor. Er geht von einem dem Kreis einbeschriebenen regelmäßigen n-Eck aus und berechnet dann den Umfang des einem neuen Kreis einbeschriebenen regelmäßigen $2n$-Ecks *gleichen Umfangs*. Dieses Prinzip wird weiter fortgesetzt, sodaß sich die regelmäßigen Vielecke schließlich einem Kreis annähern, dessen Umfang U von vorne-herein bekannt ist. Die Aufgabe bei diesem Verfahren besteht nun darin, den Radius R des beschriebenen Kreises zu berechnen.



Figur II

Es seien dabei die folgenden Beziehungen gewählt (Figur II):

A_1B_1	$= s$	Seite des einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks
M_1B_1	$= r_1$	Radius des Umkreises des regelmäßigen n-Ecks
M_1F_1	$= \rho_1$	Radius des Inkreises des regelmäßigen n-Ecks

Es sei $2r_2 := M_2B_1$
$2\rho_2 := M_2F_1$

Weiter seien A_2 bzw. B_2 die Mitte von A_1M_2 bzw. B_1M_2. Daraus folgt dann:

$$A_2B_2 = \tfrac{s}{2};\ M_2B_2 = r_2;\ M_2F_2 = \rho_2$$

Damit ist zunächst gesichert:

$$n \cdot s = 2n \cdot \tfrac{s}{2} = U_n = U_{2n} = U$$

Man erkennt an der Figur unmittelbar die folgenden Beziehungen:

$$M_2F_1 = M_2M_1 + M_1F_1$$

und $(M_2B_1)^2 = M_2R \cdot M_2F_1$ (Kathetensatz)

also $2\rho_2 = r_1 + \rho_1$

und $(2r_2)^2 = 2r_1 \cdot 2\rho_2$.

Daraus ergeben sich zunächst die Rekursionsformeln:

$$\rho_2 = \frac{r_1 + \rho_1}{2} \qquad r_2 = \sqrt{r_1 \cdot \rho_2}\ .$$

Da diese Überlegungen unmittelbar als der Übergang von n zu $2n$ betrachtet werden können,

gilt allgemein:

$$\boxed{\rho_{2n} = \frac{r_n + \rho_n}{2} \qquad \text{III}}$$

$$\boxed{r_{2n} = \sqrt{r_n \cdot \rho_{2n}} \qquad \text{IV}}$$

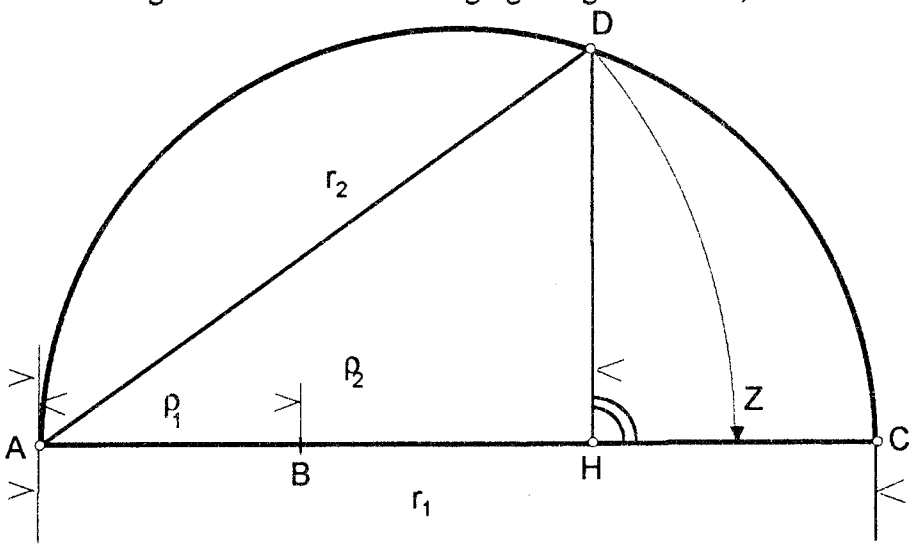
Vergleicht man die Formeln mit den Formeln I und II, so erkennt man den prinizipiell gleichen Aufbau der beiden Formelpaare.

Bildet man nun die Folgen ρ_1, ρ_2, ρ_4, ρ_8, ... bzw. r_1, r_2, r_4, r_8, ... so ist zu vermuten, daß sie ein und demselben Grenzwert zustreben, der dem gesuchten Radius R entspricht. Daß dies tatsächlich so ist, wollen wir nun auch rechnerisch zeigen. Dabei sei vorausgesetzt, daß eine reelle Zahl durch eine Intervallschachtelung erfaßt werden kann. (Cantor-Dedekindsches Axiom).

Wir wollen im Folgenden zeigen, daß durch die Folgen der Gleichungen III und IV tatsächlich eine Intervallschachtelung bestimmt ist. Dazu ist dreierlei zu zeigen:

1. Es ist stets $r_n > \rho_n$ für alle n.
2. ρ_n ist eine monoton steigende, r_n eine monoton fallende Folge.
3. $r_n - \rho_n$ strebt mit zunehmendem Index n gegen 0.

Um die Gültigkeit der ersten beiden Bedingungen zeigen zu können, betrachten wir FigurIII:



Figur III

Aus Figur II ist zunächst anschaulich klar: $r_1 > \rho_1$. Weiter sei (in Figur III stark übertrieben) $AB=\rho_1$ und $AC=r_1$. Der Endpunkt der Strecke $\rho_2 = \frac{r_1+\rho_1}{2}$ liegt deshalb in der Mitte H zwischen B und C. Weiter gilt: $(AD)^2 = AC \cdot AH$ (Kathetensatz) oder $AD = \sqrt{r_1 \cdot \rho_2}$. Der Endpunkt Z der Strecke r_2 liegt damit zwischen H und C. Also gilt zunächst $r_2 < r_1$ und $\rho_2 > \rho_1$, wobei $\rho_2 < r_2$ ist. Entsprechendes gilt für r_4 und ρ_4 etc..

Allgemein können wir also schreiben:

$$\rho_1 < \rho_2 < \rho_4 < \rho_8 < \ldots\ldots\ldots\ldots < r_8 < r_4 < r_2 < r_1$$

Damit ist die Gültigkeit der ersten beiden Bedingungen gezeigt. Die Gültigkeit der 3. Bedingung ergibt sich nun aus dem folgenden rekursiven Rechenweg unter Benutzung der Formeln III und IV:

$$\rho_2^2 = \frac{(r_1 + \rho_1)^2}{4}$$

$$r_2^2 = r_1 \cdot \rho_2 = r_1 \cdot \frac{r_1 + \rho_1}{2}$$

$$r_2^2 - \rho_2^2 = r_1 \cdot \frac{r_1 + \rho_1}{2} - \frac{(r_1 + \rho_1)^2}{4}$$

$$= \frac{r_1 + \rho_1}{2} \cdot \left(r_1 - \frac{r_1 + \rho_1}{2} \right)$$

$$= \frac{r_1^2 - \rho_1^2}{4}$$

entsprechend gilt: $$r_4^2 - \rho_4^2 = \frac{r_2^2 - \rho_2^2}{4} = \frac{r_1^2 - \rho_1^2}{4^2}$$

$$\vdots$$

Daraus folgt dann die ganz allgemeine Beziehung: $$r_{2^\nu}^2 - \rho_{2^\nu}^2 = \frac{r_1^2 - \rho_1^2}{4^\nu}$$ für $\nu = 1, 2, 3, 4, \ldots$;

oder: $$r_\nu^2 - \rho_\nu^2 = \frac{r_1^2 - \rho_1^2}{\nu^2}$$ für $\nu = 1, 2, 4, 8, \ldots$

Weiter folgt daraus

$$\lim_{\nu \to \infty} \left(r_\nu^2 - \rho_\nu^2 \right) = \lim_{\nu \to \infty} \left(r_\nu + \rho_\nu \right) \left(r_\nu - \rho_\nu \right) = 0$$

und deshalb

$$\lim_{\nu \to \infty} r_\nu = \lim_{\nu \to \infty} \rho_\nu = R$$

womit die Gültigkeit der 3. Bedingung nachgewiesen ist.

Beschreibt man nun um den Mittelpunkt des regelmäßigen Vieleckes, das die Radien ρ_ν und r_ν besitzt, Kreise mit diesen Radien, dann gilt:

$$2\rho_\nu \cdot \pi < U < 2r_\nu \cdot \pi$$

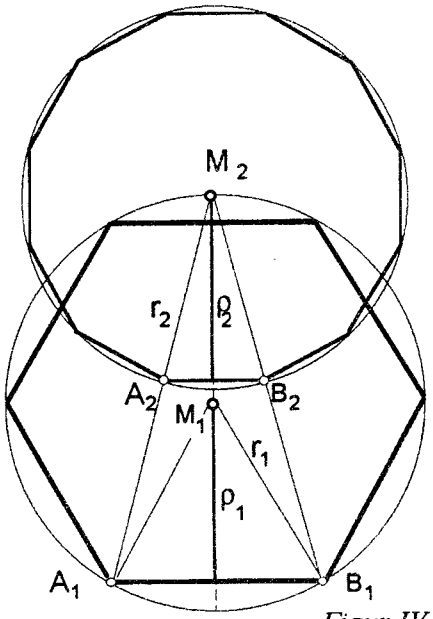
wobei U der bei dem Prozeß konstant bleibende Umfang der verschiedenen Vielecke ist. Im Grenzfall geht dieser über in den Umfang des Kreises, dessen Radius R wir suchten. Es gilt für diesen Radius:

$$2R\pi = U = 2R\pi$$

Zusammenfassend ergibt sich also durch die Formeln III und IV, daß sich der Radius R des-jenigen Kreises, dessen Umfang U gleich dem Umfang eines gegebenen regelmäßigen Vielecks ist, beliebig genau bestimmen läßt.

Beispiel:

Als Ausgangspunkt kann irgendein regelmäßiges Vieleck gewählt werden, z.B. ein regelmäßiges Sechseck (vgl. Figur IV und nachfolgende Tabelle).



Figur IV

$r_1 = 1$ dann ist U = 6

$\rho_1 = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3} \approx 0{,}8660...$

$\rho_2 = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4} \approx 0{,}9330....> \rho_1$ (nach Formel III)

$r_2 = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}} \approx 0{,}9659... < r_1$ (nach Formel IV)

Nimmt man also das regelmäßige 6-Eck als Ausgangsvieleck, so ist U=6 und r_ν und ρ_ν streben gegen den Radius R als Grenzwert. Dieser Grenzwert R läßt sich (falls der Wert für π als bekannt vorausgesetzt wird) zur Kontrolle berechnen:

$$R = \frac{U}{2\pi} = \frac{6}{2\pi} = 0{,}9549296...$$

Aus der folgenden Tabelle läßt sich sehr schön der Approximations-Grad von π ablesen: Für $n = 2^6 \cdot 6 = 384$ (und $\nu = 64$) stimmen r_ν und ρ_ν bis auf vier Dezimalstellen überein, so daß sich π auf dieser Approximations-Stufe wie folgt berechnen läßt:

$$\pi = \frac{U}{2\rho_\nu} \approx \frac{U}{2r_\nu} = \frac{6}{2\cdot 0{,}9549}.$$

Wie die unterste Zeile der nachfolgenden Tabelle zeigt, ist dieser Wert von π auf 3 Dezimalen genau.

Zusammenfassend seien jetzt die beiden verschiedenen Approximationen von π mit dem zahlenmäßigen Verlauf der Annäherung vergleichsweise dargestellt:

Approximation nach Cusanus: (Ausgangsvieleck ist ein regelmäßiges Sechseck)

$$\rho_{2n} = \frac{r_n + \rho_n}{2} \qquad r_{2n} = \sqrt{r_n \cdot \rho_{2n}} \qquad U = \text{const.} = 6$$

$$\rho_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \qquad r_1 = 1$$

$$\rho_2 = \tfrac{1}{4}\left(1+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \tfrac{1}{4}\left(2+\sqrt{3}\right) \qquad r_2 = \sqrt{1\cdot\tfrac{1}{4}\left(2+\sqrt{3}\right)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

n	$\rho_\nu \to R$	$r_\nu \to R$ ($\nu = 1, 2, 4, 8...$)	$\frac{U}{2\rho_\nu} \to \pi$	$\frac{U}{2r_\nu} \to \pi$
6	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$	1	$\frac{6}{\sqrt{3}} = 3{,}46410$	3
12	$\frac{1}{4}\left(2+\sqrt{3}\right)$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}$	$\frac{12}{2+\sqrt{3}} = 3{,}21539$	$\frac{6}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = 3{,}10583$
24	0,94947	0,95766	3,15966	3,13264
48	0,95357	0,95561	3,14607	3,13936
96	0,95459	0,95510	3,14271	3,14103
192	0,95484	0,95497	3,14189	3,14146
384	0,95491	0,95494	3,14166	3,14156

Approximation nach Archimedes: (Ausgangsvieleck ist ein regelmäßiges Dreick)

$$\frac{1}{U_{2n}} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{U_n}\right) \qquad \frac{1}{u_{2n}} = \sqrt{\frac{1}{u_n}\cdot\frac{1}{U_{2n}}} \qquad r = \text{const.} = 1$$

$$U_1 = 6\sqrt{3} \qquad u_1 = 3\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{U_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{6\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{4\sqrt{3}} \qquad \frac{1}{u_2} = \sqrt{\frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{4\sqrt{3}}} = \frac{1}{6}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

n	$s_n \to 0$	$S_n \to 0$	$u_n \to 2\pi$	$U_n \to 2\pi$
3	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$	$3\sqrt{3}$	$6\sqrt{3}$
6	1	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	6	$4\sqrt{3}$
12	$\sqrt{2-\sqrt{3}}$	$4-2\sqrt{3}$	$2\cdot 3{,}10582$	$2\cdot 3{,}21539$
24	0,26105	0,26330	$2\cdot 3{,}13263$	$2\cdot 3{,}15966$
48	0,13081	0,13109	$2\cdot 3{,}13935$	$2\cdot 3{,}14609$
96	0,06544	0,06547	$2\cdot 3{,}14103$	$2\cdot 3{,}14271$
192	0,032723	0,032728	$2\cdot 3{,}14145$	$2\cdot 3{,}14187$
384	0,016362	0,016363	$2\cdot 3{,}14156$	$2\cdot 3{,}14166$

1. Bemerkung:

Die Rekursionsformeln III und IV sind zunächst der Berechnung der Kreiszahl π auf die beschriebene Art angepaßt, wobei immer $r_1 < \rho_1$ vorausgesetzt wurde. Löst man sich von dieser Bindung und geht von anderen Ausgangszahlen (z.B. r_1=2 und ρ_1=8; $r_1 < \rho_1$) aus, dann ergeben sich neue Fragen. Für $r_1 < \rho_1$ stellt sich die Konvergenzfrage des Verfahrens aufs Neue.

Im Falle der Konvergenz des Verfahrens bleibt außerdem offen, ob es für die Grenz-werte überhaupt eine konkrete geometrische oder arithmetische Deutung gibt. Vorab kann gesagt werden, daß dies möglich ist. Es zeigt sich, daß mit den Rekursionsformeln III und IV z.B. trigonometrische Funktionen – und sogar Logarithmen berechnet werden können. In unserem Falle liegt also nur ein kleiner, spezieller Anwendungsbereich der Formeln III und IV vor.

2. Bemerkung:

Im Falle der archimedischen Rechnung bleibt *der gesuchte Umfang des Kreises* immer kon-stant. Er wird durch Streckenzüge immer besser angenähert (Rektifizierung). *"Krummes" mißt sich am "Gerade-den"*. Im Falle der Berechnung nach N. Cusanus bleibt der Umfang der aufeinanderfolgenden Vielecke immer konstant. Dieser gleichbleibende Umfang wird schließ-lich zum Umfang eines Kreises, *dessen Radius wir suchten*. Hier mißt sich *"Gerades" am "Krummen"*.

3. Die drei klassischen Mittelbildungen

Gegeben seien zwei gleichartige Größen x_0 und x_1 ($x_1 > x_0$). Dann gibt es drei Möglichkeiten mittels der elementaren Rechenoperationen eine dritte Größe m dazwischen zu schalten.

1. Arithmetisches Mittel:

m_a ist arithmetisches Mittel, wenn die Unterschiede $m_a - x_0$ und $x_1 - m_a$ gleich sind.

Also: $$m_a - x_0 = x_1 - m_a$$

$$m_a = \frac{x_1 + x_0}{2}$$

2. Geometrisches Mittel:

m_g ist geometrisches Mittel, wenn die Verhältnisse $m_g : x_0$ und $x_1 : m_g$ gleich sind.

Also: $$\frac{m_g}{x_0} = \frac{x_1}{m_g}$$

$$m_g = \sqrt{x_0 x_1}$$

m_g nennt man auch die "mittlere Proportionale" aus den Strecken x_0 und x_1.

3. Harmonisches Mittel:

m_h ist harmonisches Mittel, wenn die Unterschiede $m_h - x_0$ und $x_1 - m_h$ sich wie die Größen x_0 und x_1 verhalten.

Also: $$\frac{m_h - x_0}{x_1 - m_h} = \frac{x_0}{x_1}$$

$$m_h = \frac{2x_0x_1}{x_0 + x_1} \qquad \text{oder} \qquad \frac{1}{m_h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_1}\right)$$

Sind die Größen x_0 und x_1 ($x_0 < x_1$) als Strecken gegeben, so lassen sich die entsprechenden Mittelstrecken leicht konstruieren.

Historisches:

Das arithmetische, geometrische und harmonische Mittel bilden die drei pythagoräischen Medietäten (Pythagoras 570–480 v.Chr.), d.h. Proportionsverhältnisse aus drei Größen, von denen die mittlere aufgrund einer Proportion durch die beiden anderen bestimmt ist. Theon von Smyrna (um 100 n.Chr.) unterschied in späterer Zeit zehn Arten von Mitteln zwischen drei Zahlen a, b, und m, unter denen sich als die wichtigsten die oben aufgeführten befinden. Als vollkommenes Verhältnis galt dasjenige, das aus zwei Zahlen a, b sowie ihrem arithmetischen und harmonischen Mittel besteht, also $a : m_a = m_h : b$,

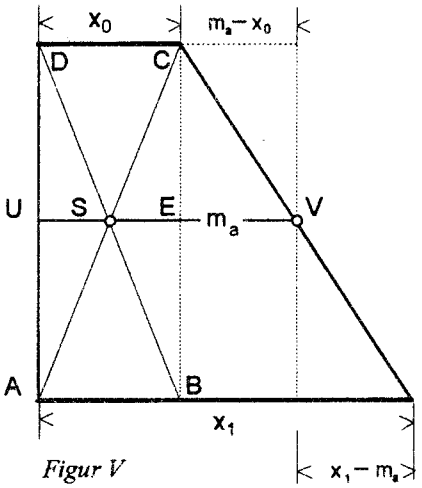
z. B. $12 : 9 = 8 : 6$ [2].

---

[2] vgl. auch Teil IIa , Seite 78

Zur Konstruktion der 3 klassischen Mittel aus den gegebenen Strecken x_0 und x_1 ($>x_0$)

1. **Arithmetisches Mittel m_a:**



Figur V

Aus $m_a - x_0 = x_1 - m_a$

folgt $m_a = \dfrac{x_0 + x_1}{2}$

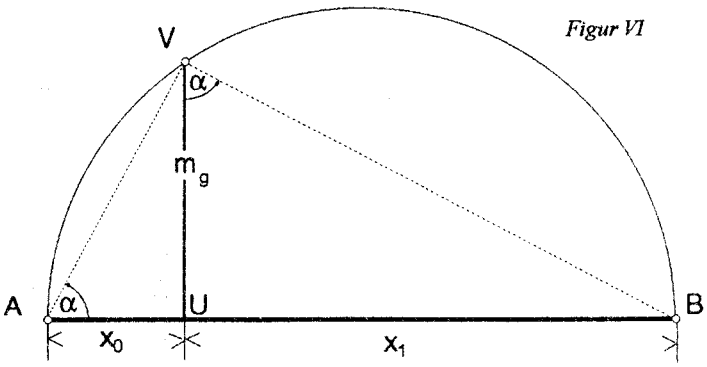
Zur Konstruktion von m_a:

zunächst ist $\dfrac{CE}{CB} = \dfrac{1}{2}$

und weiter $\dfrac{CE}{CB} = \dfrac{m_a - x_0}{x_1 - x_0}$ (Scheitel C)

woraus insgesamt: $UV = m_a = \dfrac{x_0 + x_1}{2}$ folgt.

2. **Geometrisches Mittel m_g:**



Figur VI

Aus $\dfrac{x_0}{m_g} = \dfrac{m_g}{x_1}$

folgt $m_g = \sqrt{x_0 - x_1}$

Die Konstruktion folgt unmittelbar aus dem Kathetensatz oder aus der Ähnlichkeit der Dreiecke AUV und VUB.

Behauptung: $m_h = \dfrac{2x_0x_1}{x_0 + x_1}$

3. **Harmonisches Mittel m_h:**

Zur Konstruktion des harmonischen Mittels m_h aus den gegebenen Strecken x_0 und x_1 :

Es ist also zunächst zu beweisen:

$$m_h = UV = \frac{2x_0x_1}{x_0 + x_1}$$

Mit den Bezeichnungen der Figur VII gelten die folgenden Proportionen:

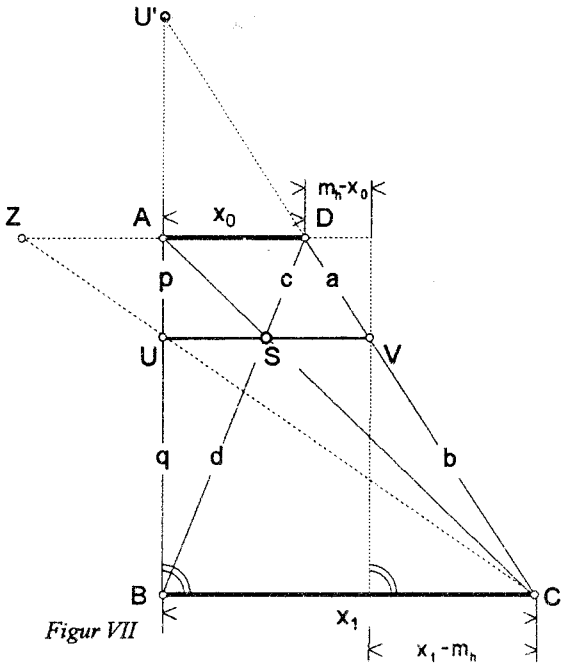
$\dfrac{m_h - x_0}{x_1 - m_h} = \dfrac{a}{b}$ (Scheitel V)

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ (Scheitel D)

$\dfrac{c}{d} = \dfrac{x_0}{x_1}$ (Scheitel S)

Also $\dfrac{m_h - x_0}{x_0 - m} = \dfrac{x_0}{x_1}$

woraus $m_h = \dfrac{2x_0x_1}{x_0 + x_1}$ folgt.



Figur VII

Drei ergänzende Bemerkungen zum Aufbau der Figur VII:

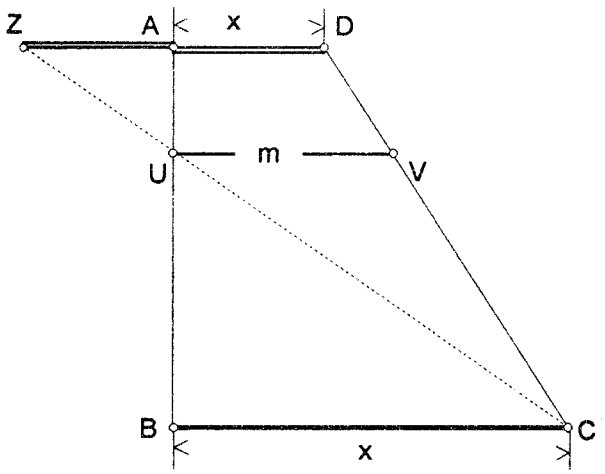
1. Leicht einzusehen ist, daß S die Strecke UV halbiert, daß also gilt $US = SV$. Das folgt aus den drei Proportionen:

$$\frac{SV}{x_1} = \frac{c}{c+d} \qquad \text{(Scheitel } D\text{)}$$

$$\frac{c}{c+d} = \frac{p}{p+q} \qquad \text{(Scheitel } B\text{)}$$

$$\frac{p}{p+q} = \frac{US}{x_1} \qquad \text{(Scheitel } A\text{),}$$

woraus schließlich $US = SV$ folgt.



Wegen

$$\frac{US}{SV} = \frac{ZA}{AD} = \frac{1}{1} \qquad \text{(Scheitel } C\text{)}$$

folgt daraus weiter $ZA = AD$, was zu einer zweiten möglichen Konstruktion des harmonischen Mittels m_h aus x_0 und x_1 führt (vgl. Figur VIII):

2. Aus dem Vorangehenden ergibt sich die harmonische Lage der Punkte A, B, U und U', d.h. es gilt

$$\frac{AU}{BU} = \frac{AU'}{BU'} \quad \text{oder} \quad DV(ABUU') = (-)1.$$

((−1) bei Berücksichtigung orientierter Strecken)

In diesem Zusammenhang sagt man auch eine Strecke AB werde innen (durch U) und außen (durch U') in demselben Verhältnis geteilt. Es gelten nämlich die folgenden Proportionen:

$$\frac{AU}{BU} = \frac{p}{q} = \frac{c}{d} \qquad \text{(Scheitel } B\text{)}$$

$$\frac{c}{d} = \frac{x_0}{x_1} \qquad \text{(Scheitel } S\text{)}$$

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{AU'}{BU'} \qquad \text{(Scheitel } U'\text{)}$$

womit die obige Behauptung bestätigt ist.

3. Zusammenhang zwischen harmonischen gelegenen Punkten und dem harmonischen Mittel

Wir wollen noch zeigen, daß die Strecke UU' das harmonische Mittel aus den Strecken AU' und BU' ist. Aufgrund der 2. Bemerkung gilt:

$$\frac{AU}{BU} = \frac{AU'}{BU'}$$

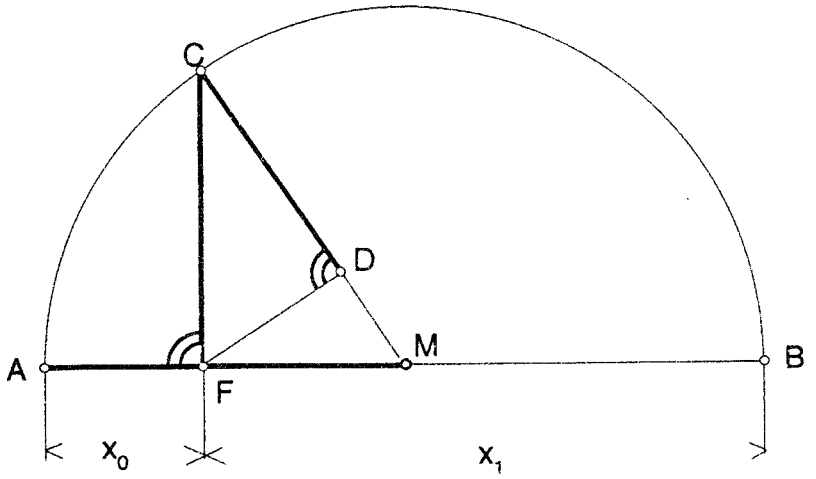
Nun ist $AU = UU' - AU'$ und $BU = BU' - UU'$,

woraus $\dfrac{UU' - AU'}{BU' - UU'} = \dfrac{AU'}{BU'}$ oder $UU' = \dfrac{2AU' \cdot BU'}{AU' + BU'}$ folgt.

Zwei verschiedene zusammenfassende Figuren

Alle drei Mittelbildungen lassen sich auf zwei verschiedene Weisen in einer Figur veranschaulichen:

1.



Figur IX

$m_a = AM = MB$

$m_g = FC$

$m_h = CD$

Dabei ist unmittelbar klar:

$x_0 < m_h < m_g < m_a < x_1$

und

$m_a \cdot m_h = m_g^2$

2.

Konstruktion der drei klassischen Mittel m_a, m_g und m_h mittels Kreisen:

Gegeben:

$AB = a = 12$

$BC = b = 6$

zunächst ist dann

$AM = MC$

$= \dfrac{a+b}{2} = m_a$

und (Kathetensatz):

$BD = BE = m_g = \sqrt{a \cdot b}$

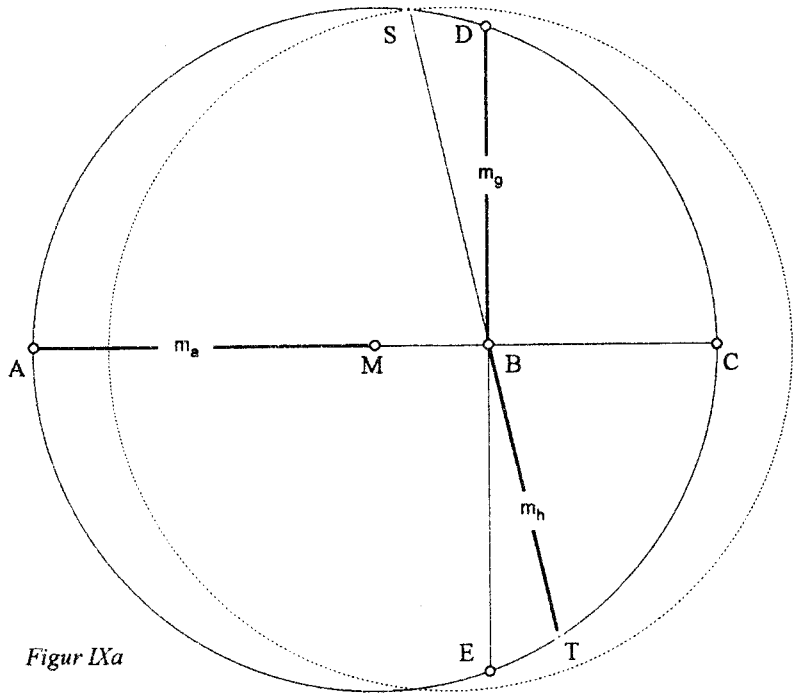
Nun werde die Strecke $SB = m_a$ über B hinaus bis T verlängert.

Dann gilt aufgrund des Sehnensatzes im Kreis (mit Scheitel B):

$BD \cdot BD = SB \cdot BT$

oder

$BT = \dfrac{(BD)^2}{SB} = \dfrac{m_g^2}{m_a} = m_h = \dfrac{2ab}{a+b}$ (vgl. Seite 16)



Figur IXa

Alle drei Mittel lassen sich dann an der obigen Figur unmittelbar ablesen. Dabei ist ersichtlich:

$$m_a > m_g > m_h$$

Hinweis: Im Teil II auf Seite 55f finden sich zum Begriff "Harmonisches Mittel" noch einige ergänzende Bemerkungen.

4. UNTERSUCHUNG VON REKURSIONSFOLGEN, DIE SICH AUS DEN DREI KLASSISCHEN MITTEL BILDUNGEN ENTWICKELN LASSEN

4.1. Fortlaufende arithmetische Mittelbildung

Gegeben seien die beiden Ausgangswerte x_0 und x_1, zu ermitteln ist der Grenzwert der Folge:

$$\boxed{x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2} \qquad n \geq 2 \quad \text{V}}$$

1. Rekursionsformel für x_n

Zunächst berechnen wir die ersten Folgenglieder x_n und sodann die Differenzen aufeinanderfolgender Glieder der Folge:

$x_0 = x_0$

$$x_1 - x_0 = x_1 - x_0 \qquad \text{mit zunä chst } x_1 > x_0$$

$x_1 = x_1$

$$x_2 - x_1 = \frac{x_0 - x_1}{2}$$

$$x_2 = \frac{x_1 + x_0}{2}$$

$$x_3 - x_2 = \frac{x_1 - x_0}{4}$$

$$x_3 = \frac{3x_1 + x_0}{4}$$

$$x_4 - x_3 = \frac{x_0 - x_1}{8}$$

$$x_4 = \frac{5x_1 + 3x_0}{8}$$

$$x_5 - x_4 = \frac{x_1 - x_0}{16}$$

$$x_5 = \frac{11x_1 + 5x_0}{16}$$

$\vdots$ $\qquad\qquad$ $\vdots$

$x_{n-1} =$ .....

$$x_n - x_{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{x_1 - x_0}{2^{n-1}}$$

oder

$$\boxed{x_n = x_{n-1} + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x_1 - x_0}{2^{n-1}}} \text{ Va}$$

2. Rekursionsformel für x_n

$x_n =$ .....

Bemerkung:

Es lassen sich schöne Zahlenbeziehungen zwischen den aufeinanderfolgenden Folgengliedern der linken Spalte entdecken. Es sei:

$$x_n = \frac{a_n x_1 + b_n x_0}{2^{n-1}}$$
$$x_{n+1} = \frac{a_{n+1} x_1 + b_{n+1} x_0}{2^n} .$$

Dabei erkennt man z.B. die Beziehungen:

$$a_n + b_n = 2^{n-1}$$
$$a_n = b_{n+1}$$
$$b_n + 2^{n-1} = a_{n+1}$$

Daraus lassen sich die Koeffizienten a_n und b_n berechnen:

$$a_n = \tfrac{1}{3}\left[2^n + (-1)^{n-1}\right]$$
$$b_n = \tfrac{1}{3}\left[2^{n-1} + (-1)^n\right] \qquad \text{(b)}$$

so daß sich x_n wie folgt darstellen läßt:

$$x_n = \frac{a_n x_1 + b_n x_0}{2^{n-1}} = \frac{\left[2^n + (-1)^{n-1}\right]x_1 + \left[2^{n-1} + (-1)^n\right]x_0}{3 \cdot 2^{n-1}}$$
$$= \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_0 + \frac{(-1)^{n-1}}{3 \cdot 2^{n-1}}x_1 + \frac{(-1)^n}{3 \cdot 2^{n-1}}x_0$$

Damit ist schließlich

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n = \frac{2x_1 + x_0}{3} .$$

Nun betrachten wir das Gleiche anders, indem wir die Gleichungen der rechten Spalte auf S. 17 verfolgen: Durch Aufsummieren der jeweiligen Glieder der linken und rechten Seiten der Spalte erhalten wir:

$$(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \ldots\ldots + (x_n - x_{n-1}) = x_n - x_0 \quad \text{(Summe der linken Spaltenglieder)}$$

und

$$(x_1 - x_0) - \frac{x_1 - x_0}{2} + \frac{x_1 - x_0}{4} + \ \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x_1 - x_0}{2^{n-1}}$$
$$= (x_1 - x_0)\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ \ldots\ldots \ (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$
$$= (x_1 - x_0)\frac{1 - \frac{(-1)^n}{2^n}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}(x_1 - x_0)\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right) \quad \text{(Summe der rechten Spaltenglieder)}$$

Also ist

$$x_n - x_0 = \frac{2}{3}(x_1 - x_0)\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right)$$

oder

$$\boxed{x_n = x_0 + \frac{2}{3}(x_1 - x_0)\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right)} \quad \text{Vb}$$ [3]

Beispiel:

$$\begin{aligned} x_4 &= x_0 + \frac{2}{3}(x_1 - x_0)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \\ &= x_0 + \frac{2}{3} \cdot \frac{15}{16}(x_1 - x_0) \\ &= x_0 + \frac{5}{8}(x_1 - x_0) = \frac{5x_1 + 3x_0}{8} \end{aligned}$$

Insgesamt ist also

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} x_n &= x_0 + \tfrac{2}{3}(x_1 - x_0) \\ &= \frac{2x_1 + x_0}{3} = x\,. \end{aligned}$$

Wir haben also auf zwei verschiedenen Wegen den Grenzwert x erhalten. Das Ergebnis des un-endlichen Prozesses ist hier abhängig von den Ausgangsdaten. Ist z.B. $x_1 = 4$ und $x_0 = 1$, so er-gibt sich für x der Wert 3. Ist hingegen $x_1 = 1$ und $x_0 = 4$, so ergibt sich für x der Wert 2. Der Fall $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$ führt zu $x = \frac{2}{3}$, der Fall $x_0 = 1$ und $x_1 = 0$ zu $x = \frac{1}{3}$.

Bemerkung:

Sehr schön läßt sich an der Folge das Prinzip der Intervallschachtelung arithmetisch zeigen:

$$\begin{aligned} x_2 - x_0 &= \frac{x_1 - x_0}{2} \\ x_4 - x_2 &= \frac{x_1 - x_0}{8} \\ &\vdots \\ x_n - x_{n-2} &= \frac{x_1 - x_0}{2^{n-1}} \qquad > 0 \text{ für } x_1 > x_0 \text{ und gerade n} \end{aligned}$$

also $\quad x_n = x_{n-2} + \dfrac{x_1 - x_0}{2^{n-1}}$

$x_n > x_{n-2} \qquad x_n$ monoton steigend für gerade n

entsprechend ist:

$$\begin{aligned} x_3 - x_1 &= \frac{x_0 - x_1}{4} \\ x_5 - x_3 &= \frac{x_0 - x_1}{16} \\ &\vdots \\ x_n - x_{n-2} &= \frac{x_0 - x_1}{2^{n-1}} \qquad < 0 \text{ für } x_1 > x_0 \text{ und ungerade n} \end{aligned}$$

---

[3] vgl. die entspr. explizite Darstellung für x_n auf Seite 19 !

also $\quad x_n = x_{n-2} - \dfrac{x_1 - x_0}{2^{n-1}}$

$x_n < x_{n-2}$ $\qquad$ x_n monoton fallend für ungerade n

Aus Va folgt für $n = 2 \cdot v$:

$$x_{2v} = x_{2v-1} + (-1)^{2v-1} \cdot \frac{x_1 - x_0}{2^{2v-1}} \qquad \text{oder:} \qquad x_{2v-1} = x_{2v} + (-1)^{2v} \cdot \frac{x_1 - x_0}{2^{2v-1}}$$

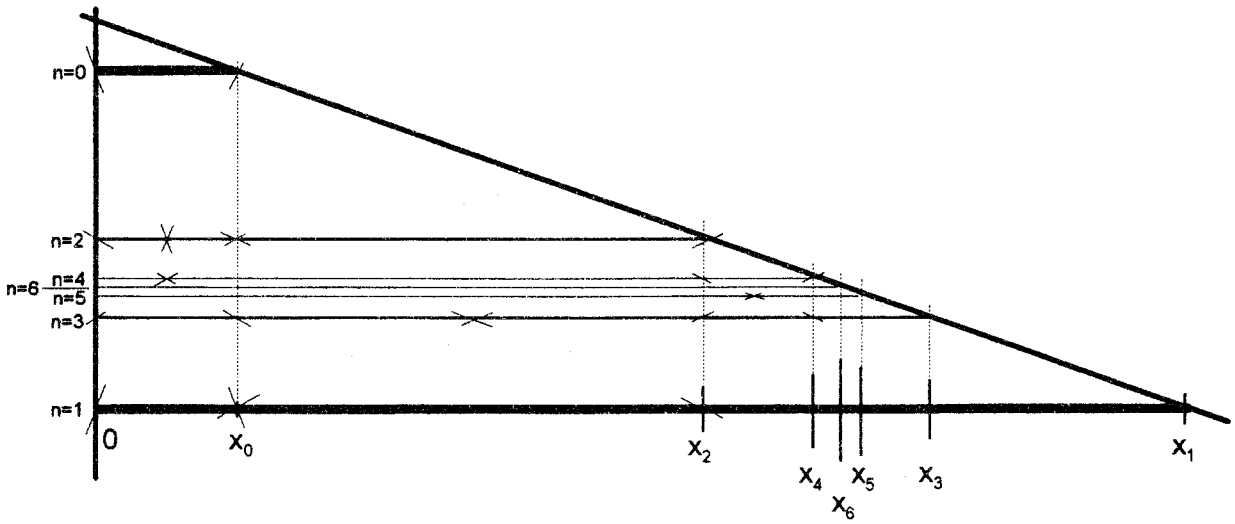
D.h. alle x_n mit ungeradem Index sind größer als diejenigen mit geradem Index. Außerdem folgt aus Va

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - x_{n-1}) = \lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\frac{x_1 - x_0}{2^{n-1}} = 0 \ ,$$

was noch zu zeigen war.

Als Beispiel betrachten wir die Intervallschachtelung mit den Ausgangswerten :
$x_0 = 2$; $x_1 = 16$, also $x = \frac{34}{3} = 11,\overline{3}$ (siehe Zeichnung).

$x_0 = 2$
$x_1 = 16$
$x_2 = 9$
$x_3 = \frac{25}{2} = 12{,}5$
$x_4 = \frac{43}{4} = 10{,}75$
$x_5 = \frac{93}{8} = 11{,}625$
$x_6 = \frac{179}{16} = 11{,}1875$



Figur X

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{2x_1 + x_0}{3} = \frac{34}{3} = 11{,}33...$$

4.2. Fortlaufende harmonische Mittelbildung

Gegeben seien die Ausgangwerte x_0 und x_1. Zu ermitteln ist der Grenzwert der Folge x_n, wobei

$$\boxed{\frac{1}{x_n}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_{n-1}}+\frac{1}{x_{n-2}}\right)} \quad \text{sei.} \qquad \text{VI} \quad \text{(1. Rekursionsformel für } x_n\text{)}$$

Zunächst berechnen wir die Kehrwerte der Folgenglieder und sodann die Differenz der Kehrwerte aufeinanderfolgender Glieder der Folge:

$$\frac{1}{x_0}=\frac{1}{x_0}$$

$$\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_1}=\frac{x_1-x_0}{x_0x_1}$$

$$\frac{1}{x_1}=\frac{1}{x_1}$$

$$\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}=\frac{x_0-x_1}{2x_0x_1}$$

$$\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_0}{2x_1x_0}$$

$$\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_3}=\frac{x_1-x_0}{4x_0x_1}$$

$$\frac{1}{x_3}=\frac{3x_0+x_1}{4x_0x_1}$$

$$\frac{1}{x_3}-\frac{1}{x_4}=\frac{x_0-x_1}{8x_0x_1}$$

$$\frac{1}{x_4}=\frac{3x_1+5x_0}{8x_0x_1}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{x_{n-1}}= \quad \dots$$

$$\boxed{\frac{1}{x_{n-1}}-\frac{1}{x_n}=(-1)^{n-1}\cdot\frac{x_1-x_0}{2^{n-1}\cdot x_0x_1}} \qquad \text{VIa}$$

(2. Rekursionsformel für x_n)

$$\frac{1}{x_n}= \quad \dots$$

Man erkennt mit (b) (vgl. S.18)

$$\frac{1}{x_n}=\frac{b_nx_1+a_nx_0}{2^{n-1}\cdot x_0x_1}=\frac{\left[2^{n-1}+(-1)^n\right]x_1+\left[2^n+(-1)^{n-1}\right]x_0}{3\cdot 2^{n-1}\cdot x_0x_1}$$

Aus den Gleichungen der rechten Spalte folgt weiter (entsprechend dem Vorgehen auf S. 18 und 19):

$$\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_n}=\frac{x_1-x_0}{x_0\cdot x_1}\cdot\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-+\ldots\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$=\frac{x_1-x_0}{x_0\cdot x_1}\cdot\frac{1-\frac{(-1)^n}{2^n}}{1+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{x_1-x_0}{x_0\cdot x_1}\cdot\left(1-\frac{(-1)^n}{2^n}\right).$$

Beispiel:

$$\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_4}=\frac{2}{3}\cdot\frac{x_1-x_0}{x_0\cdot x_1}\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)$$

$$=\frac{5}{8}\cdot\frac{x_1-x_0}{x_0\cdot x_1}$$

$$\frac{1}{x_4}=\frac{1}{x_0}-\frac{5}{8}\cdot\frac{x_1-x_0}{x_0\cdot x_1}=\frac{8x_1-5x_1+5x_0}{8x_0\cdot x_1}=\frac{3x_1+5x_0}{8x_0\cdot x_1}$$

Es ist also:

$$\boxed{\frac{1}{x_n}=\frac{1}{x_o}-\frac{2}{3}\cdot\frac{x_1-x_0}{x_0x_1}\cdot\left(1-\frac{(-1)^n}{2^n}\right)}$$ VIb

und weiter:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=\frac{1}{x}=\frac{1}{x_0}-\frac{2}{3}\cdot\frac{x_1-x_0}{x_0x_1}$$

$$=\frac{2x_0+x_1}{3x_0x_1}$$

also:

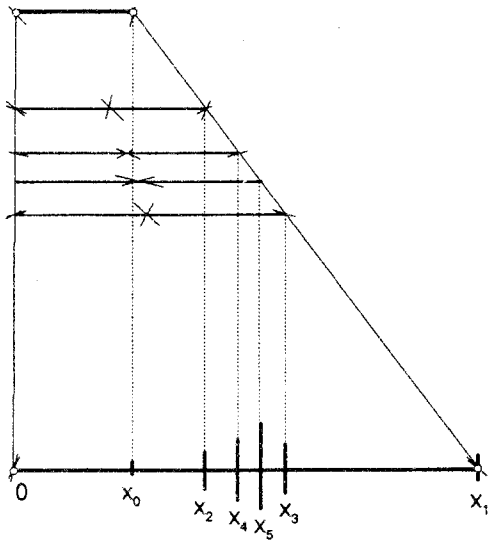
$$x=\frac{3x_0x_1}{2x_0+x_1}$$

Beispiel: $x_0 = 4$; $x_1 = 16$; $x = 8$;

$x_0 = 4$
$x_1 = 16$
$x_2 = \frac{32}{5}$
$x_3 = \frac{64}{7}$
$x_4 = \frac{128}{17}$
$\vdots$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{3x_0x_1}{2x_0 + x_1} = 8$$

Figur XI



Auch hier läßt sich wieder sehr schön das Prinzip der Intervallschachtelung konstruktiv verfolgen. [4]

4 Zur Konstruktion siehe Seite 14

4.3. Fortlaufende geometrische Mittelbildung

Gegeben seien die beiden Ausgangswerte x_0 und x_1. Ermittle den Grenzwert der Folge

$$\boxed{x_n = \sqrt{x_{n-1} \cdot x_{n-2}}} \qquad \text{VII} \qquad \text{(1. Rekursionsformel für } x_n\text{)}$$

zunächst gilt:

$$x_0 = x_0$$
$$x_1 = x_1$$
$$x_2 = \sqrt{x_1 \cdot x_0}$$
$$x_3 = \sqrt{x_2 \cdot x_1} = \sqrt{\sqrt{x_1 \cdot x_0} \cdot x_0} = \sqrt[4]{x_1^3 x_0}$$
$$x_4 = \sqrt[8]{x_1^5 x_0^3}$$
$$x_5 = \sqrt[16]{x_1^{11} x_0^5}$$
$$\vdots$$

mit (b) gilt: (vgl. Seite 19)

$$x_n = \sqrt[2^{n-1}]{x_1^{a_n} \cdot x_0^{b_n}}$$
$$x_n = \sqrt[2^{n-1}]{x_1^{\frac{2^n+(-1)^{n-1}}{3}} \cdot x_0^{\frac{2^{n-1}+(-1)^n}{3}}}$$

oder:

$$x_n = x_1^{\frac{2^n+(-1)^{n-1}}{3 \cdot 2^{n-1}}} \cdot x_0^{\frac{2^{n-1}+(-1)^n}{3 \cdot 2^{n-1}}}$$
$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_1^{\frac{2}{3}} \cdot x_0^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x_1^2 \cdot x_0}$$

Entsprechend den vorangehenden Betrachtungen können wir diesen Grenzwert auch noch auf andere Weise ermitteln. Es ist nämlich:

$$\frac{x_1}{x_0} = \frac{x_1}{x_0}$$
$$\frac{x_2}{x_1} = \sqrt{\frac{x_0}{x_1}}$$
$$\frac{x_3}{x_2} = \sqrt[4]{\frac{x_1}{x_0}}$$
$$\frac{x_4}{x_3} = \sqrt[8]{\frac{x_0}{x_1}}$$
$$\vdots$$

$$\boxed{\frac{x_n}{x_{n-1}} = \left(\sqrt[2^{n-1}]{\frac{x_1}{x_0}}\right)^{(-1)^{n-1}}} \qquad \text{(2. Rekursionsformel für } x_n\text{)}$$

Weiter ist:

$$\frac{x_1}{x_0}\cdot\frac{x_2}{x_1}=\sqrt{\frac{x_1}{x_0}}$$

$$\frac{x_1}{x_0}\cdot\frac{x_2}{x_1}\cdot\frac{x_3}{x_2}=\sqrt[4]{\frac{x_1^{\,3}}{x_0^{\,3}}}$$

$$\frac{x_1}{x_0}\cdot\ldots\cdot\frac{x_4}{x_3}=\sqrt[8]{\frac{x_1^{\,5}}{x_0^{\,5}}}$$

$$\vdots$$

$$\frac{x_1}{x_0}\cdot\ \ldots\ \cdot\frac{x_n}{x_{n-1}}=\frac{x_n}{x_0}=\left(\sqrt[2^{n-1}]{\frac{x_1}{x_0}}\right)^{\frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}}$$

Beispiel:

$$\frac{x_4}{x_0}=\sqrt[8]{\frac{x_1}{x_0}^{\,5}}$$

$$x_4=\sqrt[8]{\frac{x_1^{\,5}}{x_0^{\,5}}\cdot x_0^8}=\sqrt[8]{x_1^{\,5}\cdot x_0^3}$$

und allgemein:

$$\boxed{x_n=x_0\cdot\left(\sqrt[2^{n-1}]{\frac{x_1}{x_0}}\right)^{\frac{2^n+(-1)^{n-1}}{3}}}\qquad \text{VIIb}$$

Daraus folgt dann:

$$x=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left[x_0\cdot\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^{\frac{2^n+(-1)^{n-1}}{3\cdot 2^{n-1}}}\right]$$

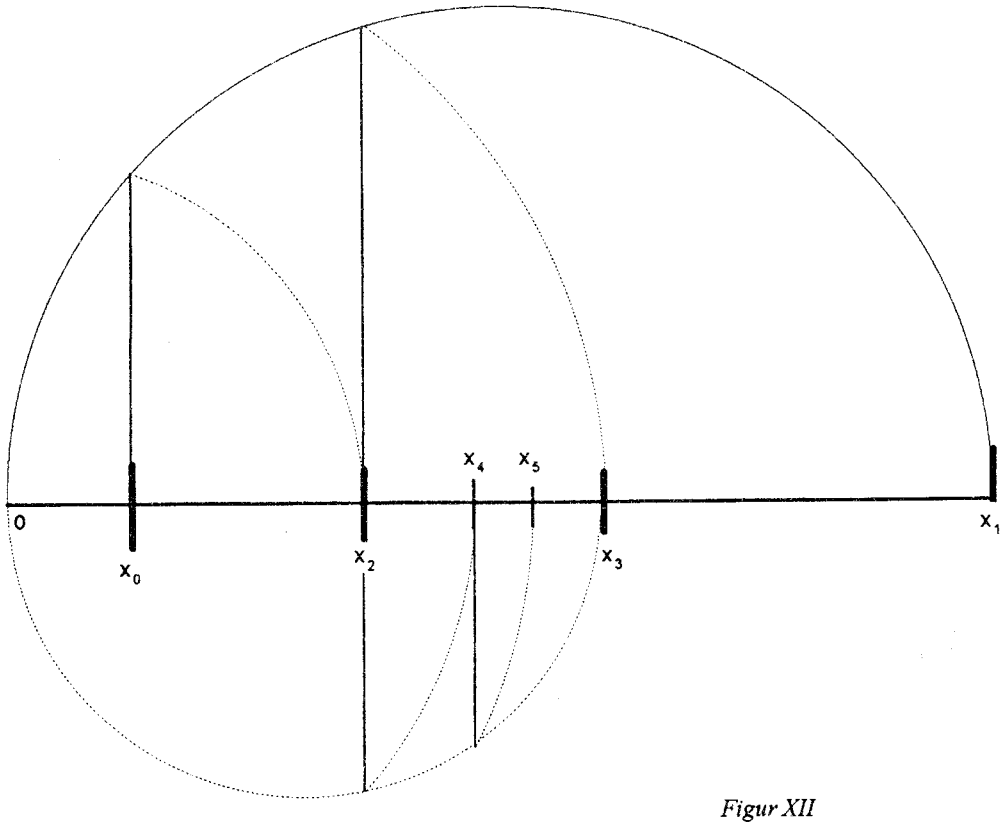
$$=x_0\cdot\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$=x_0\cdot\sqrt[3]{\frac{x_1^2}{x_0^2}}=\sqrt[3]{x_1^2\cdot x_0}$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß die Folge x_n eine Intervallschachtelung darstellt:

Beispiel: $x_0 = 2$; $x_1 = 16$; $x = 8$ (siehe nachfolgende Zeichnung)

$$x_0 = 2$$
$$x_1 = 16$$
$$x_2 = 4\sqrt{2} \quad \approx 5{,}657$$
$$x_3 = 8 \cdot \sqrt[4]{2} \quad \approx 9{,}514$$
$$x_4 = 4 \cdot \sqrt[8]{2^7} \quad \approx 7{,}336$$
$$x_5 = 8 \cdot \sqrt[16]{2} \quad \approx 8{,}354$$
$$x_6 = 4 \cdot \sqrt[32]{2^{31}} \quad \approx 7{,}829$$
$$\vdots$$



Figur XII

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \sqrt[3]{x_1^2 \cdot x_0} = 8$$

Die obige Zeichnung veranschaulicht die zugehörige Intervallschachtelung. Die Konstruktionen beruhen jeweils auf Anwendung des Kathetensatzes.

4.4. Drei Bemerkungen zu den Rekursionsfolgen

1.

Ein Vergleich der Grenzwerte der drei verschiedenen Folgen, denen die drei möglichen Mittelbildungen zugrunde liegen, zeigt, daß die ersten drei natürlichen Zahlen die Grenzwerte konstituieren, und zwar auf jeweils charakteristisch verschiedene Weise.

Grenzwert der Folge der arithmetischen Mittel: $x = \dfrac{2x_1 + 1x_0}{3}$

Grenzwert der Folge der harmonischen Mittel: $x = \dfrac{3x_0x_1}{2x_0 + 1x_1}$

Grenzwert der Folge der geometrischen Mittel: $x = \sqrt[3]{x_1^{\,2} \cdot x_0^{\,1}}$

2.

Alle drei Grenzwerte sind das Ergebnis einer Intervallschachtelung. Man vergegenwärtige sich an Hand der gegebenen Zeichnungen den Prozeß des konstruktiven Vorgehens in einzelnen Schritten. Dies führt zu einem bildhaften Erleben dessen, was eine Intervallschachtelung eigentlich ist.

3.

Bei den drei beschriebenen unendlichen Prozessen bestimmen die Ausgangswerte x_0 und x_1 wesentlich den Wert des Grenzwertes. Der folgende Beitrag soll zeigen, daß es unendliche Prozesse gibt, die stärker sind als die Ausgangswerte. Die Grenzwerte als solche sind dann unabhängig von den Ausgangswerten.

5. "DER PROZEß ALS SOLCHER IST STÄRKER ALS DIE AUSGANGSDATEN"

5.1. Eine arithmetische Betrachtung

Ausgangsvoraussetzungen: Gegeben seien die positiven Größen x_0 und x_1.

Daraus bilden wir die Folge:

$$\begin{aligned} x_2 &= ax_1 + bx_0 \qquad (\text{mit } a > 0 \text{ und } b > 0) \\ x_3 &= ax_2 + bx_1 \\ &\vdots \\ x_n &= ax_{n-1} + bx_{n-2} \end{aligned} \qquad \text{VIII}$$

Schließlich bilden wir daraus die Quotientenfolge $q_n = \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ $\quad n = 0,1,2,3\ldots$

Also $\quad q_1 = \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{ax_1 + bx_0}{x_1} = a + \dfrac{b}{q_0}$

$$q_2 = \frac{x_3}{x_2} = \frac{ax_2 + bx_1}{x_2} = a + \frac{b}{q_1}$$

$$\vdots$$

$$q_n = a + \frac{b}{q_{n-1}}$$

$$= a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{q_{n-2}}}$$

$$= \cdots$$

$$q_n = a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{\ddots \; a + \cfrac{b}{q_0}}}}$$

Beispiel:

$$q_3 = a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{q_0}}}$$

mit $q_0 = \dfrac{x_1}{x_0}$

(4-gliedriger Kettenbruch)

Daraus folgt weiter mit $q = \lim\limits_{n \to \infty} q_n$:

$$q = a + \frac{b}{q}$$

$$q^2 = aq + b \qquad \text{IX}$$

$$q = \frac{a}{2} \underset{(-)}{+} \sqrt{\frac{a^2}{4} + b} \qquad (q > 0, \text{ weil } a, b, x_0, x_1 > 0)$$

Drei ergänzende Bemerkungen

1. Für a=2 und b=1 und den Anfangswerten x_0=2 u. x_1=6 sei der folgende unendliche Prozeß betrachtet:

$$q_0 = \frac{x_1}{x_0} \qquad = 3 \quad = 3$$

$$q_1 = 2 + \frac{1}{q_0} \qquad = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \quad = 2,\overline{3}$$

$$q_2 = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{q_0}} \qquad = 2 + \frac{3}{7} = \frac{17}{7} \approx 2,4286$$

$$q_3 = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{q_0}}} = 2 + \frac{7}{17} = \frac{41}{17} \approx 2,4118$$

$$q_4 \qquad = 2 + \frac{17}{14} = \frac{99}{41} \approx 2,4146$$

$$\vdots \qquad \vdots \quad \vdots$$

Nach den vorangehenden Betrachtungen ist $q = \lim\limits_{n \to \infty} q_n$ und q läßt sich aus der Gleichung IX ermitteln, ist ersichtlich unabhängig von der Wahl der Ausgangsgrößen x_0 und x_1. In diesem Falle ist dann $q = 1 + \sqrt{2} \approx 2,4142$.

An dem obigen Prozeß läßt sich sehr schön überblicken, wie mit steigendem Index n der Ein-fluß des Gliedes $\frac{1}{q_0}$ (und damit der Einfluß der Ausgangsgrößen x_0 und x_1) auf q_n in dem Maße zurücktritt, als sich q_n dem Grenzwert q nähert. Im Grenzfall $q_n \to \infty$ ist dieser Einfluß dann verschwunden. Der Prozeß als solcher hat sich durchgesetzt. Man vergleiche diesen Gedanken mit dem Prozeß des homöopathischen Potenzierens.

Der Einfluß des Gliedes $\frac{1}{q_0}$ im jeweiligen Kettenbruch auf den Wert q_n läßt sich am besten aus der Differenz zu seinem Näherungsbruch N_n ermitteln. Unter Näherungsbruch wollen wir den entsprechenden Kettenbruch ohne $\frac{1}{q_0}$ verstehen. Demnach ist also:

$$q_1 - N_1 = \frac{7}{3} - 2 \qquad = \frac{1}{3}$$

$$q_2 - N_2 = \frac{17}{7} - \left(2 + \frac{1}{2}\right) \qquad = -\frac{1}{14}$$

$$q_3 - N_3 = \frac{41}{17} - \left(2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{85}$$

$$q_4 - N_4 \qquad = -\frac{1}{492} \quad \text{etc.....}$$

2. Die Darstellung des Grenzwertes q als unendlicher Kettenbruch in der Form

$$q = a + \frac{b}{q} \quad \text{oder z. B. als} \quad q = a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{q}}}$$

zeigt, wie hier das Ganze (nämlich q) im Teil (als Glied des Kettenbruches) steckt. Man vergleiche diesen Gedanken mit den Erscheinungsformen des Lebendigen, z.B. einer Pflanze oder einem Seestern.

3. Aus dem Vorangehenden läßt sich auch eine Methode zur Ermittlung von Näherungen an eine der positiv reellen Lösungen einer quadratischen Gleichung entwickeln.

Es gelten die Beziehungen:

$$x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2} \qquad \text{VIII}$$

$$q^2 = aq + b \qquad \text{IX}$$

$$q_n = \frac{x_{n+1}}{x_n} \qquad \text{(c)}$$

$$\lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = q$$

Zunächst entnimmt man der quadratischen Gleichung IX die Koeffizienten a und b, wodurch die Rekursionsfolge x_n bestimmt ist. Mit *irgend welchen* Anfangswerten $x_0 > 0$ und $x_1 > 0$ kann nun der Rekursionsprozeß für x_n in Gang gesetzt werden.

Im Fall der 1. Bemerkung war $a = 2$, $b = 1$ und wir wählen $x_0 = 1$ und $x_1 = 4$.

Damit ist

$$\begin{aligned} x_2 &= 2\cdot 4 + 1 &&= 9 \\ x_3 &= 2\cdot 9 + 4 &&= 22 \\ x_4 &= 2\cdot 22 + 9 &&= 53 \\ x_5 &= 2\cdot 53 + 22 &&= 128 \\ x_6 &= 2\cdot 128 + 53 &&= 309 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Daraus folgt dann die Quotientenfolge $q_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$, die gegen q strebt. Es ist also:

$$\frac{x_3}{x_2} = \frac{22}{9} = 2{,}\overline{4}$$

$$\frac{x_4}{x_3} = \frac{53}{22} = 2{,}\overline{409}$$

$$\frac{x_5}{x_4} = \frac{128}{53} = 2.4151$$

$$\frac{x_6}{x_5} = \frac{309}{128} = 2{,}4141$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

Der Grenzwert $q = \lim_{n\to\infty} q_n$ ist in diesem Fall $q = 1 + \sqrt{2} = 2{,}4142..$

5.2. Eine geometrisch - arithmetische Betrachtung

a) Das Entstehen eines Quadrates aus einem "Viereck-Keim"

Wir gehen von einem Quadrat aus und ermitteln zwei Beziehungen, aus denen sich die Inkommensurabilität von Diagonale und Seite leicht nachweisen läßt:

Es seien die folgenden Bezeichnungen gewählt:

$AC = d_1$

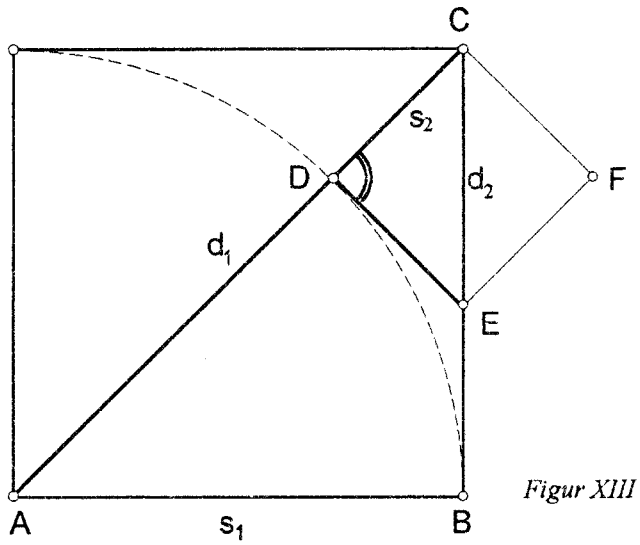
$AB = AD = s_1$

$CD = DE = BE = s_2$

$CE = d_2$

Dann gilt:

$s_2 = d_1 - s_1$ und $d_2 = s_1 - s_2$



Figur XIII

Wendet man das gleiche Verfahren auf das Quadrat *CDEF* an und setzt diesen Prozeß sinngemäß fort, so erhält man die folgenden Beziehungen:

$$\boxed{\begin{aligned} s_n &= d_{n-1} - s_{n-1} \\ d_n &= s_{n-1} - s_n \end{aligned}} \qquad \text{X}$$

Dabei sind s_n und d_n "werdende Nullen", wobei ihr Verhältnis q für alle n das gleiche ist. Wir berechnen nun für alle n dieses konstante Verhältnis mittels der Rekursionsformel X:

$$q = \frac{d_n}{s_n} = \frac{s_{n-1} - s_n}{d_{n-1} - s_{n-1}} = \frac{s_{n-1} - d_{n-1} + s_{n-1}}{d_{n-1} - s_{n-1}}$$

$$= \frac{2s_{n-1} - d_{n-1}}{d_{n-1} - s_{n-1}}$$

$$= \frac{2 - \frac{d_{n-1}}{s_{n-1}}}{\frac{d_{n-1}}{s_{n-1}} - 1}$$

$$= \frac{2-q}{q-1}$$

Also: $q^2 = 2$ oder $\frac{d_{n-1}}{s_{n-1}} = \sqrt{2}$ für $n = 2,3,4...$

Nun führen wir eine Vertauschung durch, deren Sinn erst erkannt sein will. Wir ersetzen den Index n-1 durch n und umgekehrt. Damit ergibt sich aus den Formeln X:

$$s_{n-1} = d_n - s_n$$
$$d_{n-1} = s_n - s_{n-1}$$

und weiter:

$$d_n = s_n - s_{n-1} = d_{n-1} + s_{n-1} + s_{n-1}$$

$$\boxed{\begin{aligned} d_n &= d_{n-1} + 2s_{n-1} \\ s_n &= d_{n-1} + s_{n-1} \end{aligned}} \qquad \text{Xa}$$

Ausgehend von *irgendeiner Raute* (mit den willkürlich gewählten Seiten s_1 und der Diagonale d_1) als "Keim" erhält man so eine Folge immer größer werdender Rauten, die immer quadratähnli-cher werden. Der rekursive Prozeß ist also auch hier stärker als die Ausgangswerte.

Theon von Smyrna schrieb dazu: "Wie die Einheit hier allen Dingen gemäß dem obersten und dem einem Samenkorn ähnlichen Verhältnis am Anfang steht, so wird auch das Verhältnis von Durchmesser zur Seite in der Einheit gefunden."

Plato nennt im *Staat* (546c) die Zahl 7 die "rationale Diagonale" zur Seite 5 gehörend. In dem Kommentaren des Proklos (450 n.Chr.) zum Staat findet sich dazu folgende Erläuterung die Seiten- und Diagonalenzahlen betreffend, die er den Pythagoreern zuschreibt:

> "Die Einheit ist, als Ursprung aller Zahlen, potentiell sowohl Seite als auch Diagonale. Man nimmt jetzt zwei Einheiten: eine Seite und eine Diagonale-Einheit, und bildet eine neue Seite, indem man zu der Seite-Einheit die Diagonale-Einheit hinzufügt, und eine neue Diagonale, indem man zu der Diagonale-Ein-heit zweimal die Seite-Einheit hinzufügt." [5]

n	s_n	d_n
1	1	1
2	2	3
3	5	7
4	12	17
5	29	41

Die Formel Xa ermöglicht uns nun die Berechnung der Seiten und Diagonalen der Folge der Rauten, die immer quadratähnlicher werden, entsprechend dem obigen Kommentar des Proklos:

Bemerkungen:

Wir ermitteln noch den Grenzwert von $q_n = \dfrac{d_n}{s_n}$ für $n \to \infty$.

Es ist:

$$\frac{d_n}{s_n} = \frac{2s_{n-1} + d_{n-1}}{s_{n-1} + d_{n-1}} = \frac{2 + \dfrac{d_{n-1}}{s_{n-1}}}{1 + \dfrac{d_{n-1}}{s_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{1 + \dfrac{d_{n-1}}{s_{n-1}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + 1 + \cfrac{1}{1 + \dfrac{d_{n-2}}{s_{n-2}}}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d_n}{s_n} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}} = \sqrt{2}$$

Arithmetisch bedeutet dies:

q_n ist hier nicht von vorneherein gleich $\sqrt{2}$, sondern q_n unterscheidet sich mit wachsendem Index immer weniger von $\sqrt{2}$ oder anders ausgedrückt

$$\lim_{n\to\infty} q_n = \sqrt{2}$$

---

5 siehe: "*Van der Waerden* in Erwachende Wissenschaft" S.207

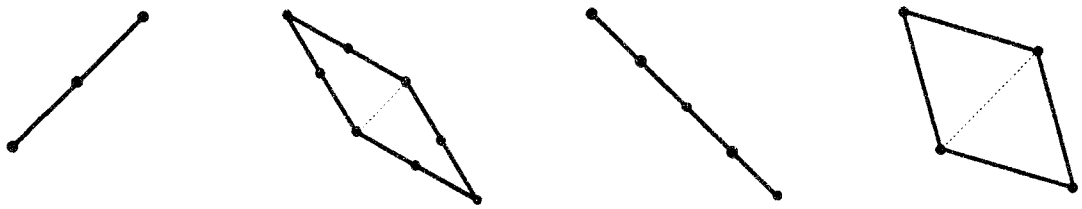
2. Es ist reizvoll für verschiedene Ausgangswerte s_n u. d_n die Folge der Quadrat-Werdung zu verfolgen:

n	s_n	d_n
1	1	2
2	3	4
3	7	10
4	17	24
⋮	⋮	⋮

n	s_n	d_n
1	2	1
2	3	5
3	8	11
4	19	27
⋮	⋮	⋮

n	s_n	d_n
1	2	0
2	2	4
3	6	8
4	14	20
⋮	⋮	⋮

n	s_n	d_n
1	1	1
2	2	3
3	5	7
4	12	17
⋮	⋮	⋮



$s_1 = 1 \quad d_1 = 2$ | $s_1 = 2 \quad d_1 = 1$ | $s_1 = 2 \quad d_1 = 0$ | $s_1 = 1 \quad d_1 = 1$

$s_2 = 3 \quad d_2 = 4$ | $s_2 = 3 \quad d_2 = 5$ | $s_2 = 2 \quad d_2 = 4$ | $s_2 = 2 \quad d_2 = 3$

$s_3 = 7 \quad d_3 = 10$ | $s_3 = 8 \quad d_3 = 11$ | $s_3 = 6 \quad d_3 = 8$ | $s_3 = 5 \quad d_3 = 7$

... | ... | ... | (beste Näherungsfolge)

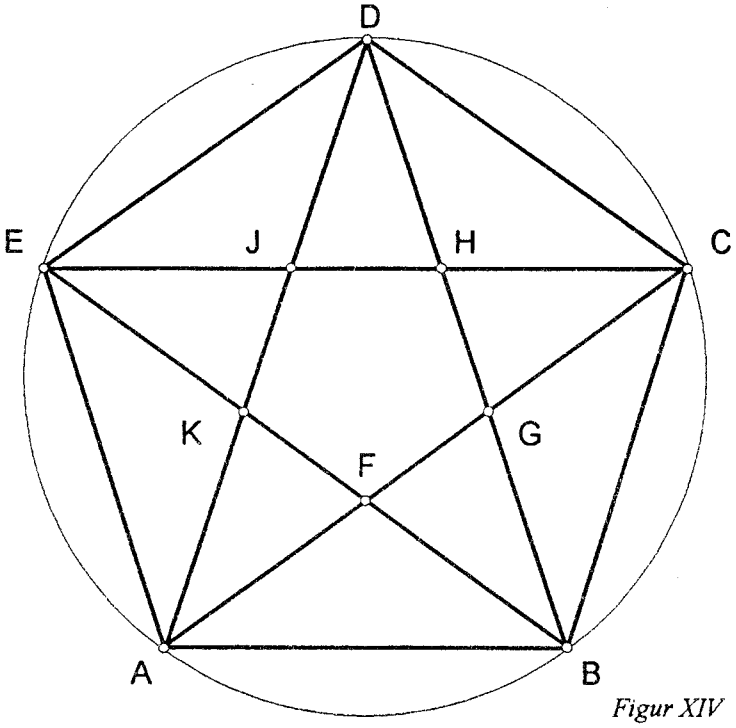
Die Figuren sind in verschiedenen Maßstäben gezeichnet.

3. Kennt man die Kettenbruchentwicklung von $x = \sqrt{2} = (1;\overline{2})$ so erkennt man im Fall $s_1 = d_1 = 1$ in den aufeinanderfolgenden Quotienten $q_n = \frac{d_n}{s_n}$ aufeinanderfolgende Näherungsbrüche des regulären Kettenbruches für x:

	q_n	1	2	2	2	2	2	2	...
0	1	1	3	7	17	41	99	239	...
1	0	1	2	5	12	29	70	169	...

b) Das Entstehen eines regulären Fünfecks aus einem "Fünfeckkeim"

Wir gehen aus von einem regulärem Fünfeck mit den Seiten s und der Diagonale d:



Figur XIV

Es sei $BD = d$
und $AB = s$

wobei $s = AB = AG = GD$ ist.

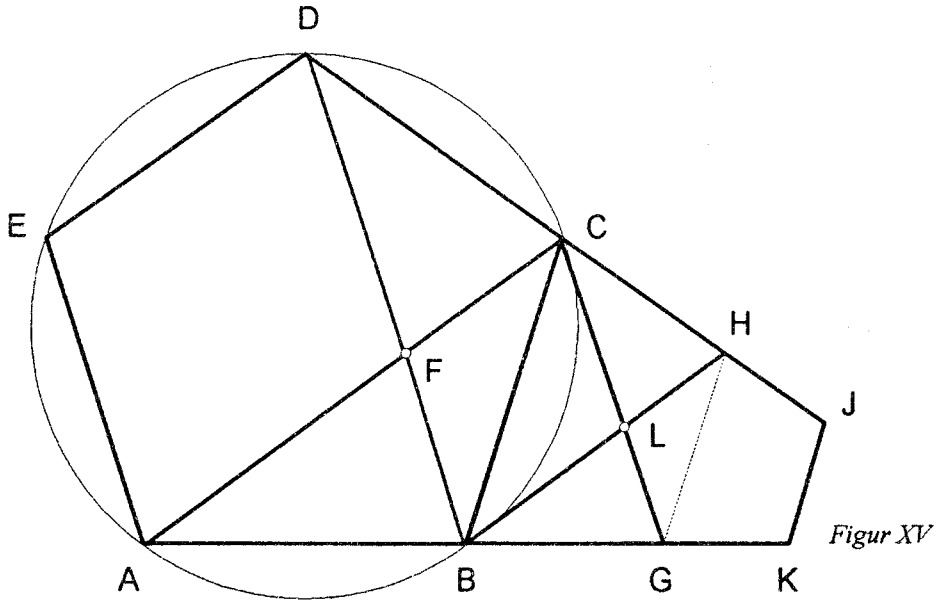
Da die beiden Dreiecke BGA und ABD ähnlich sind, folgt:

$$\frac{d-s}{s} = \frac{s}{d}$$

oder

$$\boxed{d(d-s) = s^2} \qquad \text{XI}$$

Im Folgenden lagern wir dem Ausgangs-Fünfeck eine Folge immer kleinerer Fünfecke F_n an:



Figur XV

F_1 : $ABCDE$

F_2 : $BGHCF$

F_3 : $GKJHL$

$\vdots$

Aus dem Vergleich der Seiten und Diagonalen der Fünfecke F_1 und F_2 ergeben sich unmittelbar die folgenden Beziehungen:

$$s_2 = d_1 - s_1$$
$$d_2 = s_1$$

Für die aufeinanderfolgenden Fünfecke F_{n-1} und F_n folgt daraus allgemein:

$$\begin{aligned} s_n &= d_{n-1} - s_{n-1} \\ d_n &= s_{n-1} \end{aligned} \qquad \text{XII}$$

Für alle n ist dabei $\frac{s_n}{d_n}$ = constant = q.

Wir berechnen q mit XII :

$$\frac{s_n}{d_n} = \frac{d_{n-1} - s_{n-1}}{s_{n-1}} = \frac{1 - \frac{s_{n-1}}{d_{n-1}}}{\frac{s_{n-1}}{d_{n-1}}}$$

oder

$$q = \frac{1-q}{q}$$

$$q^2 = 1 - q \qquad \text{also } q = g \approx 0{,}6181 \qquad \text{(Zahl des Goldenen Schnittes)}$$

Im Folgenden tauschen wir die Indizes n und n-1 in Formel XII aus (entsprechend dem Vorgehen auf Seite 31):

$$\begin{aligned} s_{n-1} &= d_n - s_n \\ d_{n-1} &= s_n \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\boxed{\begin{aligned} s_n &= d_{n-1} \\ d_n &= d_{n-1} + s_{n-1} \end{aligned}} \qquad \text{XIIa}$$

Die Formeln XIIa bestimmen das Bildungsgesetz einer Folge von immer größer werdenden Fünfecken. Denkt man sich nun als Keim ein erstes Fünfeck, mit *willkürlich gewählten Seiten und Diagonalen* – z.B. $s_1 = 1$ und $d_1 = 1$ – , so erhält man auf Grund von XIIa eine Folge von immer größer werdenden nicht regulären Fünfecken, die dem Aussehen nach immer regulärer erscheinen.

Arithmetisch bedeutet dies: $q_n = \frac{s_n}{d_n} \to q = g$ für $n \to \infty$. (siehe Anmerkung weiter unten)

Auch hier zeigt sich wieder, daß der durch die Formeln XIIa vermittelte Prozeß stärker ist als die Ausgangswerte.

Dieses "immer regulärer" Aussehen wollen wir nun auch arithmetisch untersuchen. Dazu betrachten wir die Formel XI, die für reguläre Fünfecke gilt und damit auch für die Folge der regulären Fünfecke F_1, F_2, F_3.... Wir fragen uns nun, welchen Charakter der Ausdruck

$$A_n \equiv d_n(d_n - s_n) - s_n^2 \text{ hat.}$$

Aus den Formeln XIIa folgt nach kurzer Rechnung:

$$d_n(d_n - s_n) - s_n^2 = d_{n-1}(s_{n-1} - d_{n-1}) + s_{n-1}^2$$

Abgesehen vom Vorzeichen bleibt also A_n für alle n konstant. Diese Konstante hängt von der Wahl der Ausgangswerte s_1 und d_1 ab. Ist z.B. $s_1 = d_1 = 1$, so hat diese Konstante den Betrag 1. Allgemein gilt in diesem Fall unter Berücksichtigung des Vorzeichens:

$$\boxed{d_n(d_n - s_n) - s_n^2 = (-1)^n} \qquad \text{XIII}$$

Diese Formel läßt sich natürlich auch durch vollständige Induktion direkt beweisen:

1. Für $s_1 = d_1 = 1$ und $n = 1$ ist die Formel richtig.
2. Wir nehmen an, sie sei für $n = \nu - 1$ richtig.

Durch Einsetzen ist zunächst

$$d_{\nu-1}(d_{\nu-1} - s_{\nu-1}) - s_{\nu-1}^2 = (-1)^{\nu-1}.$$

Nach XIIa folgt daraus:

$$s_\nu(s_\nu - d_\nu + s_\nu) - (d_\nu - s_\nu)^2 = (-1)^{\nu-1}$$

$$2s_\nu^2 - s_\nu d_\nu - d_\nu^2 + 2s_\nu d_\nu - s_\nu^2 = (-1)^{\nu-1}$$

$$d_\nu(s_\nu - d_\nu) + s_\nu^2 = (-1)^{\nu-1}$$

$$d_\nu(d_\nu - s_\nu) - s_\nu^2 = (-1)^\nu$$

was zu zeigen war.

Der Grenzwert von q_n für $n \to \infty$ ist natürlich g. Dies folgt auch aus Formel XIII:

Sei $q = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_n}{d_n}$

Dann folgt aus $$1 - \frac{s_n}{d_n} - \frac{s_n^2}{d_n^2} = \frac{(-1)^n}{d_n^2}$$

$$1 - q - q^2 = 0$$

und damit $$q = g\,.$$

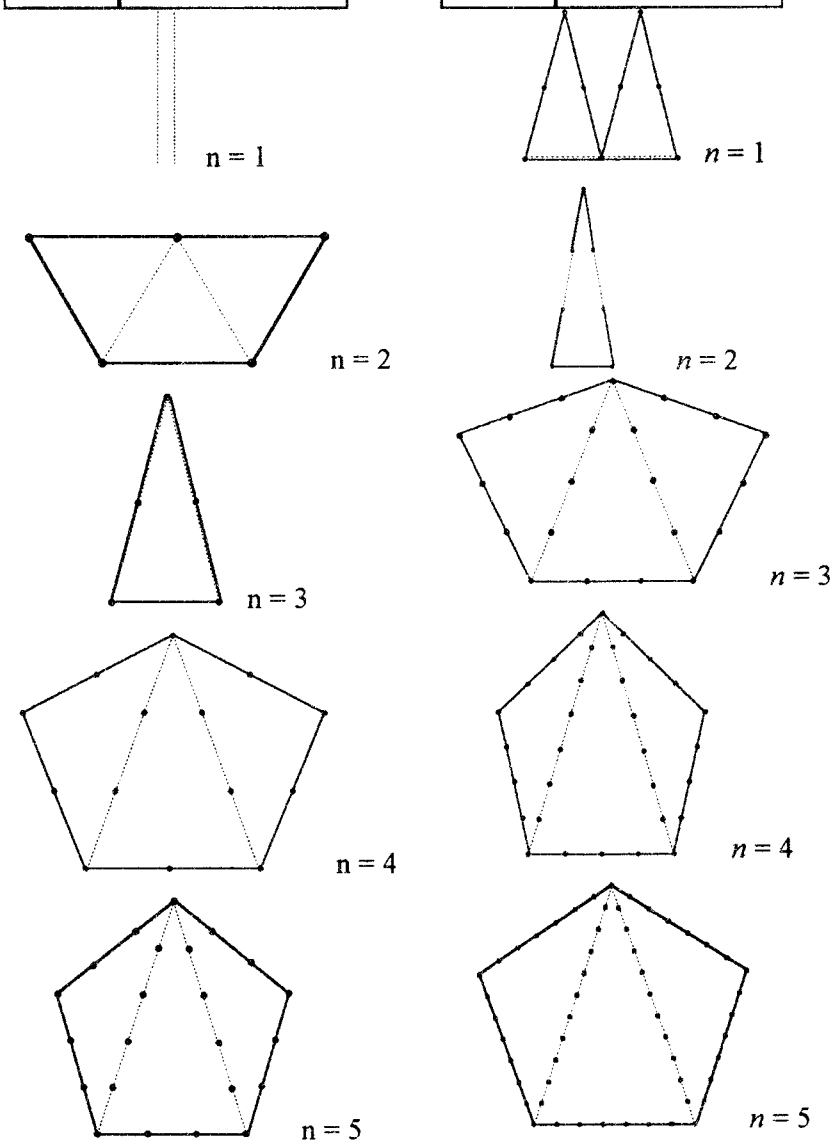
Zum Schluß zeichnen wir, ausgehend von verschiedenen "Keimen" Folgen von Fünfecken, die immer regulärer werden.

1. Beispiel

n	s	d
1	0	1
2	1	1
3	1	2
4	2	3
5	3	5
⋮	⋮	⋮

2. Beispiel

	s	d
1	2	1
2	1	3
3	3	4
4	4	7
5	7	11
⋮	⋮	⋮



Erst hier (für $n = 2$) ist es sinnvoll, von "Keim" zu sprechen.

Auf Seite 30 (3. Bemerkung) deuteten wir an, daß es verschiedenartige unendliche Prozesse gibt. In der Tat lassen sich drei wesentlich verschiedene unterscheiden:

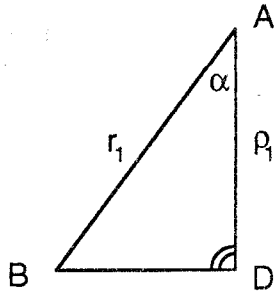
1. Der Prozeß ist wesentlich bestimmt (oder wesentlich mitbestimmt) duch die Ausgangsbedingungen.

2. Der Prozeß als solcher ist stärker als die Ausgangsbedingungen. Die Ausgangsbedingungen sind nur dazu da, den Prozeß als solchen in Gang zu setzen. Das Ergebnis selbst ist unabhängig von den Ausgangsbedingungen.

3. Der Prozeß ist auf sensible Weise durch die Ausgangsbedingungen bestimmt. Solche Prozesse spielen in der Chaostheorie eine Rolle: kleinste Unterschiede in den Anfangsbedingungen können zu wesentlichen verschiedenen Ergebnissen führen.

6. Rekursive Rechengrundlagen der Trigonometrie

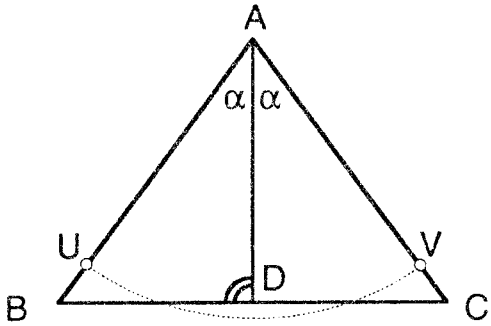
6. 1. Grundlagen



FigurXVI

Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABD mit der Hypothenuse $AB = r_1$ und der Kathete $AD = \rho_1$ (vgl. Figur XVI). Im Folgenden wollen wir zeigen, daß der Winkel $\alpha \sphericalangle BAD$ rekursiv berechnet werden kann. Das Verfahren gestattet darüber hinaus die Berechnung eines beliebig genauen Näherungswertes der Kreiszahl π.

Wir bezeichnen die zweite Kathete BD mit $\frac{s}{2}$. Dann spiegeln wir das Dreieck ABD an AD und erhalten so das gleichschenklige Dreieck ABC.



Figur XVII

Nun biegen wir die Strecke $BC = s$ in einen Kreisbogen UV gleicher Länge um, dessen Zentriwinkel 2α ist.

Dabei ergibt sich die Frage nach den Radius $R = AU = AV$ des Kreissektors. Angenommen, wir hätten den Radius von R ermittelt, dann läßt sich damit der Winkel α unmittelbar berechnen:

Es ist zunächst: $\dfrac{s}{2R\pi} = \dfrac{2\alpha}{360°}$ mit $\dfrac{s}{2} = \sqrt{r_1^2 - \rho_1^2}$

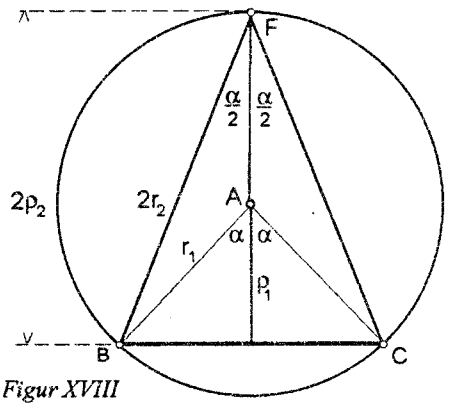
Daraus folgt:

$$\boxed{\alpha = \frac{180°}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{r_1^2 - \rho_1^2}}{R} \qquad \text{XIV}} \quad \text{mit } r_1 > \rho_1$$

Im Folgenden werden zu dieser Berechnung einige Voraussetzungen zusammengestellt, die wir an der Figur ablesen können (vgl. auch die Figur II auf Seite 7): Es ist zunächst:

$$\rho_2 = \frac{r_1 + \rho_1}{2} \qquad \text{und} \qquad 4r_2^2 = 2r_1 \cdot (r_1 + \rho_1) \qquad \text{(Kathetensatz)}$$

Zur Berechnung des Radius R verfolgen wir die Idee einer Annäherung des Bogens $UV = s$ durch einen sukzessiv verfeinerten Polygonzug.



Figur XVIII

Daraus ergeben sich die Rekursionsformeln

$$\rho_2 = \frac{r_1 + \rho_1}{2} \qquad \text{arithmetische Mittelbildung}$$

$$r_2 = \sqrt{r_1 \cdot \rho_2} \qquad \text{geometrische Mittelbildung}$$

Dadurch kann ein algorithmischer Rechenprozeß spezieller Art in Gang gesetzt werden, der durch die beidenRekursionsformeln [6]

---

[6] vgl. auch Abschnitt 1.2.

Daraus ergeben sich die Rekursionsformeln

$$\rho_{2n} = \frac{r_n + \rho_n}{2} \quad \text{III} \qquad \text{und} \qquad r_{2n} = \sqrt{r_n \cdot \rho_{2n}} \quad \text{IV}$$

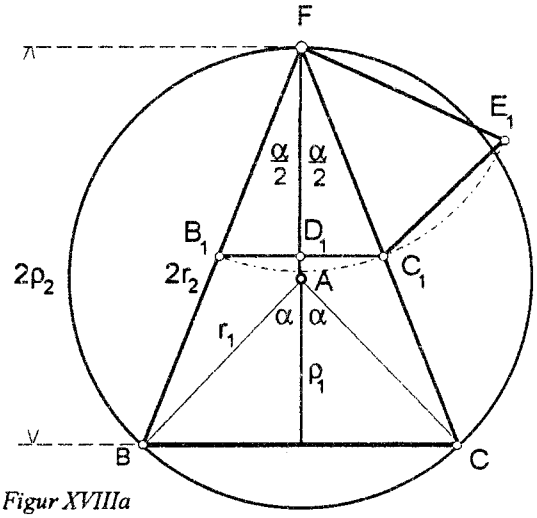
bestimmt ist. Wir wollen nun zeigen, daß mit diesen Rekursionsformeln der Radius R des beschriebenen Kreissektors berechnet werden kann. Im Abschnitt 2 haben wir gezeigt, daß für den Fall $\rho_1 < r_1$ die Folgen III und IV gegen den gleichen Grenzwert R konvergieren. An einem konkreten Beispiel kann man sich diese Tatsache noch einmal vergegenwärtigen.

$$\left(\frac{s}{2} = \sqrt{r_1^2 - \rho_1^2} = 3\right)$$

ρ_1	=	4	r_1	=	5
ρ_2	=	4,5	r_2	=	4,74342...
ρ_4	=	4,62171...	r_4	=	4,68217...
ρ_8	=	4,65194...	r_8	=	4,66703...
ρ_{16}	=	4,65948...	r_{16}	=	4,66325...
ρ_{32}	=	4,66137...	r_{32}	=	4,66231...
ρ_{64}	=	4,66184...	r_{64}	=	4,66207...
ρ_{128}	=	4,66196...	r_{128}	=	4,66201...

Also R = 4,6620 auf 4 Dezimalstellen genau.

Nun konstruieren in einem ersten Schritt die Annäherung des Bogens UV durch einen Polygonzug:

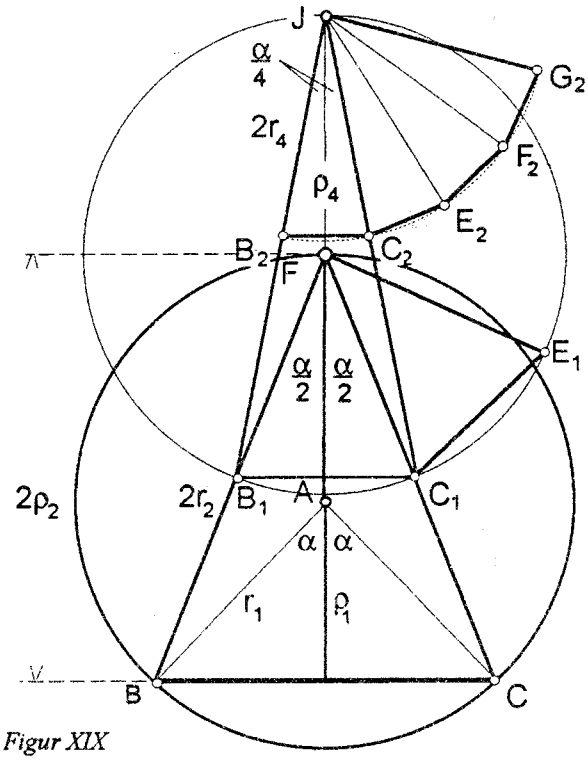


Figur XVIIIa

Zunächst verkleinern wir das Dreieck FBC im Verhältnis 2:1 und erhalten so das Dreieck FB_1C_1 mit dem Winkel $\sphericalangle B_1FC_1 = 2 \cdot \frac{\alpha}{2} = \alpha$. Dabei ist $D_1F = \rho_2$, $B_1F = r_2$ und $B_1C_1 = \frac{s}{2}$. Spiegeln wir das Dreieck FB_1C_1 an FC_1, so erhalten wir das kongruente Dreieck FC_1E_1.

Ingesamt hat dann der Polygonzug $B_1C_1 + C_1E_1$ die Länge s bei zugehörigem Zentriwinkel $\sphericalangle B_1FE_1 = 2\alpha$. Die gesuchte Annäherung des Kreisbogens durch einen Polygonzug ist also in einem ersten Schritt vollzogen.

Dabei läßt sich r_2 als erster Näherungswert für R aus den Formeln III und IV berechnen. Den so eingeschlagenen Weg verfolgen wir nun konsequent weiter. Die Figur XIX soll noch den nächsten Schritt verdeutlichen.



Figur XIX

Es gelten dabei folgende Beziehungen:

$$\rho_4 = \frac{r_2 + \rho_2}{2} \quad ; \quad r_4 = \sqrt{r_2 \cdot \rho_4}$$

für den Polygonzug:

$$B_2C_2 + C_2E_2 + E_2F_2 + F_2G_2 = s$$

für den Zentriwinkel:

$$\sphericalangle\, B_2 J G_2 = 2\alpha$$

Setzen wir den Prozeß weiter fort, so ist an-schaulich klar, daß die folgenden Polygonzüge sich immer mehr einem Kreisbogen annähern.

Dabei läßt sich der Radius dieses Kreisbogens durch die Formeln III und IV sukzessive rechnerisch bestimmen.

An dem konkreten Beispiel von Seite 40 wollen wir das Ergebnis unserer Darstellungen auswerten:

$$\rho_1 = 4 \qquad r_1 = 5 \qquad R = 4{,}6620 \qquad \tfrac{s}{2} = \sqrt{r_1^2 - \rho_1^2} = 3$$

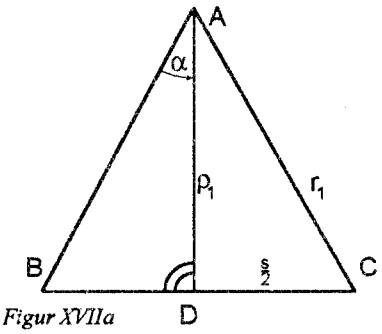
Aus Formel XIV folgt dann:

$$\alpha = \frac{\sqrt{r_1^2 - \rho_1^2}}{R} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{3}{4{,}6620} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 36{,}870^\circ = 36^\circ\ 52'\ 12''$$

Die eingangs gestellte Aufgabe ist also für ein konkretes Beispiel gelöst, und zwar ohne Trigonometrie. Das im vorangehenden Dargestellte führt nun zu interessanten Folgerungen.

6. 2. Folgerungen

1. Der durch die Rekursionformeln III und IV vermittelte Algorithmus gestattet auch eine unmittelbare Berechnung der Kreiszahl π, und zwar beliebig genau. Dazu müssen wir nur von speziellen Dreiecken ausgehen, bei denen wir die Zuordnung der gegebenen Strecken ρ_1 und r_1 zu dem zugehörigen Winkel α unmittelbar kennen. Wir wählen ein solches Dreieck:



Figur XVIIa

$$\sphericalangle\, BAD = \alpha = 30^\circ$$

$$r_1 = 1$$

$$\rho_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\tfrac{s}{2} = \sqrt{r_1^2 - \rho_1^2} = \tfrac{1}{2}$$

Aus Formel XIV folgt dann:

$$\pi = \frac{180^\circ}{\alpha} \cdot \frac{\sqrt{r_1^2 - \rho_1^2}}{R} = 6 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{R} \approx 6 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{0{,}955} = 3{,}1410$$

wobei aus der folgenden Tabelle die Berechnung von R ersichtlich wird:

$\rho_1 =$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$= 0{,}86603$	$r_1 =$	1	$= 1$
$\rho_2 =$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{3}$	$= 0{,}93301$	$r_2 =$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}$	$= 0{,}96593$
$\rho_4 =$	$\frac{1}{8}\left(2+\sqrt{3}+2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)$	$= 0{,}94947$	$r_4 =$	$\frac{1}{4}\sqrt{\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^3}+2\left(2+\sqrt{3}\right)}$	$= 0{,}95766$
$\rho_8 =$		$= 0{,}95356$	$r_8 =$		$0{,}95561$
$\rho_{16} =$	$0{,}95459$	$\approx 0{,}955$	$r_{16} =$	$0{,}95510$	$\approx 0{,}955$

Bemerkung: Für den Unterricht kann Folgendes von Interesse sein: Will man den Winkel α berechnen (bei noch nicht bekannter Kreiszahl π), so setzt man zunächst den Algorithmus der Formeln III und IV wie im vorangehenden Beispiel für ein "sehr spezielles Dreieck" an. Dies führt zur Berechnung der Kreiszahl π. In einem zweiten Schritt läßt sich dann α mit allgemein gegebenen ρ_1 und r_1 nach dem im Prinzip gleichen Algorithmus berechnen.

2. Nun können wir den Seitenverhältnissen im Dreieck ABD Namen, bzw. Bezeichnungen geben. Wenn dies erst jetzt geschieht, hat das den Vorteil, daß der geistigen Anschauung eines Rechenprozesses die Namensgebung bzw. Bezeichnung folgt, nicht umgekehrt. Dies hat schon *K. Kommerell*, der große mathematische Didaktiker so empfohlen.

$$\frac{\rho_1}{r_1} = \cos\alpha \qquad \frac{\frac{s}{2}}{r_1} = \sin\alpha \qquad \frac{\frac{s}{2}}{\rho_1} = \tan\alpha \qquad \frac{\rho_1}{\frac{s}{2}} = \cot\alpha$$

$$\frac{\rho_1}{r_1} = \cos\alpha \qquad \frac{\sqrt{r_1^2-\rho_1^2}}{r_1} = \sin\alpha \qquad \frac{\sqrt{r_1^2-\rho_1^2}}{\rho_1} = \tan\alpha \qquad \frac{\rho_1}{\sqrt{r_1^2-\rho_1^2}} = \cot\alpha$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt dann (für das Beispiel auf Seite 40 mit $r_1 = 5$; $\rho_1 = 4$; $\frac{s}{2} = 3$):

$\frac{4}{5} = 0{,}8 = \cos 36°\,52'$

$\frac{3}{5} = 0{,}6 = \sin 36°\,52'$

$\frac{3}{4} = 0{,}75 = \tan 36°\,52'$

$\frac{4}{3} = 1{,}333 = \cot 36°\,52'$

3. Das beschriebene Verfahren gestattet darüberhinaus für konkret gegebene $\rho_1 < r_1$ einen ganzen Satz von Winkeln samt den zugehörigen natürlichen Werten der trigonometrischen Funktionen zu bekommen. Es ist nämlich, was an den Figuren XVIII und XIX unmittelbar abzulesen ist:

Die eingangs gestellte Aufgabe ist also für ein konkretes Beispiel gelöst, und zwar ohne Trigonometrie. Das im vorangehenden Dargestellte führt nun zu interessanten Folgerungen.

Das beschriebene Verfahren gestattet darüberhinaus für konkret gegebene $\rho_1 < r_1$ einen ganzen Satz von Winkeln samt den zugehörigen natürlichen Werten der trigonometrischen Funktionen zu bekommen. Es ist nämlich, was an den Figuren XVIII und XIX unmittelbar abzulesen ist:

$$\cos\alpha = \frac{\rho_1}{r_1}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\rho_2}{r_2}$$

$$\cos\frac{\alpha}{4} = \frac{\rho_4}{r_4}$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$\cos\frac{\alpha}{2^k} = \frac{\rho_{2^k}}{r_{2^k}}$$

Damit läßt sich schon eine kleine Tabelle für die natürlichen Zahlen der trigonometrischen Funktion cos γ aufstellen, z.B. für $\rho_1 = 4$, $r_1 = 5$ (vgl dazu Tabelle auf Seite 40).

γ	$\alpha = 36°52'$	$\frac{\alpha}{2} = 18°\ 26'$	$\frac{\alpha}{4} = 9°\ 13'$	$\frac{\alpha}{8} = 4°\ 37'$ .....
cos γ	0,8	4,5 : 4,74342 = 0,949	0,987	0,997 .....

Entsprechendes läßt sich für die übrigen Winkelfunktionen durchführen, denn es ist:

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{r_1^2 - \rho_1^2}}{r_1} \qquad \tan\alpha = \frac{\sqrt{r_1^2 - \rho_1^2}}{\rho_1} \qquad \cot\alpha = \frac{\rho_1}{\sqrt{r_1^2 - \rho_1^2}}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{r_2^2 - \rho_2^2}}{r_2} \qquad \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{r_2^2 - \rho_2^2}}{\rho_2} \qquad \cot\frac{\alpha}{2} = \frac{\rho_2}{\sqrt{r_2^2 - \rho_2^2}}$$

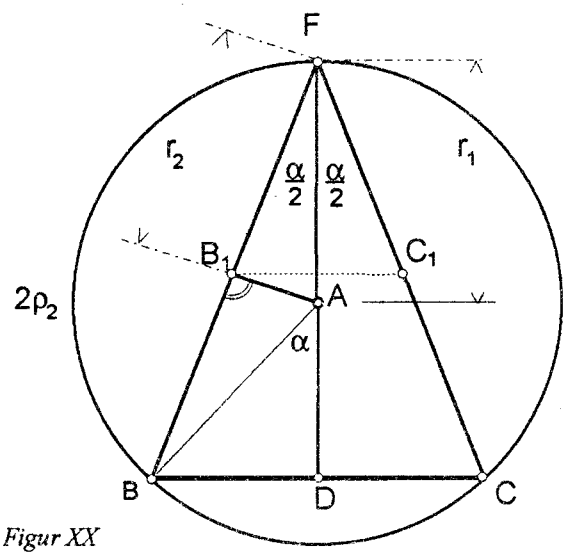
$$\sin\frac{\alpha}{4} = \frac{\sqrt{r_4^2 - \rho_4^2}}{r_4} \qquad \tan\frac{\alpha}{4} = \frac{\sqrt{r_4^2 - \rho_4^2}}{\rho_4} \qquad \cot\frac{\alpha}{4} = \frac{\rho_4}{\sqrt{r_4^2 - \rho_4^2}}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

In der folgenden Tabelle sind für unser Beispiel die Ergebnisse ausgewertet:

γ	$\alpha = 36°52'$	$\frac{\alpha}{2} = 18°\ 26'$	$\frac{\alpha}{4} = 9°\ 13'$
cos γ	0,8	0,949	0,987
sin γ	0,6	0,31623	0,16018
tan γ	0,75	0,33333	0,16228
cot γ	1,33333	3	6,16219

4. Betrifft die Herleitung einer bemerkenswerten Formel von Euler:



Figur XX

Wir gehen aus von der Figur IIa und fällen von A das Lot AB_1 auf die Seite BF (vgl. Figur XX!).

Dann ist $AF = r_1$ und $B_1F = r_2$, d.h.

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{r_2}{r_1}$$

Entsprechendes gilt für die Figur XIX als Ausgangsfigur:

$$\cos\frac{\alpha}{4} = \frac{r_4}{r_2}$$

und weiter

$$\cos\frac{\alpha}{8} = \frac{r_8}{r_4} \quad \text{etc.}$$

Nun ist für die ersten 3 Schritte:

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{4}\cdot\cos\frac{\alpha}{8} = \frac{r_8}{r_1}$$

Allgemein:

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{4}\cdot\cos\frac{\alpha}{8}\cdot\ \cdots\ \cdot\cos\frac{\alpha}{2^k} = \frac{r_{2^k}}{r_1}$$

Weiter ist

$$\lim_{k\to\infty}\frac{r_{2^k}}{r_1} = \frac{R}{r_1}$$

Damit konvergiert auch die linke Seite der vorletzten Gleichung und zwar gegen $\frac{R}{r_1}$.

Damit ist zunächst

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{4}\cdot\cos\frac{\alpha}{8}\cdot\ \cdots\ = \frac{R}{r_1}$$

Weiter folgt mit Gleichung XIV

$$\frac{R}{r_1} = \frac{180^\circ}{\pi\cdot\alpha}\cdot\frac{\sqrt{r_1^2-\rho_1^2}}{r_1} = \frac{\sin\alpha}{\operatorname{arc}\alpha}$$ [7]

Insgesamt erhalten wir also die bemerkenswerte Formel von Euler:

$$\boxed{\operatorname{arc}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{4}\cdot\cos\frac{\alpha}{8}\cdot\ \cdots} \qquad \text{XV}}$$

---

[7] vgl. Figur XVII

5. Wurde für speziell gegebene Ausgangsgrößen $\rho_1 < r_1$ der Algorithmus der Formeln III und IV durchgeführt, so kann man die folgende Frage stellen: Wie läßt sich der Grenzwert R als Funktion der Ausgangsgrößen ρ_1 und r_1 darstellen? Dies wollen wir kurz zeigen:

Aufgrund von Formel XIV ist:

$$R = \frac{180^\circ}{\alpha} \cdot \frac{\sqrt{r_1^2 - \rho_1^2}}{\pi} = \frac{\sqrt{r_1^2 - \rho_1^2}}{\frac{\alpha}{180^\circ} \cdot \pi} = \frac{\sqrt{r_1^2 - \rho_1^2}}{\operatorname{arc}\alpha}$$

Also:

$$\boxed{R = \frac{\sqrt{r_1^2 - \rho_1^2}}{\arccos \frac{\rho_1}{r_1}} \qquad \text{XVIa}}$$

mit mit $\rho_1 < r_1$!

Damit kann die algorithmische Berechnung von R noch anderweitig kontrolliert werden.

6.

$\rho_1 = 8$	$r_1 = 2$
$\rho_2 = 5$	$r_2 = \sqrt{10}$
$\rho_4 = 4{,}08114\ldots$	$r_4 = 3{,}59245\ldots$
$\rho_8 = 3{,}83679\ldots$	$r_8 = 3{,}71261\ldots$
$\rho_{16} = 3{,}77470\ldots$	$r_{16} = 3{,}74353\ldots$
$\rho_{32} = 3{,}75911\ldots$	$r_{32} = 3{,}75131\ldots$
$\rho_{64} = 3{,}75521\ldots$	$r_{64} = 3{,}75338\ldots$
$\vdots \quad \vdots$	$\vdots \quad \vdots$

Es bleibt eine Frage noch offen.[8] Die Konvergenz des Verfahrens mit den Rekursionsformeln II und IV wurde für $\rho_1 < r_1$ nachgewiesen. Was geschieht in dem zunächst nicht geometrisch deutbaren Fall $\rho_1 > r_1$ (z.B. $\rho_1 = 8$, $r_1 = 2$)?

In der Tabelle wurde das Verfahren rein formal für diesen Fall durchgeführt. Das Verfahren scheint also auch in diesem Fall zu konvergieren.

Das ist in der Tat so, denn es kann durch eine kompliziertere Rechenfolge[9] gezeigt werden, daß

$$\lim_{n\to\infty} \rho_{2n} = \lim_{n\to\infty} r_{2n} = R_1$$

wobei

$$\boxed{R_1 = \frac{\sqrt{\rho_1^2 - r_1^2}}{\ln \frac{\rho_1 + \sqrt{\rho_1^2 - r_1^2}}{r_1}} \qquad \text{XVIb}}$$

ist. mit $\rho_1 > r_1$!

Als Ausblick sei nur noch gesagt, daß unser rekursives Verfahren sich erweitern läßt im Hin-blick auf die Berechnung von Logarithmen, worauf schon die Formel XVIb hindeutet. Dieses letztere hat Gauß entdeckt. Eine weitere Fortsetzung dieser Art von Rechnungen führt schließlich zur Berechnung von elliptischen Integralen durch das sog. arithmetisch-geometrische Mittel, wie dies ebenfalls von Gauß schon durchgeführt wurde.[10]

---

8 vgl. auch die erste Bemerkung im Abschnitt 2

9 vgl. nachfolgenden Abschnitt

10 vgl. auch Abschnitt 9.1.

7. Rekursive Rechengrundlagen der Berechnung der Logarithmen

7. 1. Eine Vorbetrachtung

Im Abschnitt 2 haben wir gezeigt, daß der algorithmische Rechenprozeß, den die Formeln III und IV vermitteln, für den Fall $\rho_1 < r_1$ gegen den Grenzwert R konvergiert. Im vorangehenden Abschnitt haben wir diesen Grenzwert ganz allgemein als Funktion seiner Ausgangsgrößen r_1 und ρ_1 ermittelt (vgl. Formel XVIa). Dabei wurde schon das Ergebnis des zunächst geometrisch nicht interpretierbaren Falles $\rho_1 > r_1$ ohne Beweis mitgeteilt (vgl. Formel XVIb)[11].

Zunächst zeigen wir wie sich aufgrund der Formel XVIb die natürlichen Logarithmen aller reellen Zahlen größer als 1 berechnen lassen:

In der Formel
$$R_1 = \frac{\sqrt{\rho_1^2 - r_1^2}}{\ln \dfrac{\rho_1 + \sqrt{\rho_1^2 - r_1^2}}{r_1}} \qquad \text{XVIb}$$

führen wir für ein t > 1 die folgende Substitution durch:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 1 + t^2 \\ r_1 &= 2t \end{aligned} \qquad \text{XVII}$$

Dann folgt daraus zunächst

$$\rho_1 - r_1 = (1-t)^2 > 0,$$

d.h. es ist dann auch $\rho_1 > r_1$.

Durch die Substitution XVII vereinfacht sich die Formel XVIb ganz wesentlich, und zwar ergibt sich durch eine kleine Rechnung

$$R_1 = \frac{t^2 - 1}{\ln t}$$

oder

$$\boxed{\ln t = \frac{t^2 - 1}{R_1} \quad - \quad (t > 1)} \qquad \text{XVIc}$$

Beispiel: Es soll ln 3 berechnet werden. Dann ist in der Formel XVIc $t = 3$. Die Substitutionsformeln XVII ergeben dann weiter:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 1+t^2 = 1+3^2 = 10 \\ r_1 &= 2t \quad = 2 \cdot 3 = 6 \end{aligned}$$

Damit kann nun der Algorithmus der Formeln III und IV durchgeführt werden:

---

11 Die Formeln XVIa und XVIb samt den zugehörigen Algorithmen finden sich in einem Brief von *Pfaff* an *Gauß* vom 8. Dezember 1800 (vgl. *C.F. Gauß*, Gesammelte Werke, Band X_1, Seite 234).

n	ρ_n	r_n
1	10	6
2	8	6,928203230276
4	7,464101615138	7,191162139815
8	7,327631877476	7,259076313954
16	7,29335409571	7,276195019751
32	7,284774557731	7,280483524943
64	7,282629041337	7,281556204118
128	7,282092622727	7,281824408483
256	7,2819585156	7,281891461733
⋮	⋮	⋮

$R_1 \approx 7{,}2819$

Als Ergebnis erhalten wir aufgrund von XVIc und obiger Tabelle:

$$\frac{8}{\rho_{256}} < \ln 3 < \frac{8}{r_{256}}$$

$$\frac{8}{7{,}2819585156} < \ln 3 < \frac{8}{7{,}281891461733}$$

$$1{,}098606 < \ln 3 < 1{,}098616$$

oder unter Berücksichtigung des obigen Näherungswertes für R_1:

$$\ln 3 = \frac{3^2 - 1}{R_1}$$

$$\approx \frac{8}{7{,}2819} = 1{,}0986$$

Die Annäherung entspricht also auf dieser Stufe der Genauigkeit von 4 Dezimalen nach dem Komma.

Bemerkung: Mit ein- und denselben Algorithmen, nämlich denjenigen der Formeln III und IV, lassen sich also die Werte von π, der trigonometrischen Funktionen und der Logarithmen berechnen.

7.2. Beweis der Formel XVIb

Bei diesem Beweis folgen wir Untersuchungen von Gauß aus seinem Nachlaß wie sie durch *K. Kommerell* in seinem Buch "Das Grenzgebiet der elementaren und höheren Mathematik"[12] wiedergegeben sind. Bei diesem Beweis überschreiten wir in der Tat das Grenzgebiet von der elementaren zur höheren Mathematik, wobei es höchst interessant ist, wie Gauß ein derartiges Problem durch eine besondere Substitutionstechnik bewältigt.

---

12 vgl. Literaturhinweis am Ende der Schrift

Wir betrachten also den durch die Formeln III und IV vermittelten rekursiven Prozeß im Falle $\rho_1 > r_1$:

Nach Gauß sind durch die folgenden Substitutionen zwei *positive* Größen u_1 und v_1 bestimmt:

$$\boxed{\rho_1 = \frac{u_1^2+1}{u_1^2-1}\cdot v_1 \qquad r_1 = \frac{2u_1}{u_1^2-1}\cdot v_1 \qquad \text{XVIII}}$$

Daraus folgt

$$\frac{\rho_1}{r_1} = \frac{u_1^2+1}{2u_1}$$

und weiter

$$u_1 = \frac{\rho_1}{r_1} + \sqrt{\frac{\rho_1^2}{r_1^2} - 1} > 1$$

woraus

$$\boxed{v_1 = \sqrt{\rho_1^2 - r_1^2} \quad - \quad > 0} \qquad \text{folgt.} \qquad \text{XIX}$$

Nun wird auf die Größen ρ_1 und r_1 der Algorithmus der Formeln III und IV angewandt:

$$\rho_2 = \frac{\rho_1 + r_1}{2} \qquad r_2 = \sqrt{r_1 \cdot \rho_2} \qquad \text{XX}$$

$$= \frac{u_1+1}{u_1-1}\cdot\frac{v_1}{2} \qquad = \frac{2\sqrt{u_1}}{u_1-1}\cdot\frac{v_1}{2}$$

Setzt man

$$\sqrt{u_1} = u_2 \quad \text{und} \quad \frac{v_1}{2} = v_2,$$

so lassen sich die Terme von ρ_2 und r_2 auf dieselbe Form wie diejenigen von ρ_1 und r_1 bringen:

$$\rho_2 = \frac{u_2^2+1}{u_2^2-1}\cdot v_2 \qquad r_2 = \frac{2u_2}{u_2^2-1}\cdot v_2 \qquad u_2 = \sqrt{u_1} \qquad v_2 = \frac{v_1}{2}$$

Entsprechend geht es weiter:

$$\rho_3 = \frac{u_3^2+1}{u_3^2-1}\cdot v_3 \qquad r_3 = \frac{2u_3}{u_3^2-1}\cdot v_3 \qquad u_3 = \sqrt{u_2} \qquad v_3 = \frac{v_2}{2}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\rho_n = \frac{u_n^2+1}{u_n^2-1}\cdot v_n \qquad r_n = \frac{2u_n}{u_n^2-1}\cdot v_n \qquad u_n = \sqrt{u_{n-1}} \qquad v_n = \frac{v_{n-1}}{2}$$

Im Folgenden sollen die Terme von ρ_n und r_n durch die Größen u_1 und v_1 ausgedrückt werden. Wir gehen zunächst von Beispielen aus, um an ihnen die allgemeinen Bildungsgesetze zu erkennen:

$$u_5 = \sqrt{u_4} = \sqrt[4]{u_3} = \sqrt[8]{u_2} = \sqrt[16]{u_1} = u_1^{\left(\frac{1}{2}\right)^4}$$

$$u_5^{\,2} = u_1^{\left(\frac{1}{2}\right)^3}$$

$$v_5 = \tfrac{1}{2}v_4 = \tfrac{1}{4}v_3 = \tfrac{1}{8}v_2 = \tfrac{1}{16}v_1 = \tfrac{1}{2^4}v_1$$

Es gilt also für alle $n = 2, 3, \ldots$

$$u_n = u_1^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

$$u_n^2 = u_1^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}$$

$$v_n = \frac{v_1}{2^{n-1}}$$

Damit ist also

$$\boxed{\rho_n = \frac{u_1^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}} + 1}{u_1^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}} - 1} \cdot \frac{v_1}{2^{n-1}}} \qquad \boxed{r_n = \frac{2 \cdot u_1^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}}{u_1^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}} - 1} \cdot \frac{v_1}{2^{n-1}}} \quad \text{XXI}$$

Nun interessieren wir uns für die Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} r_n$. Wir erkennen, daß diese Grenzwerte nicht unmittelbar zu finden sind. Die folgende Zwischenbetrachtung wird aber dazu das Rüstzeug geben:

Mit $u_1 > 1$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} u_1^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2^{n-1}]{u_1} = 1$

Für das Folgende hilft uns die Substitution

$$\boxed{1 + \frac{1}{N} = u_1^{\frac{1}{n}}} \quad \text{weiter.} \qquad \text{XXII}$$

Mit $u_1 > 1$ ist dann $N > 0$ und mit wachsendem n wächst dann auch N. Strebt n insbesondere gegen ∞, so tut dies auch N. Aus XXII folgt weiter:

$$\frac{1}{N} = u_1^{\frac{1}{n}} - 1$$

$$\frac{1}{n} \cdot \ln u_1 = \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right)$$

$$n = \frac{\ln u_1}{\ln\left(1 + \frac{1}{N}\right)}$$

Und schließlich ist

$$\boxed{n \cdot \left(u_1^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \frac{1}{N} \cdot \frac{\ln u_1}{\ln\left(1 + \frac{1}{N}\right)} = \frac{\ln u_1}{\ln\left(1 + \frac{1}{N}\right)^N}} \qquad \text{XXIII}$$

Nun setzen wir als bekannt voraus:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \tfrac{1}{N}\right)^N = e \qquad \text{und} \qquad \lim_{N\to\infty} \ln\left(1 + \tfrac{1}{N}\right)^N = \ln e = 1 .$$

Aus Formel XXIII folgt dann schließlich:

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(u_1^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \lim_{N\to\infty} \frac{\ln u_1}{\ln\left(1 + \frac{1}{N}\right)^N} = \ln u_1$$

Damit kann nun die Konvergenz der Folgen ρ_n und r_n bewiesen und ihre Grenzwerte bestimmt werden.

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n = \lim_{n\to\infty} \frac{u_1^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}} + 1}{u_1^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}} - 1} \cdot \frac{v_1}{2^{n-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{u_1^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}} + 1}{2^{n-2} \cdot \left(u_1^{\frac{1}{2^{n-2}}} - 1\right)} \cdot \frac{v_1}{2}$$

$$= \frac{1+1}{\ln u_1} \cdot \frac{v_1}{2}$$

$$= \frac{v_1}{\ln u_1}$$

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot u_1^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}}{u_1^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}} - 1} \cdot \frac{v_1}{2^{n-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{u_1^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}}{2^{n-2}\left(u_1^{\frac{1}{2^{n-2}}} - 1\right)} \cdot v_1$$

$$= \frac{1}{\ln u_1} \cdot v_1 = \frac{v_1}{\ln u_1}$$

Es ist also $\lim_{n\to\infty} \rho_n = \lim_{n\to\infty} r_n = R_1$ (vgl. Abschnitt 6.2).

Aufgrund der Substitutionen XIX ergibt sich nun die Darstellung des Grenzwertes R_1 als Funktion der Ausgangsgrößen ρ_1 und r_1 (mit $\rho_1 > r_1$), was zu zeigen war.

$$R_1 = \frac{v_1}{\ln u_1} = \frac{\sqrt{\rho_1^2 - r_1^2}}{\ln \frac{\rho_1 + \sqrt{\rho_1^2 - r_1^2}}{r_1}}$$

Bemerkung: Vergleicht man die für $\rho_1 < r_1$ und $\rho_1 > r_1$ ermittelten Grenzwerte R, R_1 so ergibt sich mit

$$R = \frac{\sqrt{r_1^2 - \rho_1^2}}{\arccos \frac{\rho_1}{r_1}} = i \cdot \frac{\sqrt{\rho_1^2 - r_1^2}}{\arccos \frac{\rho_1}{r_1}}$$

zunächst

$$\frac{R}{R_1} = i \cdot \frac{\ln \frac{\rho_1 + \sqrt{\rho_1^2 - r_1^2}}{r_1}}{\arccos \frac{\rho_1}{r_1}}.$$

Setzt man nun $R = R_1$, so erhält man eine in der Funktionentheorie bekannte Beziehung, nämlich:

$$\boxed{\arccos \frac{\rho_1}{r_1} = i \cdot \ln \frac{\rho_1 + \sqrt{\rho_1^2 - r_1^2}}{r_1}} \qquad \text{XXIV}$$

TEIL II - FOLGEN UND SKALEN

1. ERGÄNZENDE BEMERKUNGEN ZU DEN BEGRIFFEN "HARMONISCHES MITTEL" UND "HARMONISCH GELEGENE PUNKTE"

1. Wenn die Strecke UU' das harmonische Mittel aus den Strecken AU' und BU' ist, so ist aus der Symmetrie der Figur VII[13] zu vermuten, daß für die Strecke AB Entsprechendes gilt. In der Tat folgt dies schon aus der 2. Bemerkung auf Seite15, indem wir die Beziehung

$$\frac{AU}{BU}=\frac{AU'}{BU'} \quad \text{in die Beziehung} \quad \frac{AU}{AU'}=\frac{BU}{BU'} \text{ umformen.}$$

Wenn wir nun die Buchstaben in den Strecken-Bezeichnungen der letzten Beziehung austauschen, erhalten wir eine Darstellung dieser Beziehung, die mit der ersten in Bezug auf strukturelle Gesichtspunkte verglichen werden kann (Streckenorientierungen von der Art $AU = -UA$ lassen wir zunächst außer acht):

$\frac{AU}{BU}=\frac{AU'}{BU'}$ bedeutet: Die Punkte A, B werden durch die Punkte U, U' harmonisch getrennt. UU' ist das harmonische Mittel aus den Teilstrecken AU' und BU'.

$\frac{UA}{U'A}=\frac{UB}{U'B}$ bedeutet: Die Punkte U, U' werden durch die Punkte A, B harmonisch getrennt. AB ist das harmonische Mittel aus den Teilstrecken UB und $U'B$.

Anders geschrieben: Es ist

$$\frac{AU}{BU}:\frac{AU'}{BU'}=\frac{UA}{U'A}:\frac{UB}{U'B}=-1 \quad \text{(mit Streckenorientierung)}$$

Mit den vier Punkten eines "harmonischen Wurfes" lassen sich also genau zwei verschiedene harmonische Mittel bilden, welche über die vier Punkte nicht hinausführen. Ein über diese Punkte hinausführender Prozeß wurde im ersten Teil, Abschnitt 4.2 genauer beschrieben.

Wenn wir das Ganze rein rechnerisch beweisen wollen, dann stellt sich zunächst die Frage, ob das harmonische Mittel h aus den Strecken UB und $U'B$ identisch ist mit der Strecke AB. Dies ist nun leicht zu zeigen. Der Figur VII entnehmen wir zunächst die folgenden Beziehungen:

$$AU' = BU' - AB$$
$$UU' = BU' - BU.$$

Außerdem ist aufgrund der Voraussetzung UU' harmonisches Mittel aus AU' und BU', d.h.

$$UU' = \frac{2AU' \cdot BU'}{AU' + BU'}.$$

Mit diesen Substitutionen läßt sich die obige Beziehung in eine solche für AB umformen, was im folgenden Rechengang angedeutet werden soll:

---

13 siehe Seite 14

$$U' = BU' - BU = \frac{2(BU' - AB)\cdot BU'}{BU' - AB + BU'}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$AB(BU + BU') = 2BU'\cdot BU$$

$$AB = \frac{2BU\cdot BU'}{BU + BU'} = \quad h \qquad q.e.d.$$

b. Die beiden harmonischen Mittel UU' und AB haben im allgmeinen nicht die gleichen Werte. Es erhebt sich die Frage, ob sie in speziellen Fällen doch gleiche Werte haben können. Die gleiche Frage stellt sich auch für die am Anfang der 2. und 3. Bemerkung auf Seite 15 beschriebenen Teilverhältnisse. Diesen Fragenkomplex wollen wir noch etwas genauer untersuchen und die Ergebnisse zusammenfassen.

An der Figur VII lesen wir zunächst die folgenden Beziehungen ab

$$AU = p \qquad BU = q \qquad AB = p + q$$

Damit ist

$$\frac{AU}{BU} = \frac{AU'}{BU'} = \frac{p}{q}.$$

Aus

$$AB = \frac{2BU\cdot BU'}{BU + BU'}$$

folgt dann weiter:

$$p + q = \frac{2q\cdot BU'}{q + BU'} \qquad \text{oder} \qquad BU' = \frac{q\cdot(p+q)}{q-p}$$

Aus $AU' = \frac{p}{q}\cdot BU'$ folgt schließlich: $AU' = \frac{p\cdot(p+q)}{q-p}$.

Damit lassen sich nun alle vier paarweise möglichen Teilverhältnisse und die beiden harmonischen Mittel hinsichtlich ihrer Werte vergleichen:

1.) $\frac{AU}{BU} = \frac{AU'}{BU'} = \frac{p}{q}$ und $\frac{AU}{AU'} = \frac{BU}{BU'} = \frac{q-p}{p+q}$ je zwei gleiche Teilverhältnisse

2.) $UU' = \frac{2pq}{q-p}$ und $AB = p + q$ zwei verschiedene harm. Mittel

Nun betrachten wir die möglichen Sonderfälle. Sie gibt es tatsächlich, und zwar, wenn $p = q\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)$ ist, was leicht nachzuprüfen ist.

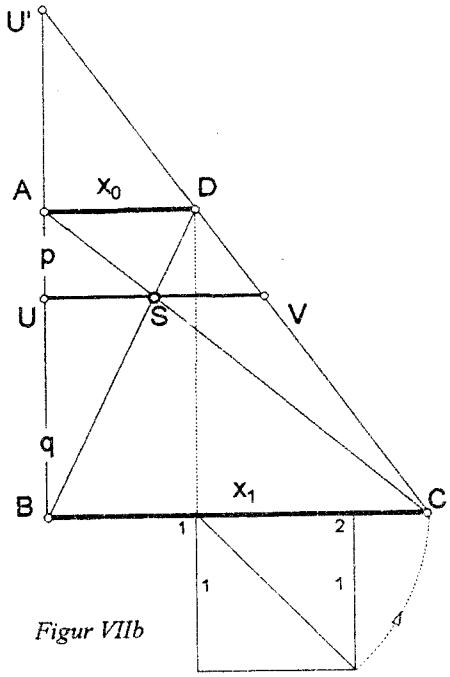
In diesen Fällen ist

$$\frac{p}{q} = \frac{q-p}{p+q} = \sqrt{2} - 1,$$

das heißt, die in Frage kommenden vier Teilverhältnisse haben alle den gleichen Wert. Demzufolge trifft dies auch für die beiden harmonischen Mittel zu, denn es ist in diesem Fall auch

$$\frac{2pq}{q-p} = p + q \qquad \text{oder } UU' = AB$$

In der folgenden Zeichnung ist das Prinzip des Sonderfalls gezeichnet bzw. konstruiert:



Figur VIIb

$$\frac{AU}{BU}=\frac{AU'}{BU'}\overset{!}{=}\frac{AU}{AU'}=\frac{BU}{BU'}=\frac{\sqrt{2}-1}{1}=\frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

$$UU'=AB$$

Konstruktionsdaten:

$$AD=x_0=1$$

$$BC=x_1=1+\sqrt{2}$$

so daß $\frac{x_0}{x_1}=\frac{p}{q}=\frac{1}{1+\sqrt{2}}$

Außerdem wurde $AB=p+q=2$ frei bestimmt.

Dann ist $\frac{AU}{BU}=\frac{1}{1+\sqrt{2}}$, $UU'=AB=p+q=2$

und $UV=m_h=\frac{2x_0x_1}{x_0+x_1}=\sqrt{2}$.

Bemerkung die Symmetrie der Figur VIIb betreffend:

Es ist $BU=AU'$

2. Arithmetische, geometrische und harmonische Folgen und die drei sie konstituierenden klassischen Mittelbildungen

Die drei klassischen Mittelbbildungen konstituieren drei wesentliche verschiedene Folgen, für die wir zunächst einige Beispiele geben wollen (mit n = 0, 1, 2, ... für alle Folgen):

Arithmetische Folgen:

$$a_n=1+n \quad\rightarrow\quad a_n=1,2,3,4,\ldots$$

$$b_n=\frac{1}{9}+\frac{4}{45}n \quad\rightarrow\quad b_n=\frac{1}{9},\frac{1}{5},\frac{13}{45},\frac{17}{45},\frac{7}{15},\frac{5}{9},\frac{29}{45},\ldots$$

Geometrische Folgen:

$$c_n=2^n \quad\rightarrow\quad c_n=1,2,4,8,16,\ldots$$

$$d_n=\frac{8}{9}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n \quad\rightarrow\quad d_n=\frac{8}{9},\frac{3}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{9},\frac{4}{27},\frac{8}{81},\ldots$$

Harmonische Folgen

$$e_n=\frac{1}{1+n} \quad\rightarrow\quad e_n=1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\ldots$$

$$f_n=\frac{8}{8+n} \quad\rightarrow\quad f_n=1,\frac{8}{9},\frac{4}{5},\frac{8}{11},\frac{2}{3},\frac{8}{13},\frac{4}{7},\ldots$$

$$g_n=\frac{4}{1+3n} \quad\rightarrow\quad g_n=4,1,\frac{4}{7},\frac{2}{5},\frac{4}{12},\frac{1}{4},\ldots$$

$$h_n=\frac{10}{10-n} \quad\rightarrow\quad h_n=1,\frac{10}{9},\frac{5}{4},\frac{10}{7},\frac{5}{3},2,\frac{5}{2},\frac{10}{3},5,10,\overset{!}{\infty},-10,-5,\ldots$$

2. 1. Erste Charakterisierung der Folgen:

Jedes Glied einer Folge ist entsprechendes Mittel aus den spiegelbildlich zu ihm gelegenen Folgengliedern. Für das Folgende seien ganz allgemein x_n, y_n und z_n solche Mittelglieder.

Für die arithmetischen Folgen gilt:

$$m_a = x_n = \frac{x_{n-m} + x_{n+m}}{2} \quad \text{mit } m \leq n;$$

im Falle $x_n = a_n$ ist z.B.

$$a_4 = 5 = \frac{a_2 + a_6}{2} = \frac{3+7}{2}.$$

Für die geometrischen Folgen gilt:

$$m_g = y_n = \sqrt{y_{n-m} \cdot y_{n+m}} \quad \text{mit } m \leq n;$$

also im Falle $x_n = d_n$ ist z.B.

$$d_3 = \frac{1}{3} = \sqrt{a_0 \cdot a_6} = \sqrt{\frac{9}{8} \cdot \frac{8}{81}}$$

Für die harmonische Folgen gilt:

$$\frac{1}{m_h} = \frac{1}{z_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z_{n-m}} + \frac{1}{z_{n+m}}\right) \qquad \text{mit } m \leq n;$$

also im Falle $x_n = g_n$ ist z.B.:

$$\frac{1}{g_3} = \frac{5}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_5}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{4}{1}\right)$$

2.2. Zweite Charakterisierung der Folgen:

Alle drei Folgen lassen sich auch durch Bedingungen beschreiben, in denen eine für sie charakteristische Konstante maßgebend ist.

Im Falle der arithmetischen Folge ist

$$x_n - x_{n-1} = \text{const} \qquad \text{für alle } n \geq 1$$

Beispiel:

$$b_n - b_{n-1} = \frac{4}{45} = \text{const.}$$

Im Falle der geometrischen Folge ist:

$$\frac{y_n}{y_{n-1}} = \text{const. für alle } n \geq 1$$

Beispiel:

$$\frac{d_n}{d_{n-1}} = \frac{2}{3} = \text{const.}$$

Im Falle der harmonischen Folge ist:

$$\frac{1}{z_n} - \frac{1}{z_{n-1}} \qquad = \text{const. für alle } n \geq 1$$

Beispiel:

$$\frac{1}{g_n} - \frac{1}{g_{n-1}} = \frac{1+3n}{4} - \frac{1+3(n-1)}{4} = \frac{3}{4} \qquad = \text{const.}$$

2.3. Dritte übergreifende Charakterisierung der drei Folgen

Die ersten beiden Charakterisierungen sind äquivalent zueinander, d.h. die eine folgt aus der anderen. Das läßt sich am zeigen, wenn wir für die drei Folgen eine Formel für das allgemeine Glied ermitteln.

Arithmetische Folgen mit allgemeinem Glied x_n.

Aufgrund der ersten Charakterisierung gilt

$$x_{n-1} = \frac{x_n + x_{n-2}}{2} \qquad \text{für alle } n \geq 2,$$

woraus sich

$$x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2} \quad \text{rekursiv berechnen läßt.}$$

Damit läßt sich x_n aus den Anfangsgliedern x_0 und x_1 der Folge wie folgt ermitteln:

$$\begin{aligned}
x_0 &= x_0 \\
x_1 &= x_1 \\
x_2 &= 2x_1 - x_0 \\
x_3 &= 2x_2 - x_1 = 2(2x_1 - x_0) - x_1 \\
&= 3x_1 - 2x_0 \\
x_4 &= 4x_1 - 3x_0 \\
&\vdots \\
x_n &= nx_1 - (n-1)x_0
\end{aligned}$$

Es ist also: $\quad x_n = nx_1 - (n-1)x_0 \qquad$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$

Aus dieser Formel lassen sich die zuvor für diese Folge gegebenen Charakterisierungen leicht ableiten:

Zur ersten Charakterisierung:

Es ist $\quad x_n - x_{n-1} = x_1 - x_0 \qquad$ = const. für alle $n \geq 1$, oder allgemeiner:

$x_n - x_{n-\nu} = \nu \cdot (x_1 - x_0)$ = const für alle $n \geq 1$ und für ein beliebig, aber fest gewähltes ν $(0 \leq \nu \leq n)$

Zur zweiten Charakterisierung:

Es gelten zunächst die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned}
x_{n+m} &= (n+m)x_1 - (n+m-1)x_0 \\
x_{n-m} &= (n-m)x_1 - (n-m-1)x_0 \\
x_n &= \quad n \;\; x_1 - \;\; (n-1) \;\; x_0
\end{aligned}$$

Damit folgt dann weiter

$$x_{n+m} - x_n = mx_1 - mx_0$$
$$x_n - x_{n-m} = mx_1 - mx_0$$

Es ist also

$$x_{n+m} - x_n = x_n - x_{n-m} \quad \text{oder} \quad x_n = \frac{x_{n-m} + x_{n+m}}{2}$$

Im folgenden seien die charakteristischen Merkmale einer arithmetischen Folge zusammengestellt.

$$x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}$$
$$x_n = nx_1 - (n-1)x_0$$

Zwei allgemeine Bildungsgesetze, rekursiv und explizit

$$x_n - x_{n-v} = v(x_1 - x_0) = \text{const}$$

Invarianz - Gesetz

$$x_n = \frac{x_{n-m} + x_{n+m}}{2}$$

Symmetrie - Gesetz

In Bezug auf die beiden anderen Folgen können wir ganz analog vorgehen. Im folgenden sind die Ergebnisse entsprechend der obigen Gliederung angegeben (im Fall der harmonischen Folgen muß $\frac{z_0}{z_1} = \frac{n-1}{n}$ ausgeschlossen werden.):

geometrische Folgen mit allgmeinem Glied y_n	harmonische Folgen mit allgemeinem Glied z_n
$y_n = \frac{y_{n-1}^2}{y_{n-2}}$	$z_n = \frac{z_{n-1} \cdot z_{n-2}}{2z_{n-2} - z_{n-1}}$
$y_n = \frac{y_1^n}{y_0^{n-1}}$	$z_n = \frac{z_0 \cdot z_1}{nz_0 - (n-1)z_1}$
$\frac{y_n}{y_{n-v}} = \left(\frac{y_1}{y_0}\right)^v = \text{const}$	$\frac{1}{z_n} - \frac{1}{z_{n-v}} = v\left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_0}\right) = \text{const}$
$y_n = \sqrt{y_{n-m} \cdot y_{n+m}}$	$\frac{1}{z_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z_{n-m}} + \frac{1}{z_{n+m}}\right)$

Beispiel: Die Folge d_n beginnt mit den Gliedern $y_0 = \frac{9}{8}$ und $y_1 = \frac{3}{4}$.

Also ist:

$$y_n = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\left(\frac{9}{8}\right)^{n-1}} = \frac{9}{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = d_n$$

und

$$\frac{y_n}{y_{n-1}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{9}{8}} = \frac{2}{3} = \text{const}$$

Beispiel: Die Folge f_n beginnt mit den Gliedern $z_0 = 1$ und $z_1 = \frac{8}{9}$.

Also ist

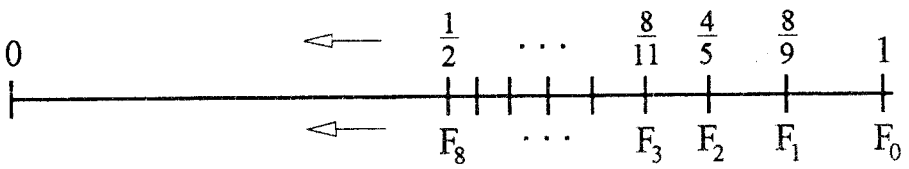
$$z_n = \frac{1 \cdot \frac{8}{9}}{n \cdot 1 - (n-1) \cdot \frac{8}{9}} = \frac{8}{8+n} = f_n$$

und

$$\frac{1}{z_n} - \frac{1}{z_{n-1}} = \left(\frac{1}{\frac{8}{9}} - 1\right) = \frac{1}{8} = \text{const}$$

3. Die den drei Folgentypen entsprechenden Skalentypen

Den drei charakterisierten Folgen lassen sich nun drei verschiedene Typen von Skalen zuordnen, wenn man den einzelnen Werten der Folge Punkte auf einer Skala zuordnet. Für die harmonische Folge f_n sieht das zum Beispiel wie folgt aus:



Entspechend den drei Folgen ergeben sich so drei Typen von Skalen:

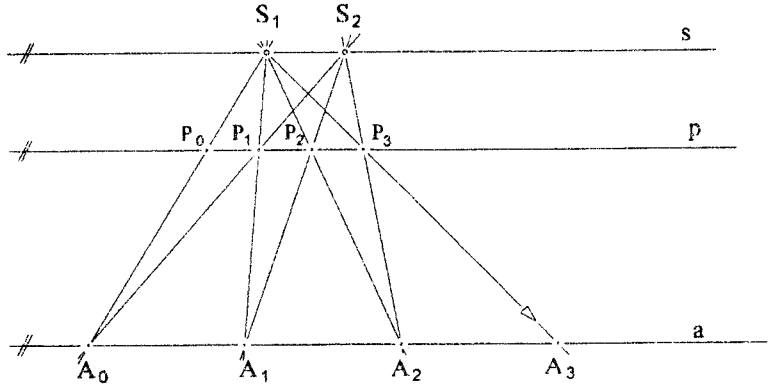
1. Die additive Skala entspricht einer arithmetischen Folge, auch Skale des *Schrittmaßes* genannt.

2. Die multiplikative Skala entspricht einer geometrischen Folge, Skala des *Wachstumsmaßes* genannt.

3. Die harmonische Skala entspricht einer harmonischen Folge. Die obige Skala ist eine solche.

Alle drei Skalen lassen sich in Gedankengänge und Konstruktionen der projektiven Geometrie einordnen. Es ist sehr lehrreich, die entsprechende Literatur über diesen Zusammenhang zu studieren.[14] Wir übernehmen hier einige dieser Ergebnisse und konstruieren jeweils ein Beispiel für die drei Skalentypen:

Die Skala des Schrittmaßes (entsprechend einer arithmetischen Folge x_n):



Hier erkennt man unmittelbar aufgrund der ersten beiden Strahlensätze (mit $a \parallel p \parallel s$):

$$\frac{A_1A_2}{S_1S_2} = \frac{A_1P_2}{P_2S_2} \quad \text{(2. Strahlensatz; Scheitel } P_2\text{)}$$

$$\frac{A_1P_2}{P_2S_2} = \frac{A_1P_1}{P_1S_1} \quad \text{(1. Strahlensatz; Scheitel } A_1\text{)}$$

$$\frac{A_1P_1}{P_1S_1} = \frac{A_0A_1}{S_1S_2} \quad \text{(2. Strahlensatz; Scheitel } P_1\text{)}$$

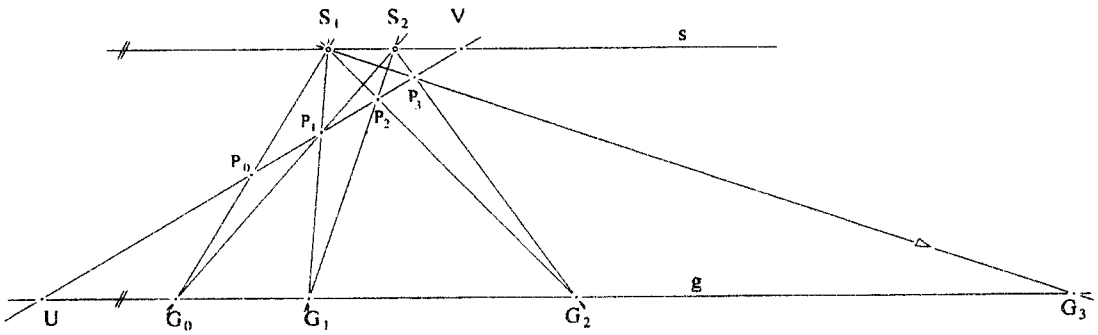
---

14 A. Bernhard; Projektive Geometrie, Stuttgart 1984, Kapitel 14 u. 18
L. Locher-Ernst; Raum und Gegenraum, Dornach 1957, 21. Kapitel (Die drei Urskalen)
R. Ziegler, Mathematik und Geisteswissenschaft, Dornach 1992, Kapitel III (Zur geom. Unendlichkeit)

Damit ist also $A_1A_2 \quad = \quad A_0A_1$

allgemein $A_{n-1}A_n \quad = \quad A_0A_1 \quad = \quad d \quad = \quad const$

Die Skala des Wachstumsmaßes (entsprechend einer geometrischen Folge):



Auch hier erkennt man unmittelbar aufgrund des dritten Strahlensatzes (mit $s \parallel g$):

$$\frac{UG_3}{UG_2} = \frac{VS_1}{VS_2} \qquad \text{(3. Strahlensatz; Scheitel } P_3\text{)}$$

$$\frac{UG_2}{UG_1} = \frac{VS_1}{VS_2} \qquad \text{(3. Strahlensatz; Scheitel } P_2\text{)}$$

Es ist also

$$\frac{UG_3}{UG_2} = \frac{UG_2}{UG_1} .$$

Allgemein:

$$\frac{UG_n}{UG_{n-1}} = \frac{UG_1}{UG_0} = q = const .$$

Die Skala des harmonischen Maßes (entsprechend einer harmonischen Folge):

Für das Folgende benützen wir als Voraussetzung die Resultate aus den Bemerkungen zu Figur VII[15] und die harmonischen Lagebeziehungen, wie sie am vollständigen Viereck (bzw. Vierseit) auftreten [16].

Wie wir gesehen haben ist eine harmonische Folge z_n durch die Anfangswerte z_0 und z_1 bestimmt.[17] Diese Werte bestimmen zusammen mit dem Wert 0 drei Punkte auf der zu konstruierenden Skala, wodurch im projektiven Sinn ein eindeutiger Durchlaufungs-Sinn auf der Skala festliegt. Dabei entspricht die Folge 0, z_0, z_1 dem einen, die Folge 0, z_1, z_0 dem anderen Durchlaufungs-Sinn. Wir beschränken uns hier zunächst auf den Fall $z_1 < z_0$, d.h. z_1 liegt zwischen 0 und z_0 (vgl. die folgende Skizze). In diesem Fall handelt es sich also um eine monoton fallende harmonische Folge. Der zur

---

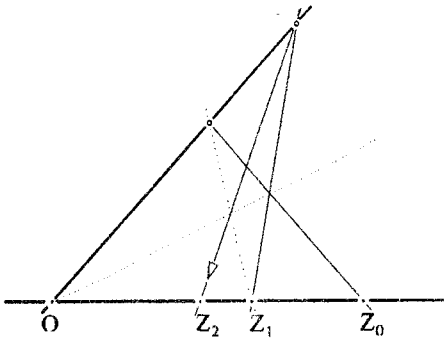
15 siehe Seite 14

16 vgl. dazu z.B. *A. Bernhard*, Projektive Geometrie, Stuttgart 1984, Kapitel 18

17 vgl. Seite 57

konstruierende vierte harmonische Punkt Z_2, der z_2 entspricht, liegt dann zwischen O und Z_1, wobei wir die den Werten z_n entsprechenden Punkte auf der Skala mit großen Buchstaben geschrieben haben und dies weiter so handhaben wollen.

Konstruktionskizze:



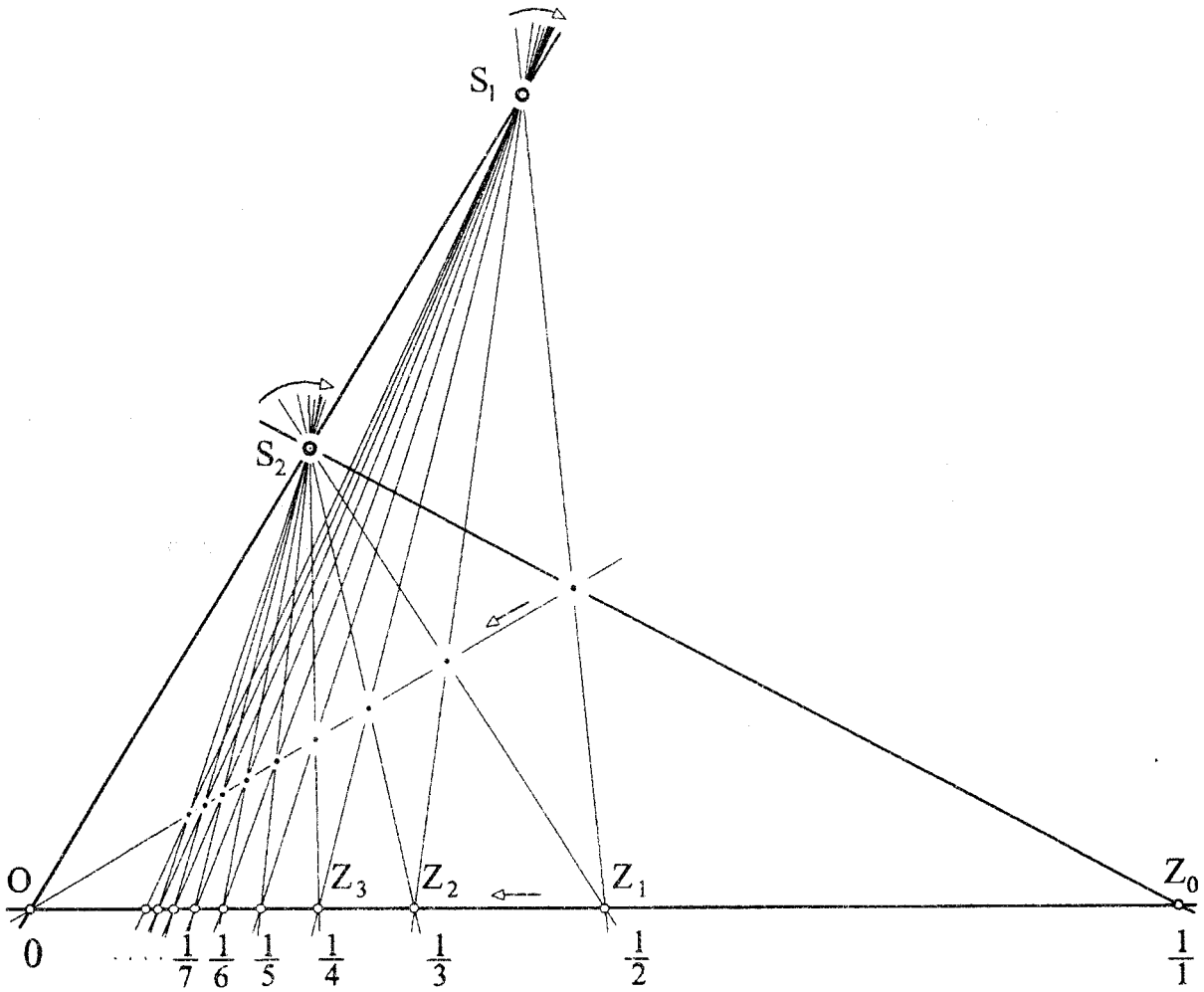
Der Punkt Z_2 wurde so konstruiert, daß

$$\frac{OZ_2}{Z_1Z_2} = (-)\frac{OZ_0}{Z_1Z_0} \text{ ist (mit Streckenorientiertheit),}$$

d.h. die Strecke $0Z_1$ wird innen und außen im gleichen Verhältnis geteilt. Außerdem ist dann OZ_1 das harmonische Mittel aus den Strecken OZ_2 und OZ_0, also

$$OZ_1 = \frac{2 \cdot OZ_0 \cdot OZ_2}{OZ_0 + OZ_2}.$$

Im folgenden wurde die der harmonischen Folge $z_n = e_n = \frac{1}{1+n}$ entsprechende Skala konstruiert. Dabei wurde das zuvor beschriebene Konstruktionsprinzip wiederholt angewandt.



Bemerkungen: Auf die Saitenlänge des Monochords bezogen handelt es sich dabei um die Skala der Obertöne. Stets gilt dann:

$$OZ_n = \frac{2 \cdot OZ_{n-1} \cdot OZ_{n+1}}{OZ_{n-1} + OZ_{n+1}} = \frac{1}{n+1} \text{ für } n = 1, 2, 3, \ldots, \text{ wobei } OZ_0 = 1$$

Bezüglich der zuvor beschriebenen Skala, welche als relative Saitenlängen auf dem Monochord interpretiert den Tönen einer Obertonreihe entspricht, ist noch folgendes bemerkenswert:

n	$z_n = e_n = \frac{1}{n+1}$	Folge harmon. Punktwürfe O, Z_n, Z_{n+1}, Z_{n+2}	Folge der Werte des Teilverhältnispaares $\frac{OZ_{n+2}}{Z_{n+1}Z_{n+2}} = (-)\frac{OZ_n}{Z_{n+1}Z_n}$
0	1	$0 \quad 1 \quad \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{3}$	$2 = 2$
1	$\frac{1}{2}$	$0 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4}$	$3 = 3$
2	$\frac{1}{3}$	$0 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5}$	$4 = 4$
⋮	⋮	⋮	⋮
n	$\frac{1}{n+1}$	$0 \quad \frac{1}{n+1} \quad \frac{1}{n+2} \quad \frac{1}{n+3}$	$n + 2 = n + 2$

Wir entnehmen die elementare Tatsache, daß mit der *harmonischen* Progression der Obertonreihe eine Folge von Teilverhältnissen verknüpft ist, die als *arithmetische* Progression die entspr. Untertonreihe bildet.[18]

Bei der Folge $z_n = h_n = \frac{10}{10-n}$ ist $z_0 = 1$ und $z_1 = \frac{10}{9}$. Hier ist also $z_1 > z_0$. Sehr zu empfehlen ist die Konstruktion einer entsprechenden Skala auch in diesem Fall.

4. Proportionen der Dur-Ton-Intervalle

Die Saite eines Monochords werde z.B. auf den Grundton c gestimmt. Beim Zupfen der Saite schwingt sie dann mit der Frequenz 128 Hz. Bestimmt man nun rein durch genaues Hören die relativen Saitenlängen, die den einzelnen Tonintervallen einer Dur-Tonleiter entsprechen, so führt dies zu einer Dur-Tonskala auf der Saite. Diese Dur-Tonskala mit ihren relativen Saitenlängen hat in Verhältnis-Zahlen geschrieben das folgende Aussehen (reine physikalische Stimmung):

c	1 : 1	Prim
d	8 : 9	große Sekunde
e	4 : 5	große Terz
f	3 : 4	Quarte
g	2 : 3	Quinte
a	3 : 5	große Sext
h	8 : 15	große Septime
c'	1 : 2	Oktave

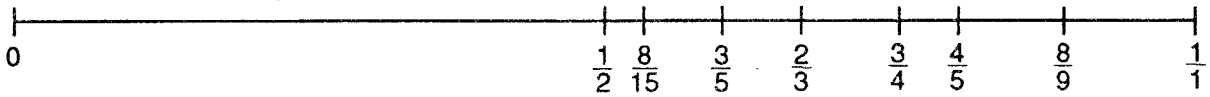
18 vgl. dazu auch Abschnitt 8.

Nun ist 24 das kleinste gemeinsame Vielfache aus den Zählern der obigen Verhältniszahlen, weshalb wir das Ganze in einer fortlaufenden Proportion schreiben können:

$$24 : 27 : 30 : 32 : 36 : 40 : 45 : 48$$

Hier entspricht z.B. der speziellen Proportion 24 : 32 = 3 : 4 die Quart.

Die Skala der relativen Saitenlängen der Dur-Tonskala hat dann folgendes Aussehen:



5. Harmonische Mittelbildungen im Zusammenhang mit der Dur-Tonskala

5.1. Rechnerische Grundlagen

Ausgehend von den drei ersten Intervallen der Dur-Tonskala stellen wir zunächst das folgende fest:

$\frac{8}{9}$ ist das harmonische Mittel von		$\frac{1}{1}$ und $\frac{4}{5}$
$\frac{4}{5}$ "	"	$\frac{1}{1}$ und $\frac{2}{3}$
$\frac{2}{3}$ "	"	$\frac{1}{1}$ und $\frac{1}{2}$

Setzt man diese Reihe (genauer: Folge) im gleichen Sinne fort, dann führt dies auf eine bemerkenswerte Proportionenfolge, welche charakteristische Intervalle der Dur-Tonskala entsprechen. Natürlich ist diese Folge dann keine harmonische Folge im engeren Sinn. Ihr Bildungsgesetz wollen wir jetzt algebraisch fassen. Es sei $z_0 = 1$, z_{n-1} das schon bekannte harmonische Mittel aus z_0 und der gesuchten neuen Verhältniszahl z_n. Dann gilt:

$$z_{n-1} = \frac{2z_0 z_n}{z_0 + z_n} = \frac{2z_n}{1+z_n},$$

woraus sich z_n rekursiv berechnen läßt:

$$z_n = \frac{z_{n-1}}{2 - z_{n-1}} \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

Beispiel:

$$z_{n-1} = \frac{4}{5}$$

$$z_n = \frac{\frac{4}{5}}{1+\frac{4}{5}} = \frac{2}{3}$$

Es ist also:

$$z_2 = \frac{z_1}{2 - z_1}$$

$$z_3 = \frac{z_2}{2 - z_2} = \frac{z_1}{4 - 3z_1}$$

$$z_4 = \frac{z_3}{2 - z_3} = \frac{z_3}{8 - 7z_3}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$z_n = \frac{z_{n-1}}{2 - z_{n-1}} = \frac{z_1}{2^{n-1} - \left(2^{n-1} - 1\right) z_1}$$

Für allgemeine Anfangswerte z_0 und z_1 sieht die Formel wie folgt aus:

$$z_n = \frac{z_0 z_1}{2^{n-1} z_0 - \left(2^{n-1} - 1\right) z_1}$$

wobei: $\frac{z_0}{z_1} \neq \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-1}} < 1$

Mit $z_1 = \frac{8}{9}$ (und $z_0 = 1$) ist dann:

$$z_n = \frac{8}{8+2^{n-1}} = \frac{1}{1+2^{n-4}} \qquad (n = 1,2,3,\ldots)$$

Errechnet man auf diese Weise die Werte der Folge z_n ausgehend von $z_1 = \frac{8}{9}$ (und $z_0 = \frac{1}{1}$), so ergibt sich die folgende Proportionenfolge:

1 : 1	Prim	Erlebbare Intervalle der Dur-Tonskala in einem Bereich von etwas mehr als drei Oktaven. (Stimmumfang der menschlichen Stimme)
⋮		
8 : 9	große Sekunde	
4 : 5	große Terz	
2 : 3	Quinte	
1 : 2	Oktave	
1 : 3	Quinte der Oktave (Duodezime)	
1 : 5	Terz der Doppeloktave	
1 : 9	Sekunde der dreifachen Oktave	
⋮		

Als fortlaufende Proportion geschrieben, sieht dies wie folgt aus:

8 : 9 : 10 : 12 : 16 : 24 : 40 : 72

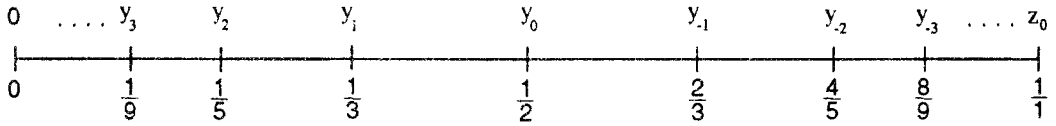
Von den "fehlenden" Intervallen treten die Mollterz, die Quart und die Sext als Unterproportionen auf, bemerkenswerterweise aber nicht die Septime:

Mollterz :	10 : 12 =	5 : 6
Quart :	9 : 12 =	12 : 16 = 3: 4
Sext :	24 : 40 =	3 : 5

Interpretiert man wiederum die obige Proportionenfolge als relative Saitenlängen einer Skala, so erkennt man ihre Symmetrie zur Mitte (Oktave bei $z_4 = \frac{1}{2}$). Eine Indexverschiebung $\nu = n - 4$ bringt dies auch formelmäßig zum Ausdruck. Es ist dann

$$z_n = z_{\nu+4} = \frac{1}{1+2^{\nu}} = y_\nu \qquad \text{für } \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

Die Skala ist also theoretisch "nach vorne" und auch "zurück" erweiterbar. Doch führt dies aus dem Bereich der unmittelbar erlebbaren Intervalle hinaus.



$$\lim_{\nu \to +\infty} \frac{1}{1+2^{\nu}} = 0 \qquad\qquad \lim_{\nu \to -\infty} \frac{1}{1+2^{\nu}} = \frac{1}{1}$$

Entsprechend den vierfachen Charakterisierungen der Folgen auf den Seite 57ff können wir auch hier vier Gesetze für die obige Folge z_n angeben.

$$z_n = \frac{z_{n-1}}{2 - z_{n-1}} \qquad (n = 2, 3, \ldots..)$$

$$z_n = \frac{1}{1+2^{n-4}} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

} Zwei allgemeine Bildungsgesetze, rekursiv und explizit

$$\frac{1-y_\nu}{1-y_{\nu-1}} \cdot \frac{y_{\nu-1}}{y_\nu} = 2 = \text{const}$$ mit $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, ..$ (und $\nu = n-4$) Invarianz - Gesetz (mit Index ν geschrieben)

$$y_0 = \frac{y_\nu + y_{-\nu}}{2}$$ Symmetrie - Gesetz

Bemerkung:

Wenn z_{n-1} das harmonische Mittel von z_0 und z_n ist, dann ist aufgrund der Darstellungen des ersten Abschnittes in Teil II $z_0 - z_n$ harmonisches Mittel von $z_0 - z_{n-1}$ und z_0.[19] Eine Gegenüberstellung beider Folgen zeigt ihre Gegenläufigkeit:

n	$n \to -\infty$	1	2	3	4	5	6	7	8	$n \to +\infty$
z_{n-1}	1;...	$\frac{16}{17}$[20]	$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{9}$...	0
$z_0 - z_n$	0;...	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{16}{17}$...	1

Den Folgen der beiden harmonischen Mittel entsprechen die beiden Durchlaufungssinne der zugehörigen Skala.

5.2. *Verschiedene Konstruktionen einer entsprechenden Skala*

Solche Skalen können sehr schön mit den an der Figur VII entwickelten Konstruktionsprinzipien gezeichnet bzw. konstruiert werden. Bei den folgenden beiden Zeichnungen sind verschiedene Formen der Konstruktion des harmonischen Mittels angewandt worden.

---

19 vgl. dazu die Konstruktionsskizze zu Figur Ia auf Seite 60

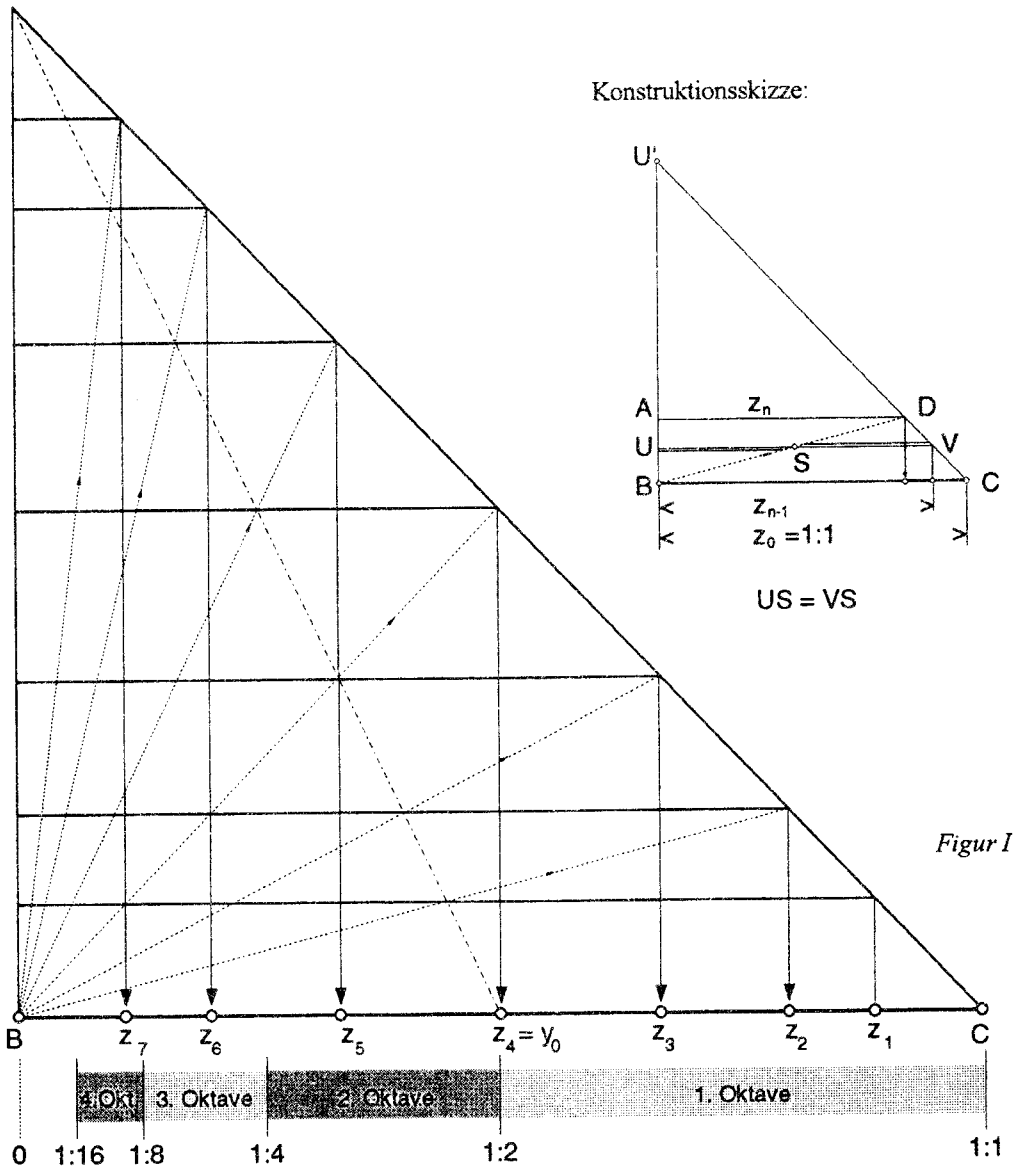
20 Für n = 0 liegt insofern eine Besonderheit vor als für $n = 0$ $z_n = \frac{1}{1+2^{-4}} = \frac{16}{17} \neq 1 = OZ_o$ ist.

1. Konstruktion [21]

Gegeben:		Gesucht:
$z_0 =$	$1 = BC$	$z_n = AD$
$z_1 =$	$\frac{8}{9}$	
$z_2 =$	$\frac{4}{5}$	
$\vdots$	$\vdots$	
$z_{n-1} =$	UV	

Die folgende Konstruktionsskizze zu Figur I zeigt, wie man aus $z_0 = BC$ und $z_{n-1} = UV$ die Strecke $z_n = AD$ so konstruieren kann, daß z_{n-1} harmonisches Mittel von z_0 und z_n ist. Mit $US = VS$ ist dann

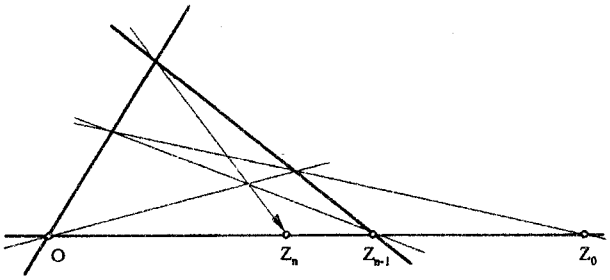
$$z_n = \frac{z_{n-1}}{2 - z_{n-1}} \quad \text{für } n = 2, 3, 4, \ldots$$



Figur I

21 vgl. die Charakteristik der Figur VIIa, auf Seite 14, sowie die anschließenden Bemerkungen

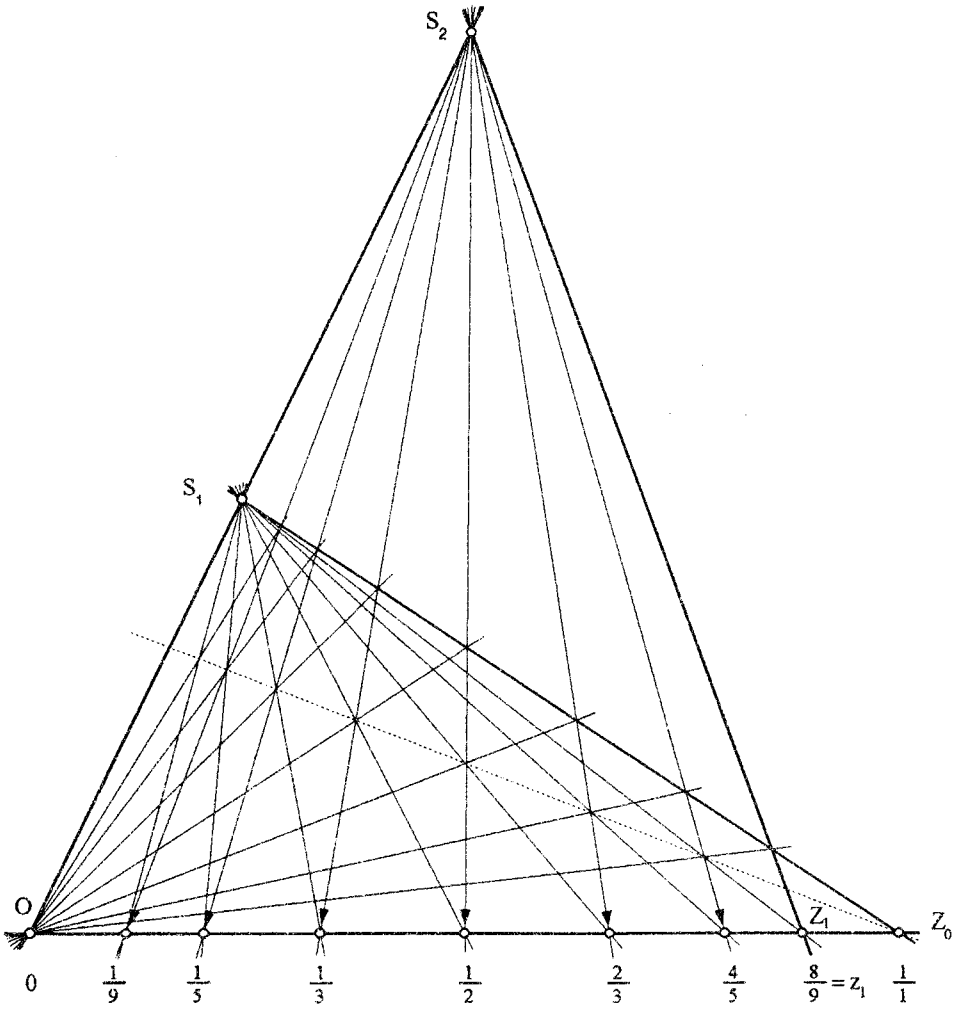
2. Konstruktion



Konstruktionskizze zu Figur Ia:[22]

Gegeben:		Gesucht:
$z_0 =$	$1 = OZ_0$	$Z_n = OZ_n$
$z_1 =$	$\frac{8}{9}$	
$z_2 =$	$\frac{4}{5}$	
$\vdots$	$\vdots$	
$z_{n-1} =$	OZ_{n-1}	

Die nebenstehende Konstruktionsskizze zu Fig. Ia stützt sich auf die dritte Bemerkung zu Figur VII auf Seite 14 und zeigt, wie man aus $z_0 = OZ_0$ und $z_{n-1} = OZ_{n-1}$ die Strecke $z_n = OZ_n$ so konstruieren kann, daß z_n harmonisches Mittel von z_0 und z_n ist. Es ist dann für alle $n = 2, 3, 4, \ldots$ stets $z_n = \frac{z_{n-1}}{2 - z_{n-1}}$.



Figur Ia

Bemerkung: Man vergleiche die Konstruktion mit der Konstruktion der harmonischen Skala (Seite 60).

---

22 vgl. dazu das Konstruktionsprinzip für den vierten harmonischen Punkt Z_n aus den drei gegebenen Punkten O, Z_0 und Z_{n-1} auf Seite 60.

6. Einige Bemerkungen zu der Proportionenfolge $z_n = \dfrac{z_0 z_1}{2^{n-1} z_0 - \left(2^{n-1} - 1\right) z_1}$.

1. Es ist aufschlußreich, die obige Proportionenfolge z_n für verschiedene Anfangswerte z_0 und z_1 zu studieren: Für alle Folgen ist *zunächst* $n = 1, 2, 3 \ldots$.

a.) $z_0 = 1$ (Prim) und $z_1 = \frac{3}{4}$ (Quart) $\rightarrow$ $z_n = \dfrac{3}{3 + 2^{n-1}}$

z_n: $1; \ldots \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \frac{3}{11}, \frac{3}{19}, \frac{3}{35}, \frac{3}{77} \ldots, 0$

b.) $z_0 = \frac{8}{9}$ (Prim) und $z_1 = \frac{4}{5}$ $\rightarrow$ $z_n = \dfrac{8}{9 + 2^{n-1}}$

z_n: $\frac{8}{9}; \ldots \frac{4}{5}, \frac{8}{11}, \frac{8}{13}, \frac{8}{17}, \frac{8}{25}, \frac{8}{41}, \frac{8}{73}, \ldots, 0$

c.) $z_0 = 1$ (Prim) und $z_1 = \frac{5}{6}$ (Moll-Terz) $\rightarrow$ $z_n = \dfrac{5}{5 + 2^{n-1}}$

z_n: $1; \ldots \frac{5}{6}, \frac{5}{7}, \frac{5}{9}, \frac{5}{13}, \frac{5}{21}, \frac{5}{37}, \frac{5}{79}, \ldots, 0$

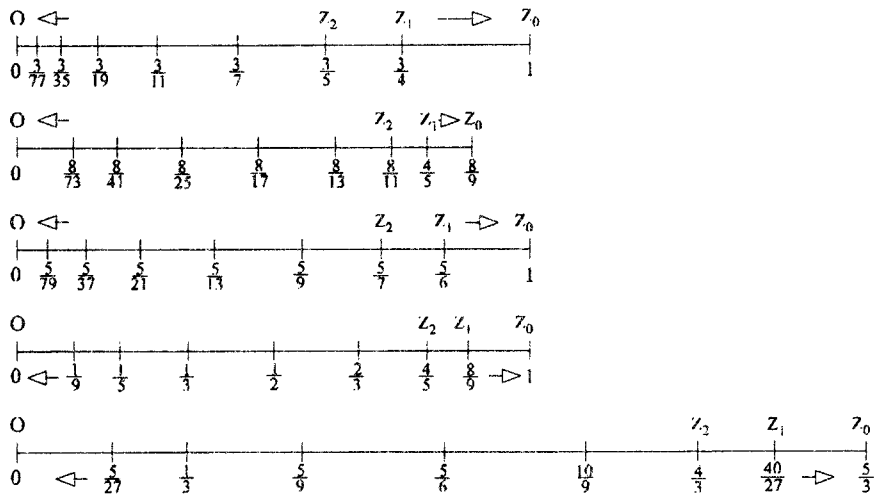
d.) $z_0 = 1$ (Prim) und $z_1 = \frac{8}{9}$ (gr. Sekunde) $\rightarrow$ $z_n = \dfrac{8}{8 + 2^{n-1}} = \dfrac{1}{1 + 2^{n-4}}$

z_n: $1; \ldots \frac{8}{9}, \frac{4}{5}, \frac{2}{3}, \underline{\underline{\frac{1}{2}}}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{9}, \ldots, 0$

e.) $z_0 = \frac{5}{3}$ und $z_1 = \frac{40}{27}$ $\rightarrow$ $z_n = \dfrac{40}{3\left(8 + 2^{n-1}\right)} = \dfrac{5}{3\left(1 + 2^{n-4}\right)}$

z_n: $\frac{5}{3}; \ldots \frac{40}{27}, \frac{4}{3}, \frac{10}{9}, \underline{\frac{5}{6}}, \frac{5}{9}, \frac{1}{3}, \frac{5}{27}, \ldots, 0$

Nun fassen wir einige Eigenschaften dieser Folgen – vor allem im Hinblick auf ihre zugeordneten Skalen – ins Auge. Die Skalen haben entsprechend der obigen Reihenfolge folgendes Aussehen:



Das Konstruktionsprinzip für diese Skalen wurde im vorangehenden Abschnitt 5a genau beschrieben.

2. Betrachtet man die obigen Folgen nicht nur für $n = 1, 2, 3, \ldots$, – wie dies gewöhnlich geschieht – sondern für alle $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, dann liegen die zugeordneten Punkte der Skala alle zwischen den "Grenzpunkten" O und Z_0 der endlichen Strecke OZ_0, wobei sich die Folge der Skalenpunkte gegen die Grenzpunkte hin unbegrenzt verdichtet. Eine solche Skala nennen wir "vollständig".

3. Den Grenzpunkten O und Z_0 entsprechen die Grenzwerte der Folge z_n für $n \to \pm\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{z_0 z_1}{2^{n-1}(z_0 - z_1) + z_1} = 0$$

$$\lim_{n\to-\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{z_0 z_1}{\frac{z_0 - z_1}{2^{n-1}} + z_1} = \frac{z_0 z_1}{z_1} = z_0$$

Es ist dabei zu beachten, daß z_n für $n = 0$ den Skalenwert $\frac{2z_0 z_1}{z_0 + z_1}$ ergibt und nicht etwa z_0 selbst.

4. Unter den fünf angeführten Folgen gibt es solche mit symmetrischem Charakter, d.h. solche, bei denen für irgend ein $n = m \geq 2$ $z_m = \frac{z_0}{2}$ und deshalb auch $z_{m-n'} - z_m = z_m - z_{m+n'}$ (für $n' = 1, 2. .., m - 1$) ist, was leicht zu zeigen wäre. Die Folgen d) und e) haben diese Eigenschaft.

5. Alle überhaupt möglichen symmetrischen Skalen, welche der Ausgangsformel entsprechen, haben die Eigenschaft, daß sie durch proportionale Streckung oder Stauchung auseinander hervorgehen. Es läßt sich zeigen, daß die Folgen, die diesen Skalen zugrunde liegen, das allgemeine Bildungsgesetz

$$z_n = \frac{2^{m-1}}{2^{n-1} + 2^{m-1}} z_0 = \frac{1}{1 + 2^{m-n}} z_0 \quad \text{mit } z_m = \frac{z_0}{2} \quad \text{haben.}$$

z_0 tritt dabei als Proportionalitätsfaktor auf.

6. Führt man in dem letztgenannten Bildungsgesetz eine Indexverschiebung von der Form $\nu = m - n$ durch, so ergibt sich die Nomalform dieser Folgen:

$$z_n = z_{m-\nu} = \frac{z_0}{1 + 2^{\nu}} = y_\nu \qquad \text{für } \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

So gesehen lassen sich die zugeordneten Skalen von der Mitte her (für $\nu = 0$ oder $n = m$) aufbauen.

7. Unter 5.2 haben wir die Skala der Folge $y_\nu = \frac{1}{1+2^\nu}$ bzw $z_\nu = \frac{1}{1+2^{n-2}}$, auf verschiedene Weise konstruiert. Es ist bemerkenswert, daß alle übrigen möglichen symmetrischen Skalen aus dieser "musikalischen Urskala" maßstäblich hervorgehen.

8. Zum Abschluß vergleichen wir noch die Folgen von d) und e):

Folge d) z_n: $1; \ldots \frac{8}{9}, \frac{4}{5}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{9}, \ldots 0$

oder $\frac{8}{8}; \ldots \frac{8}{9}, \frac{8}{10}, \frac{8}{12}, \frac{8}{16}, \frac{8}{24}, \frac{8}{40}, \frac{8}{72}, \ldots 0$

Folge e) z_n: $1; \ldots \frac{40}{27}, \frac{4}{3}, \frac{10}{9}, \frac{5}{6}, \frac{5}{9}, \frac{1}{3}, \frac{5}{27}, \ldots 0$

oder $\frac{27}{27}; \ldots \frac{40}{27}, \frac{40}{30}, \frac{40}{36}, \frac{40}{48}, \frac{40}{72}, \frac{40}{120}, \frac{40}{216}, \ldots 0$

Die daraus resultierenden fortlaufenden Proportionen sind dann für beide Folgen – abgesehen vom Proportionalitätsfaktor 3 – die gleichen:

$$8 : 9 : 10 : 12 : 16 : 24 : 40 : 72 = 24 : 27 : 36 : 48 : 72 : 120 : 216$$

Auch erkennt man unmittelbar, daß die Folge e) – abgesehen vom ersten Glied aus – derjenigen von d) durch Multiplikation mit dem Proportionalitätsfaktor $z_0 = \frac{5}{3}$ hervorgeht.

7. Arithmetische Mittebildung und die Titius-Bode-Reihe

7.1. Rechnerische Grundlagen

Aus dem Bereich der Astronomie kennen wir die sogenannte Titius-Bode-Reihe in der Form $x_n = 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 2^n$ die für folgende Werte von n gilt: $-\infty$, 0, 1, 2, ..., 8. Diese Reihe gibt im heliozentrischen Weltbild die mittleren Planetenabstände von der Sonne in Astronomischen Einheiten (1AE = mittl.Entfernung Erde–Sonne ~ 149.Mill. km) an. Welche Gesetzmäßigkeiten liegen dieser Formel arithmetisch zugrunde? Um dieser Frage näher zukommen, bilden wir eine vergleichbar ähnliche Proportionenfolge wie unter 5.[23], aber jetzt mittels arithmetischer Mittelbildungen: Es sei x_0 und x_1 gegeben ($0 < x_0 < x_1$), x_{n-1} sei das schon bekannte arithmetische Mittel aus x_0 und dem gesuchten x_n. Es ist also

$$x_{n-1} = \frac{x_0 + x_n}{2},$$

woraus sich $x_n = 2x_{n-1} - x_0$ (für $n = 2, 3, 4, ..$) rekursiv berechnen läßt.

Daraus ergibt sich dann weiter die Folge:

$$\begin{aligned}
x_0 &= x_0 \\
x_1 &= x_1 \\
x_2 &= 2x_1 - x_0 \\
x_3 &= 2x_2 - x_0 = 4x_1 - 3x_0 \\
&\vdots \\
x_n &= 2x_{n-1} - x_0 = 2^{n-1}x_1 - \left(2^{n-1} - 1\right)x_0
\end{aligned}$$

Es ist also

$$x_n = 2^{n-1}\left(x_1 - x_0\right) + x_0 \qquad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Bezogen auf die konkreten planetarischen Gegebenheiten ist dann $x_0 = 0{,}4$ (Entfernung Sonne–Merkur) und $x_1 = 0{,}7$ (Entfernung Sonne–Venus), so daß sich daraus die Titius-Bode-Folge $x_n = 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 2^{n-1}$ für $n = 1, 2, 3, \ldots, 9$ ergibt, wobei $x_0 = 0{,}4$ der Grenzwert der Folge x_n für $n \to -\infty$ ist.

Wir bemerken noch ausdrücklich, daß die Folge x_n zwar aus arithmetischen Mittelbildungen hervorgeht, aber als solche keine eigentliche arithmetische Folge ist.

Setzt man für die Planetenläufe um die Sonne Kreisbahnen voraus, dann ergibt sich für die mittleren (kürzesten) Abstände benachbarter Planeten auf ihren Bahnen der jeweilige Abstand zu

$$x_n - x_{n-1} = 0{,}3 \cdot 2^{n-2} \qquad \text{für } n = 2, 3, \ldots, 9\,.$$

Daraus folgt weiter:

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}} = 2:1 \qquad \text{für } n = 3{,}4, \ldots, 9.$$

Es ist bemerkenswert, daß die Titius-Bode Reihe aus einer Folge von solchen speziellen arithmetischen Mittelbildungen hervorgeht. Auch hier lassen sich wieder wie in Abschnitt 5.1 vier charakteristische Merkmale der Folge angeben.

---

23 siehe Abschnitt 5.1.

$x_n = 2x_{n-1} - x_0$
$x_n = 2^{n-1}(x_1 - x_0) + x_0$ Zwei allgemeine Bildungsgesetze, rekursiv und explizit

$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}} = 2 = \text{const}$ für n =3, 4, ...,9 Invarianz - Gesetz

$x_{n-1} = \frac{x_0 + x_n}{2}$ für n = 1, 2, ...,9 Symmetrie - Gesetz

Die letzten beiden Gesetze sind hinsichtlich ihrer Reichweite auf die konkreten planetarischen Gegebenheiten bezogen.

Anmerkung:

Setzt man in der Formel $x_n = 2^{n-1}(x_1 - x_0) + x_0$ für x_0 und x_1 die folgenden Werte ein:

$x_0 = 1 = 1 : 1$ Frequenzverhältnis der Prim

$x_1 = \frac{9}{8} = 9 : 8$ Frequenzverhältnis des Intervalls der gr. Sekunde

so ergibt sich zunächst: $x_n = 1 + 2^{n-4}$ für n = 1, 2, 3, ... und damit eine spezielle uns schon bekannte Intervallfolge der Dur-Ton-Leiter (*als Freqeunz-Verhältnis-Folge*).

x_0	=	1
⋮		⋮
x_1	=	9 : 8
x_2	=	5 : 4
x_3	=	3 : 2
x_4	=	2 : 1
x_5	=	3 : 1
x_6	=	5 : 1
x_7	=	9 : 1
⋮		⋮

Als Ergebnis erkennen wir zweierlei:

1. Die Werte der Freqenzverhältnsfolge sind die Kehrwerte der in Abschnitt 5.1 beschriebenen Folge.
2. Das Bildungsgesetz der Titius-Bode-Folge ist das gleiche wie dasjenige der obigen Folge.

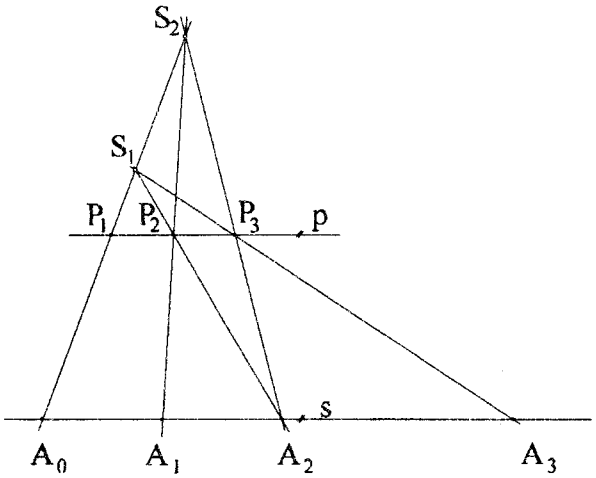
7.2. Tabellarische Vergleiche von Planetenabständen

In der folgenden Tabelle sind in zwei Spalten die *berechneten* Abstände der Planeten von der Sonne im heliozentrischen Weltbild tabelliert, und zwar in Astronomischen Einheiten. Die eine Spalte wurde aufgrund von x_n, die entsprechende andere Spalte aufgrund von $x'_n = g^2 + g \cdot 2^{n-1}$ berechnet, wobei g die Zahl des Goldenen Schnitts ist, die sich aus $g = \frac{1}{1+g}$ berechnen läßt. Zum Vergleich finden sich in einer dritten Spalte die wirklichen mittleren Abstände der Planeten von der Sonne.

n	Planeten -folge	Entfernungen zur Sonne in AE nach Titius-Bode gemäß $x_n = 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 2^n$	Differenzen der Ent-fernungen	Mod. Werte der Entfernung (mittl. Halbachsen)	Entfernung gemäß der Folge $x'_n = g^2 + g \cdot 2^{n-1}$		Entfernungs-differenzen
$-\infty$	☿	0,4		0,387	$g^2 = 1 - g$	0,39	
			0,3				g / 2
0	♀	0,7		0,723	$1 - \frac{g}{2}$	0,69	
			0,3				g / 2
1	♁	1		1	1	1	
			0,6				g
2	♂	1,6		1,524	1+g	1,61	
			1,2				2g
3	Plane-toiden	2,8		2,2 – 3,2	1+3g	2,85	
			2,4				4g
4	♃	5,2		5,203	1+7g	5,33	
			4,8				8g
5	♄	10		9,539	1+15g	10,27	
			9,6				16g
6	♅	19,6		19,191	1+31g	20,16	
			19,2				32g
7	♆	38,8		30,061	1+63g	39,94	
			38,4				64g
8	♇	77,2		39,529	1+127g	79,49	

7.3. Konstruktion der Planetenabstände im Heliozentrischen Weltbild gemäß der Titius-Bode Folge

Das Konstruktionsprinzip gründet sich auf den beschriebenen Rechenprozeß mittels arithmetischer Mittelbildungen, der zur Titius-Bode Folge $x_n = 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 2^n$ führt:



Konstruktiosprinzip mit Skizze:

Voraussetzungen:

$A_0A_1 = A_1A_2$ und $p \| s$

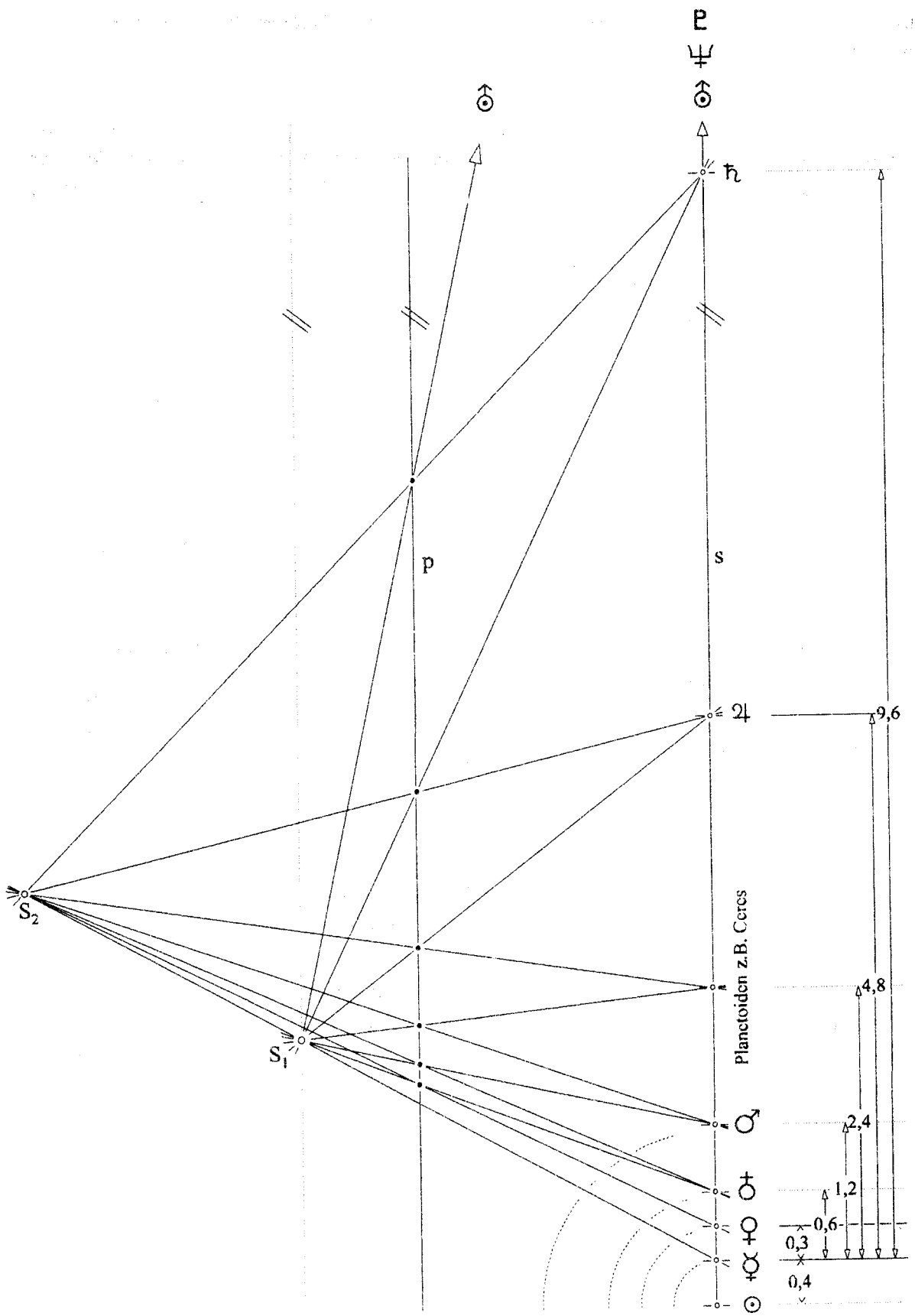
Damit ist

$$\frac{A_0A_1}{A_1A_2} = \frac{P_1P_2}{P_2P_3} \text{ (3. Strahlensatz, Scheitel } S_2\text{)}$$

$$\frac{P_1P_2}{P_2P_3} = \frac{A_0A_2}{A_2A_4} \text{ (3. Strahlensatz, Scheitel } S_1\text{)}$$

woraus

$A_0A_2 = A_3A_4$ etc. folgt.


S2
S1
p
s
Planetoiden z.B. Ceres
9,6
4,8
2,4
1,2
0,6
0,3
0,4

8. Einige historische Hinweise zu den drei klassischen Mittelbildungen, vor allem im Hinblick auf die griechische Harmonielehre:

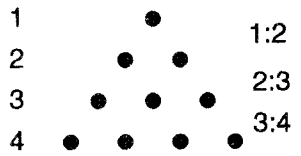
Nach pythagoräischer Auffassung drückt sich die Harmonie der Natur in der Einheit von arithmetischen, geometrischen und musikalischen Proportionen aus. Auf dieser Basis wurden vier mathematische Disziplinen gepflegt (das sogenannte Quadrivium). Diese vier Disziplinen umfaßten Arithmetik, Geometrie, Musik und Astronomie. Kennzeichnend für die griechische Mathematik war das Streben nach Vollkommenheiten. Vollkommenheit bestand nach Auffassung der griechischen Mathematiker in einem inneren Merkmal der Ideen, welche sich vor allem in dem Reichtum an bemerkenswerten "Eigenschaften" manifestiert. Dazu zwei Beispiele:

1. Bei den Pythagoräern nimmt die Tetraktys (Vierheit) der ersten vier Zahlen eine Sonderstellung ein. Addiert man sie, so erhält man die Zahl 10. Von ihr sagt *Speusippos* (um 350 v.Chr.) sie besitze mehrere Merkmale um vollkommen zu sein. Zählen wir einige solche auf:

a. Unter den ersten 10 Zahlen gibt es ebensoviele gerade wie ungerade Zahlen.

b. Die ersten 10 Zahlen enthalten ebensoviele Primzahlen (1, 2, 3, 5, 7,)[24] wie Nicht-Primzahlen (4, 6, 8, 9, 10)

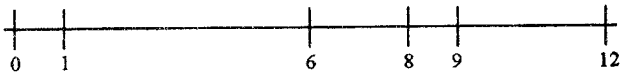
c. Die eingangs beschriebene Einheit drückt sich bei der Tetraktys dadurch aus, daß sie arithmetisch die Zehnzahl erzeugt (1 + 2 + 3 + 4 = 10), geometrisch ein reguläres Dreieck bildet, musikalisch den vier Saiten der Lyra, nämlich Hypate, Mese, Paramese und Nete zugeordnet wird, die auftretenden Proportionen dabei den harmonischen Klängen der Oktave (1:2), Quint (2:3) und der Quarte (3:4) entsprechen.



2. *Euklid* (um 300 v. Chr.) nannte die Einheit von arithmetischen, geometrischen und musikalischen Proportionen *Logos*. Pythagoras konnte am Monochord zeigen, daß die Tetraktys aus den Zahlen 12, 9, 8, 6 eine solche Einheit ist. Der besondere Charakter dieser Einheit zeigt sich durch das Folgende:

Eine Saite des Monochords werde in 12 gleiche Teile als Strecke geteilt. Von der Zahl 12 können nämlich in ganzen Zahlen die Hälfte, Zweidrittel und Dreiviertel gebildet werden, die den verkürzten Längen 6, 8 und 9 der ganzen Saite mit ihrer Länge 12 ensprechen. Dabei ist 9 die arithmetische, 8 die harmonische Mitte zwischen 6 und 12. Den Zahlen 6, 8, 9 und 12 entsprechen im Bereiche einer Oktave die Intervalle (vgl auch gezeichnete Skala):

6 : 12 = 1 : 2	Oktave
8 : 12 = 2 : 3	Quint
9 : 12 = 3 : 4	Quart
12 : 12 = 1 : 1	PrimDazu vier



[24] Heute gehört die Zahl 1 nicht mehr zu den Primzahlen

Bemerkungen:

1. Die durch die Ausgangszahlen a = 6 und b = 12 bestimmten arithmetischen und geometrischen Mittel $m_a = 9$ und $m_h = 8$ bilden die Proportion

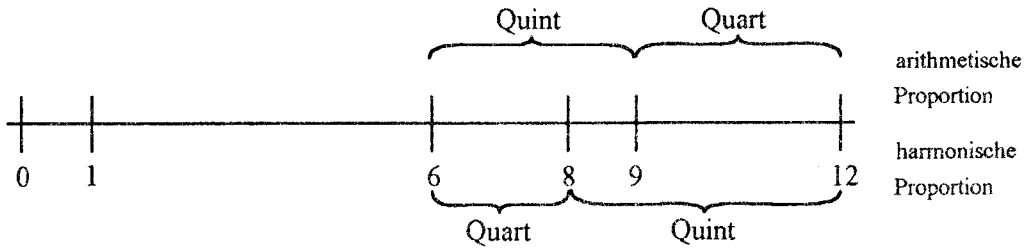
$$9 : 12 = 6 : 8$$

oder $$m_a : b = a : m_h .$$

Damit gilt auch unter Zuhilfenahme des geometrischen Mittels von a und b:

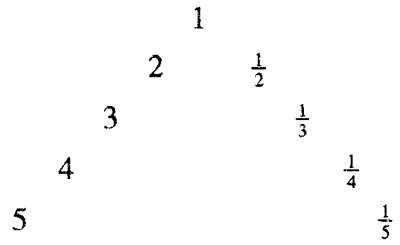
$$m_g^2 = m_a \cdot m_h$$

2. Durch gleichzeitige arithmetische und harmonische Teilung der Oktave erhalten wir auf diese Weise das für alle griechische Musiktheorie grundlegende Quint-Quart-Gerüst auf der Saitenskala:



Hierbei ist noch das Auftreten des Differenzenintervalls 8 : 9 als Ergebnis der beiden Teilungen von Bedeutung. Es entspricht dem Ganzton der großen Sekunde.

3. In seinen Kommentar zur Kleineren Arithmetik des *Nikomachus* (um 400 v.Chr.) schildert *Iamblichus* (300 v.Chr.) eine Figur in Gestalt eines Lambda Λ, das höchstwahrscheinlich schon den Pythagoräern bekannt war. An der Spitze der Figur steht die Einheit, an den beiden Seiten stehen die Zahlenfolgen 2, 3, 4, ... bzw. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$..., die der Untertonreihe, bzw. der Obertonreihe entsprechen.



sog. pythagoräisches Lambdoma

Bei der Folge 1, 2, 3, 4, 5, ... ist jedes Glied das arithmetische Mittel aus seinen symmetrisch zu ihm liegenden "Nachbargliedern". Ganz entsprechendes gilt für die Folge $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$... hinsichtlich des harmonischen Mittels.

In der obigen Form fehlt dem Lambdoma noch seine "Füllung". Diese Füllung kann durch folgenden Prozeß erziehlt werden:

Ausgehend z. B. von einem Ton der Obertonreihe $\frac{1}{n}$ kann eine Untertonreihe in der folgenden Weise gefunden werden:

$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \frac{4}{n}$... (vgl. in der folgenden Figur: von rechts nach links abwärts)

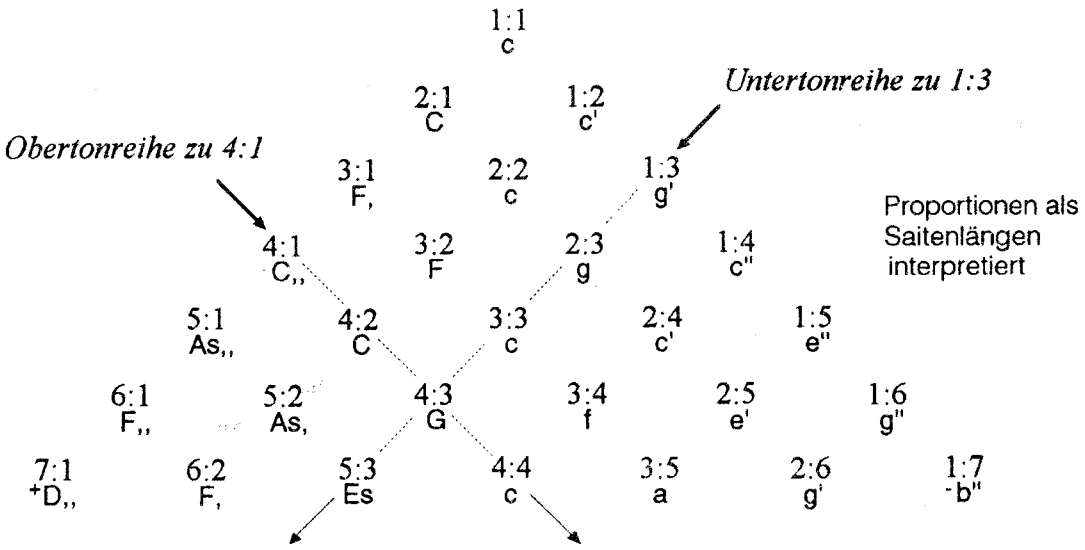
Entsprechend kann man von einem Ton $\frac{v}{1}$ der Untertonreihe ausgehend eine Obertonreihe bilden:

$\frac{v}{1}, \frac{v}{2}, \frac{v}{3}, \frac{v}{4}$... (vgl. in der folgenden Figur: von links nach rechts abwärts)

Man verfolge diese Bildungen als Füllung des Lambdomas in der folgenden vollständigen Figur II [25]:

---

[25] Vgl.: Dr. Hans Kayser, Akróasis, die Lehre von der Harmonik der Welt; Stuttgart 1964



Pythagoräisches Lambdoma bis zum Index 7 entwickelt *Figur II*

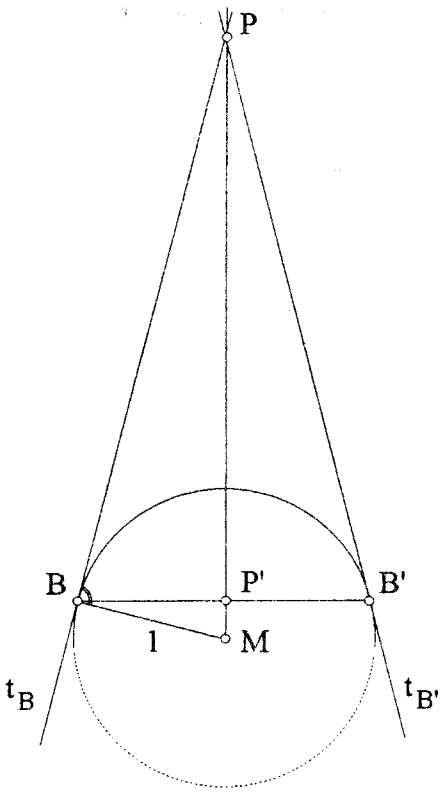
Das Diagramm besteht aus einem Netz von einander kreuzenden Ober- und Untertonreihen und kann so als Darstellung einer natürlichen Ordnung der Töne interpretiert werden. Man braucht dazu nur die Zahlenverhältnisse des Diagrammes als Tonzahlen zu deuten (vgl. obiges Diagramm).

Alle drei klassischen Mittelbildungen kommen in unseren Diagramm vor. Während den Untertonreihen (von rechts oben nach links unten verlaufend) arithmetische, den Obertonreihen (von links oben nach rechts unten verlaufend) harmonische Proportionen zugrunde liegen, bilden die Proportionen der Mittelachse $\frac{n}{n} = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3}$..... das Geichgewicht, indem sie das geometrische Mittel von je zwei in der Horizontalen spiegelbildlich zueinander liegenden Proportionen bilden. (Vgl. auch Bemerkung 4)

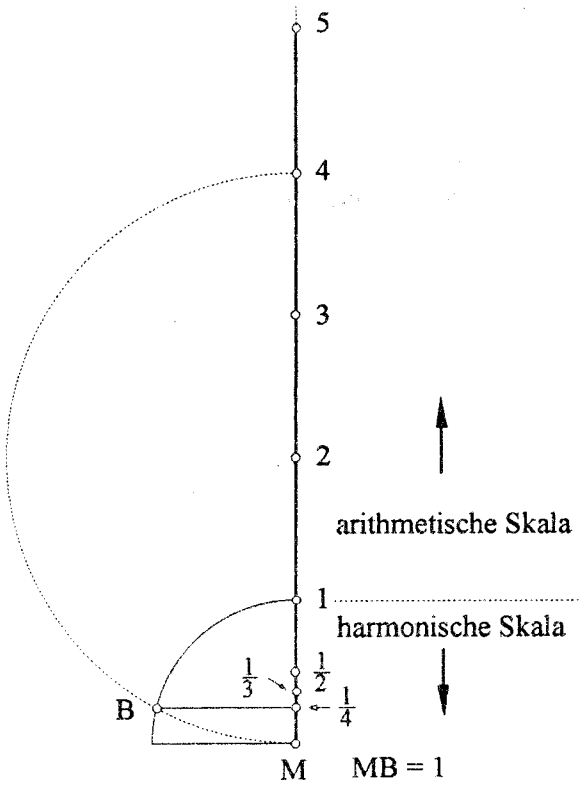
Bemerkenswert ist nun, daß im 19. Jahrhundert das beschriebene Lambdoma von verschiedenen Forschern, und zwar unabhängig voneinander und auf ganz verschiedenen wissenschaftlichen Gebieten entdeckt, ja eigentlich wiederentdeckt wurde:

- Im Gebiet der Harmonik durch *Albert von Thimus* ("Harmonikale Symbolik des Altertums 1868")
- im Gebiet der Mathematik (im Zusammenhang des Beweises der Abzählbarkeit der rationalen Zahlen) durch *Georg Cantor* (1845-1918)
- Im Gebiet der Kristallographie (im Zusammenhang mit der Struktur der Flächenbildung bei Kristallen) durch *Viktor Moritz Goldschmidt* (1888-1947) ("über Complication und Displikation")

4. Unterton- und Obertonskala stehen in einem polaren Verhältnis. Dies kann sehr schön durch eine polar-reziproke Spiegelung am Kreis veranschaulicht werden.



Figur IIa



Figur IIb

Es gilt (vgl. Figur IIa): $MP' \cdot MP = (MB)^2 = 1$ (Kathetensatz)

Aus $MP = n$ folgt dann $MP' = \frac{1}{n}$.

Die beiden Skalen gehen dann durch polar-reziproke Abbildung auseinander hervor. Es ist dann $\sqrt{MP \cdot MP'} = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot n} = 1$. Das ist aber das geometrische Mittel aus zwei zueinander polar-reziproken Skalenpunkten.

9. Prozesse die aus wechselseitigen Beziehungen der drei klassischen Mittelbildungen hervorgehen und weitere Ergänzungen

1. Gegeben seien die Größen x_1 und y_1 mit $x_1 > y_1 > 0$. Jeweils zwei der drei klassischen Mittelbildungen sollen nun für die folgenden drei Prozesse herangezogen werden:

1. Prozeß

$$x_2 = \frac{x_1 + y_1}{2} \qquad y_2 = \frac{2x_1y_1}{x_1 + y_1}$$

$$x_3 = \frac{x_2 + y_2}{2} \qquad y_3 = \frac{2x_2y_2}{x_2 + y_2}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$x_n = \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2} \qquad y_n = \frac{2x_{n-1} \cdot y_{n-1}}{x_{n-1} + y_{n-1}}$$

2. Prozeß

$$x_2 = \frac{x_1 + y_1}{2} \qquad y_2 = \sqrt{x_1 \cdot y_1}$$

$$x_3 = \frac{x_2 + y_2}{2} \qquad y_3 = \sqrt{x_2 \cdot y_2}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$x_n = \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2} \qquad y_n = \sqrt{x_{n-1} \cdot y_{n-1}}$$

3. Prozeß

$$x_2 = \sqrt{x_1 \cdot y_1} \qquad y_2 = \frac{2x_1y_1}{x_1 + y_1}$$

$$x_3 = \sqrt{x_2 \cdot y_2} \qquad y_3 = \frac{2x_2y_2}{x_2 + y_2}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} \cdot y_{n-1}} \qquad y_n = \frac{2x_{n-1}y_{n-1}}{x_{n-1} + y_{n-1}}$$

Führt man diese Prozesse zunächst an einem Beispiel durch, etwa für $x_1 = 18$ und $y_1 = 4$, so bemerkt man die Konvergenz dieser Folgen, wobei für jeden Prozeß gilt:

$$\lim_{x_n \to \infty} x_n = \lim_{y_n \to \infty} y_n$$

Für den ersten Prozeß wollen wir den allgemeinen Nachweis kurz durchführen. Es ist zu zeigen, daß durch $[x_n, y_n]$ eine Intervallschachtelung vorliegt[26]. Weiter ist dann auch $x_n > y_n$ für alle n. Dies folgt aus den Größenvergleichen der entsprechenden Mittelbildungen.[27] Nun wollen wir zeigen, daß x_n eine monoton fallende und y_n eine monoton steigende Folge ist:

Aus $x_1 > y_1 > 0$ folgt:

$$x_2 = \frac{x_1 + y_1}{2} < \frac{x_1 + x_1}{2} = x_1$$

und

$$y_2 = \frac{2x_1y_1}{x_1 + y_1} = \frac{x_1y_1}{x_2} > y_1$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

Allgemein ist also $x_n < x_{n-1}$ und $y_n > y_{n-1}$ für $n = 2, 3, 4, \ldots$.

---

[26] vgl. z.B. Abschnitt 2 im ersten Teil

[27] vgl. Figur IX im 2. Abschnitt des ersten Teils

Nun muß noch gezeigt werden, daß $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$ ist:

Zunächst ist:

$$\begin{aligned} x_2 - y_2 &= \frac{x_1 + y_1}{2} - \frac{2x_1y_1}{x_1 + y_1} \\ &= \frac{(x_1 - y_1)^2}{2(x_1 + y_1)} \\ &= \frac{x_1 - y_1}{2} \cdot \frac{x_1 - y_1}{x_1 + y_1} \\ &< \frac{x_1 - y_1}{2}. \end{aligned}$$

Entsprechend ist weiter:

$$x_3 - y_3 < \frac{x_2 - y_2}{2} < \frac{x_1 - y_1}{2^2}.$$

Allgemein gilt also:

$$0 < x_n - y_n < \frac{x_1 - y_1}{2^{n-1}}.$$

Aus $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_1 - y_1}{2^{n-1}} = 0$ folgt schließlich

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = S .$$

Da für alle n gilt: $x_n \cdot y_n = x_1 \cdot y_1$, folgt daraus im Grenzfall

$$S^2 = x_1 y_1 \quad \text{oder} \quad S = \sqrt{x_1 y_1} .$$

Der Wurzelwert $S = \sqrt{x_1 y_1}$ ist also das Ergebnis der Intervallschachtelung $[x_n, y_n]$. Mit der von *Gauß* eingeführten Terminologie können wir vom Arithmetisch-Harmonischen Mittel $m(a, h)$, vom Arithmetisch-Geometrischen Mittel $m(a, g)$ und dem Geometrisch-Harmonischen Mittel $m(g, h)$ als dem jeweiligen Ergebnis der 3 Prozesse sprechen. Das Ergebnis des oben untersuchten 1. Prozesses $m(a, h)$ ist die Wurzel $\sqrt{x_1 \cdot y_1}$. Das Ergebnis des 2. Prozesses $m(a, g)$ kann nach Gauß als Wert eines Elliptischen Integrals gedeutet werden: Es sei $m(a, g)$ als Funktion $f(x_1, y_1)$ seiner Ausgangswerte gegeben, bzw. ermittelt. Dann gilt zum Beispiel nach Gauß:

$$\frac{1}{f(x_1, y_1)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{x_1^2 \cos^2\varphi + y_1^2 \sin^2\varphi}}$$

Im Falle $x_1 = 18$ und $y_1 = 4$ (vgl. nachfolgende Tabelle) ist dann:

$$\frac{1}{m(a,g)} = \frac{1}{f(18,4)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{324\cos^2\varphi + 16\sin^2\varphi}}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{81\cos^2\varphi + 4\sin^2\varphi}} \approx \frac{1}{9{,}701859}$$

In Bezug auf das Ergebnis des 3. Prozesses $m(g, h)$ ist noch Folgendes zu sagen: Vergleicht man in der folgenden Tabelle die Werte von $m(a, h)$, $m(a, g)$ und $m(g, h)$, so ist offensichtlich

$$m(a, h)^2 = m(a, g) \cdot m(g, h)$$

Wenn der Nachweis der Allgemeingültigkeit dieser Tatsache gelingt, so wäre das Ergebnis des dritten Prozesses auf folgende Weise interpretierbar:

$$m(g,h) = \frac{m(a,h)^2}{m(a,g)} = x_1 y_1 \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{x_1^2 \cos^2 \varphi + y_1^2 \sin^2 \varphi}} \quad .$$

Im Folgenden seien am Beispiel $x_1 = 18$ und $y_1 = 4$ die zugehörigen Prozesse durchgeführt:

1. Prozeß		2. Prozeß		3. Prozeß	
$x_1 = 18$	$y_1 = 4$	$x_1 = 18$	$y_1 = 4$	$x_1 = 18$	$y_1 = 4$
$x_2 = 11$	$y_2 = 6{,}545454$	$x_2 = 11$	$y_2 = 8{,}485281$	$x_2 = 8{,}485281$	$y_2 = 6{,}545454$
$x_3 = 8{,}772727$	$y_3 = 8{,}207253$	$x_3 = 9{,}742640$	$y_3 = 9{,}661164$	$x_3 = 7{,}452518$	$y_3 = 7{,}390193$
$x_4 = 8{,}489990$	$y_4 = 8{,}480575$	$x_4 = 9{,}701902$	$y_4 = 9{,}701817$	$x_4 = 7{,}421290$	$y_4 = 7{,}421225$
$x_5 = 8{,}485283$	$y_5 = 8{,}485280$	$x_5 = 9{,}701859$	$y_5 = 9{,}701859$	$x_5 = 7{,}421258$	$y_5 = 7{,}421258$
$m(a,h) = \sqrt{18 \cdot 4} = \sqrt{72}$ $= 8{,}485280$ (Babylonisches Wurzelziehen)		$m(a,g) \approx 9{,}701859$		$m(g,h) \approx 7{,}421258$	

Bemerkung: Vergleicht man die Ergebnisse der Betrachtungen über die drei klassischen Mittelbildungen m_a, m_g und m_h mit den "Gauß'schen Mittelbildungen" $m(a, g)$, $m(a, h)$ und $m(g, h)$, so ergeben sich folgende vergleichbare Beziehungen. Es ist nämlich:

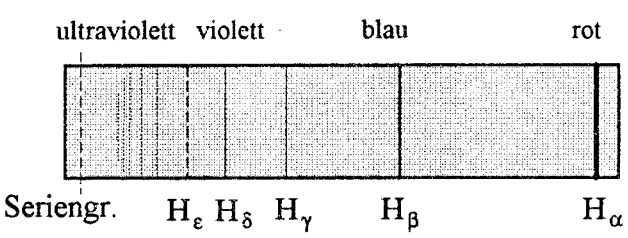
$$m_g^2 = m_a \cdot m_h \qquad m_a > m_g > m_h$$

$$m^2(a,h) = m(a,g) \cdot m(g,h) \qquad m(g,h) < m(a,h) < m(a,g)$$

An dieser Stelle wollen wir ausdrücklich darauf hinweisen, daß die beschriebenen Tatsachen noch keinesfalls vollständig bewiesen sind. Diese Tatsachen weisen immerhin darauf hin, daß ganz elementare Rechenprozesse – eben diejenigen mit den drei klassischen Mittelbildungen – in immer höhere mathematische Zusammenhänge führen. Auch zeigt sich immer deutlicher, daß die drei Mittelbildungen eine höhere Einheit darstellen.

10. ZU EINIGEN ASPEKTEN DER SPEKTROSKOPIE

Zu den wichtigsten Ergebnissen der Spektralanalyse gehört die Entdeckung der Serien von Spektrallinien. Betrachten wir z. B. das *Balmer*-Linienspektrum des Wasserstoffs in Emission (vgl. Zeichnung). Dieses Spektrum ist besonders einfach gegliedert. Dabei liegen die ersten vier Linien (H_α, H_β, H_γ und H_δ) im sichtbaren Bereich. Die Linie H_ε ist nur schwach leuchtend, alle übrigen "Linien" verschwinden in den nahen ultravioletten Spektralbereich. Schon der erste Blick auf das nebenstehende Spektrum mit seiner Serie von diskreten Linien läßt ein elementares Gesetz vermuten. Im Jahre 1885 hat der Basler Mittelschullehrer *Balmer* ein erstes Seriengesetz gefunden, und zwar allein aufgrund der ersten vier Linien. Balmer fand: multipliziert man die Zahl 3645,6 mit



$$\frac{3^2}{3^2-2^2}, \frac{4^2}{4^2-2^2}, \frac{5^2}{5^2-2^2} \text{ und } \frac{6^2}{6^2-2^2}$$

so erhält man die Wellenlängen der ersten vier Wasserstofflinien. Daraus resultierte dann die erste allgemeine Formel für die Wellenlängen, die den einzelnen Linien zugeordnet wurden:

$$\lambda = \text{const} \cdot \frac{m^2}{m^2-2^2}$$

const. = 3645,6 Åλ gemessen in Å-Einheiten.
(1 Å = 10^{-10} Meter), m = 3, 4, 5 u. 6

Die Linien, die eine derartige Formel für ihre Wellenlängen vereinigt, bilden eine Serie. Rein rechnerisch kann man die Serie über $m = 6$ hinaus fortsetzen. Dabei ist

$$\lim_{m\to\infty} \text{const} \cdot \frac{m^2}{m^2-2^2} = \text{const} = 3{,}645{,}6\,\text{Å}.$$

Bis $m = 31$ lassen sich die entsprechenden Linien im ultravioletten Bereich nachweisen. Je größer m wird, desto dichter rücken die Linien zusammen, so daß sie schließlich ein Kontinuum bilden. Heute benützt man die obige Formel aus praktischen Gründen in der Form

$$\frac{1}{\lambda} = \bar{\nu} = R \cdot \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{m^2}\right).$$

Sie geht aus der obigen Formel durch die folgende Substitution hervor:

$$\text{const.} = \frac{4}{R}$$

Dabei ist $\bar{\nu}$ die sogenannte Wellenzahl (Anzahl der auf 1 cm entfallenden Wellenlängen), R ist die *Rydberg-Konstante* des Wasserstoffs (mit $R = \frac{4}{\text{const}} = 109678\text{cm}^{-1}$).

Im Folgenden soll das Balmersche Gesetz unter Zuhilfenahme von Kettenbrüchen herausgearbeitet werden. Entsprechend dem Vorgehen in der Spektralanalyse werden den einzelnen Linien des Spektrums Wellenlängen λ zugeordnet, die man auch *Lichtkennzahlen* nennen könnte. Diese werden gewöhnlich in Å-Einheiten gemessen (1Å = 10^{-10}m). Für das abgebildete Wasserstoffspektrum ergeben sich dabei folgende gemessene Werte:

Bezeichnung der Linie	λ gemessen in Å- Einheiten			
H_α	6562,793	=	a	
H_β	4861,327	=	b	sichtbarer
H_γ	4340,466	=	c	Bereich
H_δ	4101,738	=	d	
H_ε	3970,075	=	e	
H_ς	3888,052			ultravioletter
↓	↓			Bereich

Für die Verhältnisse a : b, b : c, c : d und d : e führen wir eine Kettenbruchentwicklung durch, um dann die zugehörigen "sinnvollen" Näherungsbrüche zu bestimmen.

$$a:b = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{26\cdots}}}}} = (1;2,1,5,1,[26],\ldots)$$

"Sinnvoll" bedeutet hier eine möglichst gute Näherung mit möglichst kleinen Zahlen im Zähler und Nenner des Näherungsbruches.

$$\mathrm{a:b} = (1;2,1,5,1,\ [26],\ldots) \approx \frac{27}{20}$$

$$\mathrm{b:c} = (1;8,3,\ [1366],\ldots) \approx \frac{28}{25}$$

$$\mathrm{c:d} = (1;17,5,2,\ [83],\ldots) \approx \frac{200}{189}$$

$$\mathrm{d:e} = (1;30,6,1,1,\ [10],\ldots) \approx \frac{405}{392}$$

Aus diesen Werten folgt die fortlaufende Proportion:

$$\begin{aligned}\mathrm{a:b:c:d:e} &= \frac{9}{5}:\frac{4}{3}:\frac{25}{21}:\frac{9}{8}:\frac{49}{45}\\ &= \frac{9}{5}:\frac{16}{12}:\frac{25}{21}:\frac{36}{32}:\frac{49}{45}\\ &= \frac{3^2}{3^2-2^2}:\frac{4^2}{4^2-2^2}:\frac{5^2}{5^2-2^2}:\frac{6^2}{6^2-2^2}:\frac{7^2}{7^2-2^2}\end{aligned}$$

Einige Bemerkungen dazu:

1. Betrachtet man die einzelnen Kettenbruchentwicklungen, so fällt auf, daß die "Abbruchstellen" für die "sinnvollen" Näherungsbrüche unmittelbar erkennbar sind. Die Kettenbruchglieder 26, 1366, 83 und 10 würden im nächst besseren Näherungsbruch die Zähler und Nenner wesentlich vergrößern.

2. Wir erkennen bei dieser Gesetzmäßigkeit, daß natürliche Zahlen Naturgesetze konstituieren [28].

---

28 vgl. *Georg Unger* in "Physik am Scheideweg": "Die Bedeutung der natürlichen Zahlen in den Naturgesetzen"

Es ergibt sich die Frage, wie diese Serien mit den von uns in dieser Schrift behandelten Mittelbildungen zusammenhängen. Dazu betrachten wir die arithmetische Folge 1, 2, 3, 4, ... und die harmonische Folge $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots$ und vergewissern uns noch einmal ihrer in Teil II, Abschnitt 2 beschriebenen Eigenschaften.

Arithmetische Saitenskala der Untertonreihe

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Harmonische Saitenskala der Obertonreihe

$\frac{1}{9}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{2}\ 1$

Um das Folgende verstehen zu können, gehen wir von Beispielen aus: Aus der arithmetischen und harmonischen Folge greifen wir zunächst ein Glied heraus, z.B. aus der arithmetischen Skala 5 und aus der harmonischen $\frac{1}{6}$. Dann bilden wir eine Reihe von harmonischen und arithmetischen Mitteln aus spiegelbildlich zu den herausgegriffenen Gliedern gelegenen Gliedern der Folge:

Bei der arithmetischen Skala benützen wir harmonische Mittel M_h

$$2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8$$

$$M_{h_1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{4+6} = \frac{24}{5} = \frac{5^2 - 1^2}{5}$$

$$M_{h_2} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 7}{3+7} = \frac{21}{5} = \frac{5^2 - 2^2}{5}$$

$$\vdots$$

Folge von harmonischen Mitteln aus den spiegelbildlich zu 5 gelegenen Skalengliedern-

Bei der harmonischen Skala benützen wir arithmetische Mittel M_a

$$\frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{9}$$

$$M_{a_1} = \frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{7}}{2} = \frac{6}{35} = \frac{6}{6^2 - 1^2}$$

$$M_{a_2} = \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}{2} = \frac{6}{32} = \frac{6}{6^2 - 2^2}$$

$$\vdots$$

Folge von arithmetischen Mitteln aus den spiegelbildlich zu $\frac{1}{6}$ gelegenen Skalengliedern

Für das Weitere beschränken wir uns auf die rechte Spalte. Wir ermitteln allgemein alle arithmetischen Mittel aus den zu $\frac{1}{m}$ spiegelbildlich gelegenen Gliedern der harmonischen Skala. Das sei verbildlicht:

$$\frac{1}{m-n} \cdots \frac{1}{m-2}\ \frac{1}{m-1}\ \frac{1}{m}\ \frac{1}{m+1}\ \frac{1}{m+2} \cdots \frac{1}{m+n} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots. m-1$$

Rechnerisch ergibt sich dann das arithmetische Mittel wie folgt:

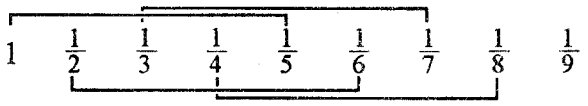
$$M_{a_n}(m) = \frac{\frac{1}{m+n} + \frac{1}{m-n}}{2} = \frac{m}{m^2 - n^2}$$

Aus dieser Formel, der auf der Saitenskala neue Punkte entsprechen, lassen sich zwei Folgen entwickeln, eine endliche und eine unendliche Folge.

1. Bei festem m und $n = 1, 2, 3, \ldots m\text{-}1$ werden alle arithmetischen Mittel erfaßt, die aus spiegelbildlich zu $\frac{1}{m}$ gelegenen Gliedern der harmonischen Skala gebildet werden. Für $m = 6$ ergeben sich die 5 arithmetischen Mittel der Form:

$$M_{a_n}(6): \quad \frac{6}{36-1^2}, \frac{6}{36-2^2} \cdots \frac{6}{36-5^2}$$

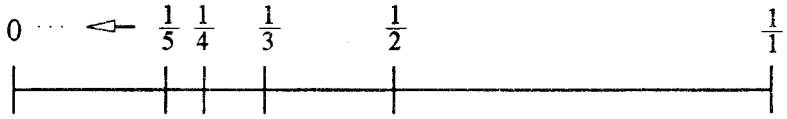
2. Bei festem n und $m = n + 1, n + 2, \ldots$ werden alle arithmetischen Mittel erfaßt, die mit genau n-Gliedern Abstand zu einem Mittelglied $\frac{1}{m}$ der harmonischen Skala spiegelbildlich liegen.



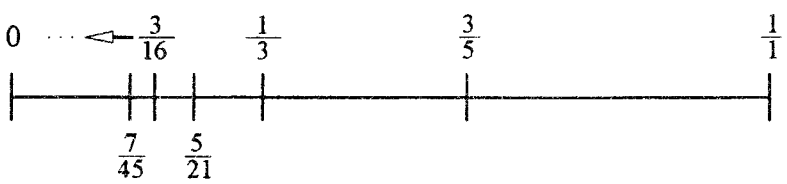
Beispiel für $n = 2$

Es ergeben sich für $n = 2$ die folgenden unendlich vielen arithmetischen Mittel $M_{a_2}(m)$:

$$\frac{3}{3^2-2^2},\ \frac{4}{4^2-2^2},\ \frac{5}{5^2-2^2},\ \frac{6}{6^2-2^2},\ \frac{7}{7^2-2^2}\ \ldots\ldots$$



$\frac{1}{m}$-Skala entsprechend der Obertonskala

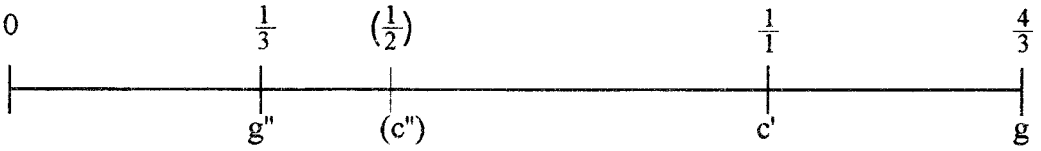


$\frac{m}{m^2-2^2}$ - Skala mit neuen Skalenpunkten

Die Terme der letzten Folge (rechts) bilden ersichtlich ein konstituierendes Element der Balmer-Formel. Interpretiert man nun diese Terme als Skalenlängen auf einer Saite (vgl. die vorangehende und folgende Zeichnung), so entspricht z.B.

$$4 \cdot \frac{4}{4^2-2^2} = 4 \cdot \frac{1}{3}$$

dem vierten Ton einer Untertonreihe, aufgebaut auf $\frac{1}{3}$ (Vgl. auch das pythagoräische Lambdoma im 8. Abschnitt). D.h. der dem Skalenpunkt $\frac{1}{3}$ entsprechende Ton wird in diesem Fall um eine Doppeloktave abwärts versetzt (z.B. von g" nach g). Skalenmäßig sieht das für dieses Beispiel folgendermaßen aus (mit Notenbezeichnung):



Entsprechendes gilt natürlich für alle oben beschriebenen Terme mit der Einschränkung, daß die auftretenden "Töne" und "Intervalle" im allgemeinen nicht identisch sind mit den uns vertrauten Tönen und Intervallen einer Dur- oder Molltonart.

Mit der so gewonnenen Folge $m \cdot M_{a_2}(m)$ haben wir ersichtlich gerade jene Folge von Termen gefunden, deren erste 5 Glieder das Ergebnis unserer Kettenbruckentwicklung waren.

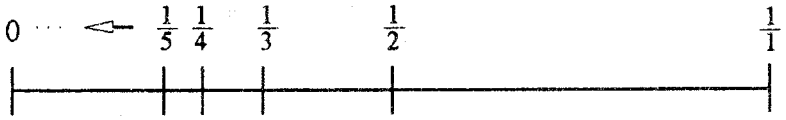
$$3 \cdot M_{a_2}(3) = \frac{3^2}{3^2-2^2} \qquad 6 \cdot M_{a_2}(6) = \frac{6^2}{6^2-2^2}$$

$$4 \cdot M_{a_2}(4) = \frac{4^2}{4^2-2^2} \qquad 7 \cdot M_{a_2}(7) = \frac{7^2}{7^2-2^2}$$

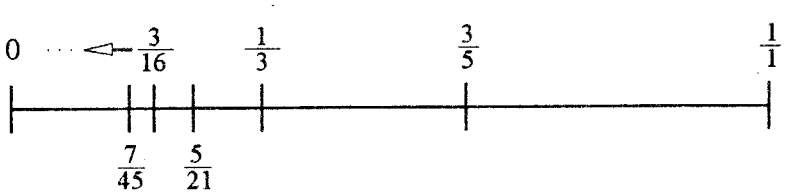
$$5 \cdot M_{a_2}(5) = \frac{5^2}{5^2-2^2} \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$m \cdot M_{a_2}(m) = \frac{m^2}{m^2-2^2}$$

Im Folgenden stellen wir alle drei betrachteten Skalen übereinander und vergleichen die letzte mit dem empirisch gewonnenen Balmer-Spektrum. Wir benützen für die Skalen die folgenden errechneten Werte.



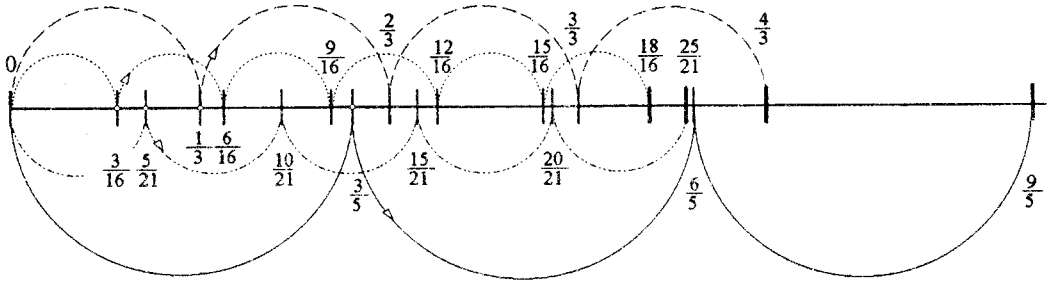
$\frac{1}{m}$-Skala, $m = 1, 2, 3, \ldots$

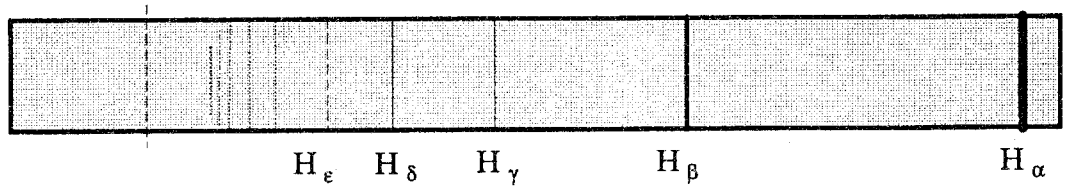


$\frac{m}{m^2-2^2}$ - Skala (links)

$(m = 3, 4, \ldots)$

$\frac{m^2}{m^2-2^2}$ - Skala (unten)





Als Ergebnis unserer Untersuchung stellen wir fest: Wir sind ausgegangen von einer harmonischen Skala. Arithmetische Mittelbildungen führen zunächst zu einer neuen Skala, die als Tonskala interpretiert, zu von der Obertonreihe verschiedenen Teiltönen führte. Jedem Teilton wurde schließlich in der oben beschriebenen Weise ein Unterton zugeordnet. Die diesen Untertönen entsprechenen Terme sind dann in ihrem Aufbau und zahlenmäßig identisch mit den Termen der Balmer-Serie. Ganz entsprechend hätten wir die linke Spalte auf Seite 82 weiterführen können. Das hätte auch hier zu neuen Teiltönen geführt, denen dann aber in entsprechender Weise Töne der Obertonreihe hätten zugeordnet werden müssen. Insgesamt hätten wir auf diese Weise die Kehrwerte der oben beschriebenen Terme erhalten. Mit unseren auf Seite 84 eingeführten Bezeichnungen können wir hinsichtlich der Balmer-Serie dann schreiben:

$$\lambda_\alpha : \lambda_\beta : \lambda_\gamma : \lambda_\delta : \lambda_\varepsilon = \frac{3^2}{3^2-2^2} : \frac{4^2}{4^2-2^2} : \frac{5^2}{5^2-2^2} : \frac{6^2}{6^2-2^2} : \frac{7^2}{7^2-2^2}$$ harmonische Skala als Ausgangskala

$$\bar{\nu}_\alpha : \bar{\nu}_\beta : \bar{\nu}_\gamma : \bar{\nu}_\delta : \bar{\nu}_\varepsilon = \frac{3^2-2^2}{3^2} : \frac{4^2-2^2}{4^2} : \frac{5^2-2^2}{5^2} : \frac{6^2-2^2}{6^2} : \frac{7^2-2^2}{7^2}$$ arithmetische Skala als Ausgangsskala

Wir blicken hier ganz anfänglich in einen Bereich der Stofferkenntnis, in dem musikalische Verhältnisse im Zusammenhang mit natürlichen Zahlen eine konstituierende Rolle spielen. Erkennt man in dieser Tatsache mehr, als dies gewöhnlich geschieht, so liegt der Gedanke nicht mehr so fern, die natürlichen Zahlen selbst als die wahren atomoi anzusehen, deren Verhältnisse zueinander gerade die Phänomene

der Diskontinuität im Stoffgebiet bestimmen.[29] Bemerkenswert sind auch diesbezüglich Äußerungen des Physikers und Philosophen Werner Heisenberg:[30]

> "Das Elementarteilchen ist seinem Wesen nach nicht ein materielles Gebilde in Raum und Zeit, sondern gewissermaßen nur ein Symbol, bei dessen Einführung die Naturgesetze eine besonders einfache Gestalt annehmen."
>
> "Letzten Endes ist der Materiebegriff auf Mathematik zurückgeführt. Der innere Kern alles Stofflichen ist für uns wie für Platon eine 'Form', nicht irgendein 'materieller Inhalt'. Dieser Vorrang der Form vor dem 'Inhalt' ist vielleicht nur der Ausdruck der Tatsache, daß jede Aktivität des menschlichen Geistes mit der Ordnung, also mit der Form beginnt."

Daß die oben beschriebenen Verhältnisse gerade dort auftreten, wo Substanzen sich im Lichtbereich offenbaren können, ist besonders bemerkenswert.[31] Auch zeigt sich hier wieder die besondere Bedeutung der Mittelbildungen, die in dem skizzierten Prozeß der Rechnungen miteinander verwoben erscheinen.

Im Folgenden komme ein Mann zu Wort, der ganz im Zusammenhang mit den Theoriebildungen der modernen Atomphysik stand und dessen Worte ganz im Kontext dieser Theorien zu verstehen sind, der aber doch durch alles hindurch sich eine Ehrfurcht bewahrte vor der Erkenntnis des "Zusammenklingens ganzzahliger Verhältnisse" im Stoffbereich. 1919 schrieb *Sommerfeld* in einem Vorwort zur ersten Auflage seines berühmten Werkes "Atombau und Spektrallinien" die folgenden Sätze:[32]

> "Seit der Entdeckung der Spektralanalsyse konnte kein Kundiger zweifeln, daß das Problem des Atoms gelöst sein würde, wenn man gelernt hätte, die Sprache der Spektren zu verstehen. Das ungeheure Material, welches 60 Jahre spektroskopischer Praxis angehäuft haben, schien allerdings in seiner Mannigfaltigkeit zunächst unentwirrbar. Fast mehr haben die sieben Jahre Röntgenspektroskopie zur Klärung beigetragen, indem hier das Problem des Atoms an seiner Wurzel erfaßt und das Innere des Atoms beleuchtet wird. Was wir heutzutage aus der Sprache der Spektren heraushören, ist eine wirkliche Sphärenmusik des Atoms, ein Zusammenklingen ganzzahliger Verhältnisse, eine bei aller Mannigfaltigkeit zunehmende Ordnung und Harmonie. Für alle Zeiten wird die Theorie der Spektrallinien den Namen *Bohrs* tragen. Aber noch ein anderer Name wird dauernd mit ihr verknüpft sein, der Name *Plancks*. Alle ganzzahligen Gesetze der Spektrallinien und der Atomistik fließen letzten Endes aus der Quantentheorie . Sie ist das geheimnisvolle Organon, auf dem die Natur die Spektralmusik spielt und nach dessen Rhythmus sie den Bau der Atome und der Kerne regelt."

Anzumerken bleibt nur noch, daß nach Balmer noch andere Wasserstofflinien als Serien gefunden wurden, und zwar entsprechend der Formel:

$$\bar{\nu} = R \cdot \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

für	$n = 1$	die Lyman-Serie
	($n = 2$	die Balmer-Serie)
	$n = 3$	die Paschen-Serie
	$n = 4$	die Brakett-Serie
	$n = 5$	die Pfund-Serie

29 Vgl. dazu den schönen Aufsatz von *L. Locher Ernst* Die natürlichen Zahlen als Geistkunstwerk, Dornach und den schon erwähnten Aufsatz von *G. Unger* in "Physik am Scheideweg"

30 zitiert nach *M. Martin*, "Atomismus und moderne Physik", AG für Verlag und Druckerei Goldbach SG

31 vgl. dazu die wesentlichen Ausführungen R. Steiners in GA 120, 10. Vortrag und den Aufsatz von *G. Glöckler:* "Zur Frage der Kernenergie", in Mitteilungen a. d. anthr. Arbeit in Deutschland, 31. Jahrgang, Heft 3 (Nr. 121)

32 Zitiert nach *Wolfgang Finkelnburg:* Einführung in die Atomphysik S. 49; Berlin 1962

ANHANG

VON DER GEDANKENLOSIGKEIT IN DER BEHANDLUNG DER MATHEMATIK

Louis Locher-Ernst

1.

Eine Diskussion – Ende der zwanziger Jahre – nach dem Vortrag eines bekannten Mathematikers vor einem Gremium, zu dem auch die Studierenden der letzten Semester Zutritt hatten, blieb mir in lebhafter Erinnerung. Als der Vertreter älteren Schlages, den wir als Idealisten bezeichnen können, den Nominalisten in die Enge trieb, behauptete dieser, die Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ und das quadratische Reziprozitätsgesetz für die natürlichen Zahlen seien genau gleicher Natur. Der Idealist verwahrte sich entschieden dagegen und bezeichnete die erste Formel als trivial, das Reziprozitätsgesetz hingegen als eine tiefliegende Tatsache. Darauf wollte der Nominalist wissen, worin sich das Tieferliegen der einen Formel gegenüber der anderen ausdrücke; der Unterschied liege doch höchstens darin, daß die Beweisketten, durch welche die genannten Sachverhalte mit den Axiomen zusammenhängen, ungleich lang seien. Idealist und Nominalist beharrten auf ihren Standpunkten, ohne auch nur die geringste Annäherung vorzunehmen.

Wer hat recht? Von einem Gesichtspunkt aus gesehen erscheint es leicht, fast selbstverständlich, die Argumentation des Nominalisten anzuerkennen. Weshalb sollte denn ein grundsätzlicher Unterschied nur deshalb gemacht werden, weil die eine Beweiskette kurz, die andere bedeutend länger ist? Auf Grund eines anders gewählten Axiomsystems wären vielleicht die Herleitungen nicht mehr so stark verschieden lang. Andererseits lebt in jedem Idealisten – damals gehörten noch die meisten Mathematiker zu ihnen - das ihm als unbedingt sicher geltende Gefühl, der Nominalist versündige sich mit seinem Vertrivialisieren gegen den Geist der Mathematik.

Die Einstellung zu diesem Problem ist weitgehend verbunden mit der Haltung, die man gegenüber dem Wahrheitsbegriff einzunehmen vermag. Bis zum neunzehnten Jahrhundert galten die mathematischen Sachverhalte als unbedingte Wahrheiten, ja als Muster von solchen. Und bis gegen die Mitte unseres Jahrhunderts konnte man im Zusammenhang mit pädagogischen Fragen hören, der mathematische Unterricht diene zur Zucht des Denkens, das sich in der Mathematik an objektiven Tatbeständen zu üben habe.

Im Laufe des neunzehnten Jahrhunderts sah man sich veranlaßt, eine erste Relativierung des Wahrheitsbegriffes vorzunehmen. Die Axiome gelten seither nicht mehr als "Urphänomene", als wahre Sachverhalte, sondern als mehr oder weniger zweckmäßige Festsetzungen. Als wahr werden dann die Aussagen betrachtet, die aus diesen Festsetzungen durch richtiges Schließen folgen.

In unserem Jahrhundert erfolgte die zweite Relativierung, indem man es aufgab, von einem an sich richtigen Schließen zu sprechen. Auch die Regeln des Schließens sind zu Festsetzungen geworden, die man mehr oder weniger zweckmäßig treffen kann. Als wahr gelten nun noch die Aussagen, die auf Grund solcher Festsetzungen aus jenen Axiomen folgen.

Daß diese doppelte Relativierung des Wahrheitsbegriffs für den mathematischen Unterricht, insbesondere an den Gymnasien, tiefgreifende Änderungen in der Stellung der pädagogischen Bedeutung der Mathematik haben muß, ist zwar evident, wurde aber bis heute noch zu wenig durchdacht.

Über die in dieser oder jener Weise vollzogenen formalen Axiomatisierungen der Mengenlehre sagt *Bourbaki* [33]:

> "Si elles satisfont les formalistes, c'est que ces derniers refusent de prendre en considération les réactions psychologiques individuelles de chaque mathématicien; ils estiment qu'un langage formalisé a rempli sa tâche lorsqu'il peut transcrire les raisonnements mathématiques sous une forme dépourvue d'ambiguité, et servir ainsi de vehicule à la pensée mathématique; libre à chacun, diraient-ils, de penser ce qu'il voudra sur la "nature" des êtres mathématiques ou la "verite" des théorèmes qu'il utilise, pour vu que ses raisonnements puissent être transcrits dans le langage commun."

Eine elegante Lösung des angezeigten Problems wählte Herr N. *Bourbaki,* indem er sagt [34]:

> "Les mathématiciens ont toujours été persuadés qu'ils démontrent des "verités" ou des "propositions vraies"; une telle conviction ne peut évidemment être que d'ordre sentimental ou métaphysique, et ce n'est pas en se plaçant sur le terrain de la mathématique qu'on peut la justifier, ni même lui donner un sens qui n'en fasse pas une tautologie. L'histoire du concept de vérité en mathématique relève donc de l'histoire de la philosophie et non de celle des mathématiques; mais l'evolution de ce concept a eu une influence indéniable sur celle des mathématiques, et à ce titre nous ne pouvons la passer sous silence."

In einer erfreulich deutlichen Art sprach sich gelegentlich *K. Menger*[35] so aus:

> "Ich, für meinen Teil, glaube, ..., daß das, was der Mathematiker tut, nichts anderes ist, als die Herleitung von Aussagen mit Hilfe gewisser aufzuzählenden (in verschiedener Weise wählbaren) Methoden aus gewissen aufzuzählenden (in verschiedener Weise wählbaren) Aussagen – und daß alles, was Mathematik und Logik über diese, einer "Begründung" weder fähige noch bedürftige Tätigkeit des Mathematikers aussagen können, in dieser simplen Tatsachenfeststellung besteht."

Von einem Gedankeninhalt zu reden, der unabhängig von den in Zeichen notierten Methoden und Aussagen besteht, der fähig ist, eine Begründung für das Tun zu tragen, hat keinen Sinn mehr - sofern man sich nicht darauf beschränken will, als Begründung allein die Nützlichkeit zur Konstruktion gewisser Mechanismen anzuerkennen. Dies führt konsequent schließlich dazu, die Gedankenlosigkeit des Mathematisierens zum Prinzip zu erheben.

2.

Man spricht heute davon, daß im Laufe unseres Jahrhunderts die Mathematik immer mehr Strukturtheorie geworden sei. Diese Entwicklung begann mit der Bildung des Gruppenbegriffes und mit den Einsichten in den Umstand, daß sich gewisse Sachverhalte verschiedener mathematischer Gebiete von derselben Gruppe oder, allgemeiner gesprochen, von derselben Struktur beherrscht erwiesen. Es ist an dieser Stelle nicht nötig, an eindrückliche Beispiele zu erinnern. In der Tat ergaben sich hieraus Erkenntnisse von vorher ungeahnten Zusammenhängen. Mit Recht hatte man den Eindruck, damit in manchen mathematischen Einzeldisziplinen in die Tiefe vorgedrungen zu sein. Diesen Vorstoß in die Tiefe suchte man weiter und weiter zu treiben, bis man schließlich überhaupt nur noch die formalen Strukturen im Gesichtsfeld behielt. Es liegt mir ferne, die Fruchtbarkeit dieser Entwicklung nicht voll anzuerkennen. Wenn sich am Horizont ein neues Licht zeigt, ist es das Vorrecht der Pioniere, ihren Blick auf dieses allein zu richten. Es darf dabei im Fortgang aber nicht vergessen werden, daß auf einem solchen Wege allzu leicht auch vieles verloren geht, daß man sogar blind wird für Sachverhalte, die auch in Betracht zu ziehen sind.

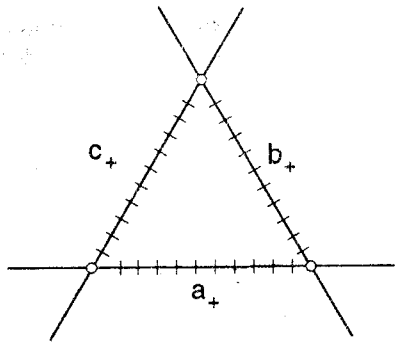
An einem einfachen Beispiel möge illustriert werden, was damit gemeint ist.

---

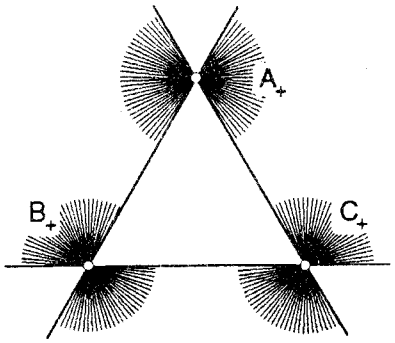
33 *N. Bourbaki:* Eléments de Mathématique. Livre I, chapitre 4: Structures , p. 105 Hermann, Paris 1957

34 Seite 81 des genannten Buches

35 Im Vorwort des Buches von *F. Waismann:* Einführung in das mathematische Denken, Gerold & Co, Wien 1936



Figur 1



Figur 2

Drei Geraden a, b, c, (Figur 1) zerlegen das Punktfeld der projektiven Ebene in vier Punktgebiete. Die Segmente, die eines dieser Gebiete begrenzen, seien mit a_+, b_+, c_+ bezeichnet, die übrigen Segmente entsprechend mit a_-, b_-, c_-. Die vier Gebiete können durch die begrenzenden Segmente gegeben werden:

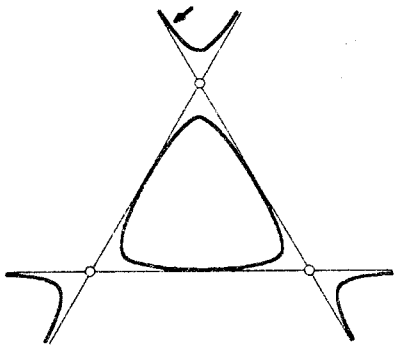
a_+, b_+, c_+, a_+, b_-, c_- b_+, c_-, a_- c_+, a_-, b_-.

Drei Punkte A, B, C, (Figur 2) gliedern das Strahlenfeld der projektiven Ebene in vier Strahlenbereiche . Die Winkelfelder, die einen dieser Bereiche begrenzen, seien mit A_+, B_+, C_+ bezeichnet, die übrigen Winkelfelder entsprechend mit A_- , B_- , C_- . Die vier Bereiche können durch die begrenzenden Winkelfelder gegeben werden:

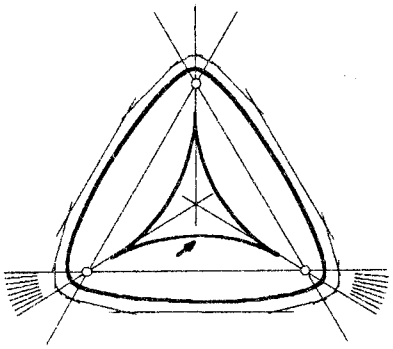
A_+, B_+, C_+, A_+, B_-, C_- B_+, C_-, A_- C_+, A_-, B_-.

Den Inbegriff der drei Geraden a, b, c betrachten wir als zerfallene Kurve dritter Ordnung. Durch stetige Umformung erhält man zwei Haupttypen der Kurven dritter Ordnung (sechster Klasse)[36], nämlich die zweiteilige Form (Figur 3), bestehend aus einem Zuge mit drei Wendestellen und einem Oval, sowie die einteilige Form (Figur 5) mit drei Wendestellen.

Die zweiteilige Form entsteht folgendermaßen: Die Punkte der Segmente a_+, b_+, c_+ werden in das Gebiet a_+, b_+, c_+ verschoben. Der durch einen Pfeil bezeichnete, von zwei Wendestellen auf der Ferngeraden begrenzte Kurvenbogen entsteht aus den "Hälften" der Segmente b_- und c_- durch Hereinrücken in das Gebiet a_+, b_-, c_-. Entsprechend die beiden übrigen Bögen.



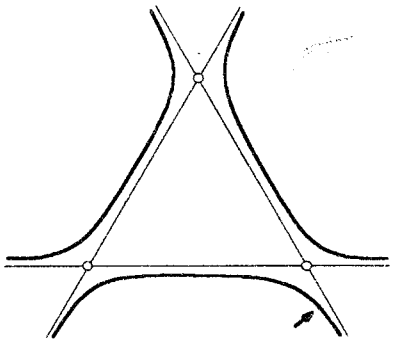
Figur 3



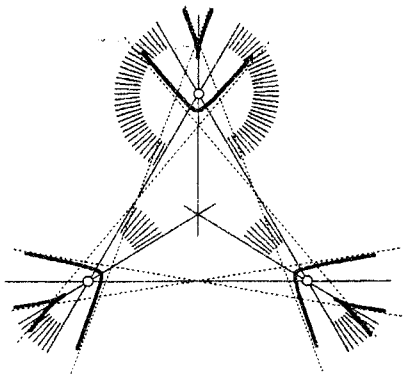
Figur 4

36 Es ist nicht nötig, bloß an algebraische Kurven zu denken. Es kann sich um allgemeinere Kurven handeln, für welche die Ordnung als die maximale Anzahl der (reelen) Schnittpunkte erklärt ist, welche die Kurve mit einer Geraden besitzt (entsprechend der Klasse). Näheres findet man in den folgenden Büchern des Verfassers : Einführung in die freie Geometrie ebener Kurven, Birkhäuser Verlag, Basel 1952 Raum und Gegenraum, Philosophisch-Anthroposophischer Verlag am Goetheanum, Dornach 1957

Der durch den Pfeil bezeichnete, auch durch zwei Wendestellen begrenzte Teilbogen der einteiligen Form (Figur 5) ergibt sich durch Verschieben der Punkte des Segmentes a_+ und der Punkte der "Hälften" der Segmente b_- und c_- in das Gebiet a_+ , b_- , c_-.



Figur 5



Figur 6

Die Figuren 4 und 6 zeigen zwei Haupttypen der Kurven dritter Klasse (sechster Ordnung), die sich durch die entsprechenden polaren stetigen Umformungen der drei Strahlenbüschel *A, B, C* ergeben.

Die zweiteilige Form (Figur 4) entsteht wie folgt: Die Strahlen der Winkelfelder A_+ , B_+ , C_+ werden in den Bereich A_+ B_+ C_+ verschoben und bilden dann ein Oval. Die "Hälften" der Winkelfelder B_- , C_- (in Figur 4 angedeutet) werden in den Bereich A_+ , B_+ , C_+ verschoben, so daß ein von Spitzen begrenzter Bogen (mit Pfeil bezeichnet) gebildet wird. Entsprechend die beiden übrigen Bögen.

Zur Bildung der einteiligen Form (Figur 6) nehmen wir als Material zunächst alle Strahlen aus A+ und je die "Hälfte" der Strahlen aus B_- und C_- (in Figur 6 angedeutet) und bilden durch leichtes Verschieben **einen** (zweimal über die Ferngerade führenden) Bogen (in Figur 6 hervorgehoben). Entsprechend die beiden anderen Teilbögen . Damit wird vollkommen überschaubar, wie die einteilige Grundform mit drei Spitzen aus den Büscheln *A, B, C* hervorgeht.

Man wird wohl zugeben, daß es ohne Übung nicht selbstverständlich erscheint, wie die beiden entsprechenden Typen der Kurven dritter Ordnung und dritter Klasse aus den zerfallenden Gebilden, nämlich den Inbegriffen von drei Punktreihen und von drei Strahlenbüscheln hervorgehen. Rein formal behandelt kann man die Vorgänge aber als gleich bezeichnen. Bleibt man bei algebraischen Gebilden, kann man von der Nullsetzung des Produktes dreier Linearformen dazu übergehen, dieses Produkt gleich einer positiven oder negativen Konstante mit "kleinem" Betrag zu setzen. Ob man unter den Variablen Punkt- und Linienkoordinaten versteht, bleibt dabei gleichgültig. Die "Struktur" der Gebilde ist dieselbe. *Die konkreten Unterschiede innerhalb des Punkt- und des Strahlenfeldes gehören aber zweifellos auch zur Geometrie.* Es ist gedankenlos, ob der Identität der Struktur die *auch der Mathematik* angehörenden Unterschiede in verschiedenen Realisierungen dieser Struktur als unwesentlich wegzulassen. Ja, die Tatsache des Bestehens derselben Struktur erscheint erst dann im rechten Lichte, wenn man sie gegen die Fülle der einzelnen Realisierungen abzuheben versteht.

3.

Ein anderes Beispiel möge auf einen weiteren Umstand hinweisen, der viel zu wenig beachtet wird. Für das elementare Rechnen mit natürlichen Zahlen kann man dieses oder jenes Axiomsystem zugrunde

legen. Die meisten Lehrer werden mit einem gewissen Stolz vorführen, wie man mit dem betreffenden System und mit den geeignet gewählten "logischen" Regeln nunmehr die Arithmetik der natürlichen Zahlen aufbauen kann. Es wird damit der Eindruck erweckt, daß man die Sachverhalte im Reiche der natürlichen Zahlen mit jedem System und mit jenen Regeln vollkommen beherrsche. Leider wissen viele Mathematiker nicht, daß dies eine Täuschung ist. Zu den bedeutsamen Ergebnissen unseres Jahrhunderts gehört der von *Th. Skolem* [37] entdeckte Sachverhalt, daß es unmöglich ist, die natürlichen Zahlen durch ein endliches Axiomensystem eindeutig zu charakterisieren. Das heißt, wie man auch ein finites System wählen mag, es gibt stets verschiedenartige Bereiche, die Realisierungen jenes Systems darstellen. Diese Tatsache sollte jeder Darstellung von Strukturtheorien mit roten Lettern vorangestellt oder mindestens frühzeitig eingegliedert werden. Sie bringt einem den richtigen Respekt für das Gebilde der Reihe der natürlichen Zahlen bei. Ein vollkommenes Beherrschen ist nur im Gebiete gewisser abstrahierter Begriffsbildungen möglich, zum Beispiel für die Restklassen. Tatsächlich sind die natürlichen Zahlen derart individuell, daß sie durch ein finites Axiomensystem nicht im oben genannten Sinne eindeutig gekennzeichnet werden können. Daß man diesen Umstand heute zu wenig betont, rechne ich auch zu den Gedankenlosigkeiten in der Behandlung der Mathematik. Der Sachverhalt vermittelt einem die richtige Reserve gegenüber den formalen Strukturtheorien. Für die unterrichtenden Mathematiker ist es von fundamentaler Bedeutung, diese Dinge zu kennen, weil die Stimmung seines Unterrichts dadurch wesentlich beeinflußt wird.

In einem Zusammenhang möge eine Erfahrung erwähnt werden, die man immer wieder, auch mit Akademikern, ja erstaunlicherweise auch mit Ingenieuren machen kann. Wie oft hört man die naive Frage, was es denn in der Mathematik noch Neues zu entdecken gebe, nachdem man sich mehr als zweitausend Jahre mit den Zahlen usf. wissenschaftlich auseinandergesetzt habe. Daß diese Frage in weiten Kreisen, wie gesagt auch in den gebildetsten, zu treffen ist, weist deutlich auf einen Mangel in der Gedankenführung im mathematischen Unterricht hin. Die Einsicht in die Tatsache, daß die Erweiterung der Erkenntnisse auf irgendeinem Gebiet auch wesentlich eine Erweiterung des Kreises der offenen Fragen bedeutet, scheint zu wenig verbreitet zu sein.

4.

Der junge Mathematiker, der sich heute einen Einblick verschaffen möchte, was die ihm im Studium gebotene Wissenschaft zur Wahrheitsfrage zu sagen hat, findet eine ungeheure Literatur über die mathematischen Gesetze der Logik, über Logistik, Beweistheorie usw. Nimmt er mit Elan die Bekanntschaft verschiedener dieser Werke auf, so sieht er sich von einer solchen Masse von Spezialitäten aufgesogen, daß er meist bald auf irgendeinen Sonderzweig sich möglichst wohnlich einrichtet, dort an einem Zweiglein laboriert und die Grundfrage unbeantwortet versinken läßt. Sein unbefriedigtes Fragen wirkt in ihm freilich trotzdem weiter.

Es ist tief zu bedauern, daß wichtige Sachverhalte, die Aufklärung bringen, heute in den gängigen Lehrbüchern nicht vermerkt sind. Auf einen solchen Tatbestand wollen wir näher eingehen. Da in den hier vorgebrachten Bemerkungen keine detaillierten Ausführungen beabsichtigt sind, dürfen wir uns mit dem Hinweis auf das Grundsätzliche begnügen.

---

[37] *Th. Skolem*, Über die Unmöglichkeit einer vollständige Charakterisierung der Zahlenreihe mittels eines endlichen Axiomensystems. Norsk. Math. Forenings Skrifter, Ser. II.1933. Eine auch heute noch anregende Darstellung einschlägiger Fragen findet man in dem in Fußnote 2 genannten Buche.

Denken wir uns ein formales System allgemeiner Art, bestehend aus **endlich** vielen, festen, hinschreibbaren Zeichen. Gewisse Zeichenkombinationen seien als axiomatische "Sätze" angenommen, aus denen mit Hilfe *formal beschreibbarer* Regeln, deren Zeichen alle dem System angehören, andere Sätze "bewiesen" werden. Jeder auf solche Weise schon gewonnene oder noch zu gewinnende "Satz" soll *formal richtig* heißen. Wir können annehmen, daß jeder formal-richtige Satz entweder die Form A oder $\neg$ A (nicht A) hat, wobei A eine Folge von Zeichen des Systems bedeutet, zu denen auch $\neg$ und $\wedge$ (für "und") gehören sollen.

Bei der Handhabung solcher Formalismen stellen sich die folgenden hauptsächlichsten Fragen.

Erstens die Frage der *formalen Entscheidbarkeit*: Läßt sich für **jede** gegebene Zahlenkombination A, die nur Zeichen des Systems enthält, durch formalen Beweis, das heißt durch Anwenden der zugrunde gelegten formalen Regeln, entscheiden, ob eben diese Kombination von A und $\neg$ A beide formal richtige Sätze darstellen? Anders gefaßt: Besteht Gewähr dafür, daß die Kombination A $\wedge$ $\neg$ A niemals einen formal-richtigen Satz darstellt?

Weitere Fragen, diejenigen nach der *absoluten Entscheidbarkeit* und nach der *inhaltlichen Widerspruchsfreiheit*, bedürfen einer näheren Erklärung. Sie beziehen sich nur auf solche Formalismen, deren axiomatische Sätze und Regeln gemäß einer bestimmten Zuordnung (Übersetzung der Zeichen) *einen in reinen Gedanken faßbaren* Sinn aufweisen. Für einen Formalismus ist dies an sich natürlich nicht nötig; ein solcher stellt, für sich betrachtet, ein reines Zeichenspiel dar. Ob und welchen Sinn er hat, ob er in diesen oder jenen Mechanismen nützliche Anwendungen findet, muß in jedem Fall besonders abgeklärt werden.

Auf die Fragen, was unter einem "Gedanken", was unter der Aussage "einen gedanklichen Sinn haben" zu verstehen sei, treten wir vorerst nicht ein. Wir nehmen an, daß ein vernünftiger Mensch - dessen Definition wir uns auch sparen - wisse, was mit jenen Worten bezeichnet wird. Für einen solchen stellt sich dann die gewichtige Frage, ob ein Satz (eine Kombination von Zeichen des Formalismus), von dem feststehen möge, daß er *formal* nicht entscheidbar ist, *inhaltlich* – gemäß dem ihm zugeordneten gedanklichen Sinne – vielleicht noch entscheidbar ist. In diesem Falle sagen wir, der betreffende Satz sei formal nicht entscheidbar, hingegen **absolut** entscheidbar. Ähnlich ist die Frage zu untersuchen, ob es vorkommen könnte, daß ein Formalismus zwar *formal* widerspruchsfrei ist, aber *inhaltlich* doch Widersprüche aufweist.

Von vornherein ist festzuhalten, daß es in jedem vorgelegten Formalismus *nur abzählbar viele formal-richtige* Sätze gibt, da für die "Beweise" nur endlich viele Zeichen in endlich vielen Kombinationen zur Verfügung stehen.

Dasselbe kann man freilich auch vom nicht in festen Zeichen aufgeschriebenen, rein gedanklichen Schließen sagen, da das "diskursive Denken" einen an eine Zeitdauer gebundenen Ablauf nimmt, so daß nur abzählbar viele Beweisführungen im Bewußtsein, das dem diskursiven Denken eigen ist, auftreten können.

Trotzdem besteht ein tiefgreifender Unterschied: Das inhaltliche Schließen ist in jeder Phase offen, das heißt stets in der Lage, **neue** Begriffe zu verwenden, die in einem von vornherein gewählten formalen System sich der formalen Darstellung in eben diesem System entziehen. Es kann immerhin möglich sein, durch geeignete Änderung oder Erweiterung des Formalismus den neuen Gedanken auch wiederum zu formalisieren.

Ein gegebener Formalismus kann grundsätzlich stets als mechanisches oder elektronisches Gerät technisch realisiert werden. Grundsätzlich ist mit den heutigen technischen Mitteln auch folgendes

Vorgehen möglich: Man läßt das Gerät erstens alle formal-richtigen Sätze X hintereinander nach der Anzahl der verwendeten Zeichen bilden und zweitens den Vergleich mit einer *gegebenen* Zeichenkombination A anstellen und drittens die Maschine automatisch zum Stop bringen, wenn Übereinstimmung zwischen einem erzeugten formal richtigen Satz X und A eintritt. Dasselbe läßt sich, bei festem A, mit der Kombination $A \wedge \neg A$ durchführen. Das Gerät mag noch so schnell laufen, das geschilderte Verfahren genügt noch nicht, die Frage der formalen Entscheidbarkeit und diejenige der formalen Widerspruchsfreiheit *prinzipiell* zu lösen. Es sind damit höchstens Wahrscheinlichkeitsaussagen möglich.

Den technischen Problemen, die vorstehend kurz angedeutet sind, werden heute da und dort intensive Studien gewidmet. Es ist selbstverständlich, daß damit außerordentliche, technisch-nützliche Fortschritte erzielt werden können. Es ist deshalb sachgemäß, wenn im mathematischen Unterricht im richtigen Zeitpunkt auch diese Dinge ihrer grundsätzlichen Natur nach zur Behandlung kommen, an Stelle von veraltetem Stoff, der bloß infolge des bekannten Trägheitsprinzips noch immer mitgeschleppt wird. Im richtigen Zeitpunkt: das heißt nicht zu früh. Verfrüht gegebene Kost kann sich nämlich wie Gift mit unheilbaren Folgen auswirken.

Die historische Entwicklung gibt auch die Hinweise, was in dieser Richtung den 17jährigen zu zeigen ist, nämlich Boolsche Verbände und ihre wichtigsten Modelle in der Mengenlehre, in der elementaren Zahlentheorie und in der formalen Logik.

Die Vermittlung einer Einsicht in das technische Funktionieren eines gegebenen Formalismus läßt dann erst recht aufleuchten, was es bedeute, daß ein solcher eben niemals eine *Intuition* haben kann. Bildlich, aber gewiß allgemein verständlich ausgedrückt: Ein fest gegebener Formalismus spielt sich im Finstern unter der Erdoberfläche ab, während das – formal nicht von vornherein festgelegte - inhaltliche Denken den offenen Himmel über sich hat und damit stets bereit ist, sich neu befruchten zu lassen.

Der folgende Abschnitt bringt einige Bemerkungen zu den aufgeworfenen Fragen.

5.

Während die im letzten Abschnitt erwähnten Untersuchungen betreffend die Probleme der formalen Entscheidbarkeit und der formalen Widerspruchsfreiheit im üblichen Wissenschaftsbetrieb einen anerkannten Bestand darstellen, findet man gegenüber den Fragen der absoluten Entscheidbarkeit und der absoluten Widerspruchslosigkeit weit herum – bildlich gesprochen – ein bloßes Achselzucken. Einen Grund dafür bildet eine gewisse Ohnmacht in der Behandlung der Antinomien.

Nehmen wir die bekannte Frage:

"Welches ist die kleinste natürliche Zahl, die nicht mit weniger als hundert Silben in deutscher Sprache definiert werden kann?"

Man schließt einerseits, daß es nur endlich viele natürliche Zahlen gibt, die mit weniger als hundert Silben definiert werden können, daß es also noch andere natürliche Zahlen gibt, unter denen die kleinste die gesuchte Zahl darstelle. Anderseits folgert man, daß eine solche allenfalls existierende, durch den obigen Satz bestimmte Zahl im Widerspruch zu jenem doch weniger als hundert Silben definiert wäre.

Über solche "Antinomien" wird ernsthaft diskutiert. Ich vermute, daß man schon in naher Zukunft sich darüber wundern wird, wie man ehemals sich durch solche Primitivitäten beirren lassen konnte. Der *Inhalt* der obigen Frage ist nämlich grundsätzlich derselbe wie in der folgenden : Welches ist die kleinste gerade Zahl, die ungerade ist?

Wenn man in der Fragestellung etwas sich Widersprechendes *fordert*, braucht man nicht erstaunt darüber zu sein, daß sich Widersprüche ergeben.

Was an diesem Beispiel leicht zu sehen ist, stellt auch den Kern der vielen bekannten Antinomien der Mengenlehre dar. Nur ist dieser Kern mehr oder weniger verkleidet. An einem grundlegenden Beispiel sei dies erläutert.

Das Wort Menge wird als Bezeichnung eines Begriffes verwendet, der mit einem anderen Begriff, mit demjenigen des Elementes, in einer gewissen Verbindung steht, die gewissen formalen Regeln genügt: Die Menge enthält ein Element oder enthält es nicht. Die Beziehung des Enthaltens sei mit ß bezeichnet.

Nun seien (mindestens zwei) verschiedene Dinge a, b, c, ... gegeben. Wir bilden aus ihnen, soweit es möglich ist, Mengen. Das heißt, wir denken die Begriffe, die die Beziehung ß zu einem oder zu mehreren der gegeben Dinge haben. Auch dies Mengen vereinigen wir, soweit es möglich ist, zu weiteren Mengen. Damit ist eine Vorschrift erklärt, beginnend mit gegebenen Dingen fortlaufend Mengen zu bilden. Nichts hindert uns, von der Gesamtheit der Mengen zu sprechen, sofern wir damit bloß eine abkürzende Bezeichnung meinen.

Es kommen dabei sicher Mengen vor, die sich nicht selbst enthalten. Der Beweis [38] hierfür läuft wie folgt: Es seien a und b zwei verschiedene Dinge. Wir bilden die Menge A, deren einziges Element a ist, die Menge B, deren einziges Element b ist, und die Menge C, deren Elemente a und b sind. Nehmen wir nun an, es würde gleichzeitig gelten $A ß A$, $B ß B$ und $C ß C$, so müßte $A \equiv a$, $B \equiv b$ und $C \equiv a$ oder $C \equiv b$ sein, also $C \equiv A$ oder $C \equiv B$ während C doch von A und B verschieden ist.

Wir können somit aus der vorangehend erklärten Gesamtheit von Mengen diejenigen ins Auge fassen, die sich nicht selbst enthalten. Wir sprechen vom System S dieser Menge U, V, W,.... . Wenn S eine Menge ist, wenn also der Begriff S genau zu den Mengen U, V, W, ... des Systems die Beziehung ß besitzt, so können wir prüfen, ob entweder $S ß S$ oder S nicht $ß S$ gilt.

Wäre $S ß S$, so würde also S eine Menge des Systems darstellen. Dieses besteht aber aus Mengen, die sich nicht selbst enthalten. Somit gilt S nicht $ß S$.

Wäre aber S nicht $ß S$, so würde S eine Menge des Systems darstellen, somit müßte $S ß S$ gelten.

Der selbstverständliche Schluß, der daraus zu ziehen ist, lautet sehr einfach: *Das System S ist keine Menge*. Es zeigt sich eben, daß man zwischen dem bloßen *Nomen* "Gesamtheit" oder "System" und dem wirklichen Begriff Menge streng zu unterscheiden hat. Es ist keineswegs am Platze, sich darüber zu wundern. Wer jenes System doch als eine wirkliche Menge betrachten will, verlangt grundsätzlich dasselbe wie derjenige, der die kleinste gerade Zahl, die ungerade ist, als wirkliche Zahl werten möchte.

Wir könnten so der Reihe nach die bekannten Antinomien der Mengenlehre durchnehmen. Es geht stets darum, daß man nur dann zu solchen kommt, wenn man im Fortgang der Gedankenbildung sich selbst widerspricht. Es ist das der kaum hoch genug einzuschätzende Verdienst des Schweizer Mathematikers *Paul Finsler*, diese Sachlage längst aufgeklärt zu haben[39].

Für den Unterricht mag es interessant sein, ein einfaches Beispiel einer Menge vorzuführen, die sich selbst enthält. Auf die linke Tafel schreibe man:

---

[38] Nach *P. Finsler*: Über die Grundlegung der Mengenlehre , Math.Zeitschrift. 25 (1926), P. 686

[39] *P.Finsler:* Gibt es Widersprüche in der Mathematik? Jahresbericht der Deutschen Math.-Ver. 34 (1925), sowie die in Fußnote [6] angegebene Abhandlung.

A sei die Menge mit den Elementen 1 und 2. *B* sei die Menge mit den Elementen 2 und 3. *C* sei die Menge, deren Elemente alle hier erklärte Mengen sind. Dann gilt *CßA*, *CßB*, *CßC*.

Würde man hingegen auf die linke Tafel schreiben: *A* sei die Menge mit den Elementen 1 und 2, *B* sei die Menge mit den Elementen 2 und 3; und auf die rechte Tafel: *C* sei die Menge, deren Elemente die dort erklärten Mengen sind, so gilt *CßA*, *CßB* und *C* nicht ß*C*.

Solange sich der Mathematiker des inhaltlichen diskursiven Schließens bedient, gilt der Satz, das ein *einziger* Widerspruch die *ganze* Begriffsbildung zu Fall bringt. Wer nun am eigenen Denken in mathematischen Begriffen zu zweifeln beginnt und meint, vielleicht seien Widersprüche doch nicht zu vermeiden, muß aus dieser Ohnmacht *notwendig* auf das Geleise des bloßen Formalismus gedrängt werden. Selbstverständlich lassen sich formale mehrwertige Logiken entwickeln, die als Mechanismen zu diesem oder jenem Zwecke brauchbar sind. Dann ist aber die Mathematik zur bloßen Automatik degradiert.

Nach diesen Hinweisen erinnern wir nun an die zwar wenig bekannte, überragend wichtige, oft verschwiegene, aber - soweit uns bekannt ist - niemals widerlegte Tatsache, die *Finsler* [40] entdeckte. Sie gilt für hinreichend allgemeine formale Systeme, deren Grundsätzen und Regeln (s. Ab. 4) auch ein inhaltlicher Sinn zukommt: *Es lassen sich stets Sätze, also Zeichenkombinationen angeben, die sicher formal widerspruchsfrei sind, aber inhaltlich doch einen angebbaren Widerspruch enthalten.*

Der Beweis hierfür ist keineswegs allzu schwer. Immerhin wäre es wünschenswert, wenn er von verschiedenen Fachleuten neu durchgearbeitet und vielleicht sogar noch vereinfacht werden könnte, damit die Einsicht in diese fundamentale Tatsache, die grundsätzlich über die berühmt gewordene Gödelsche Bemerkung weit hinausgeht, möglichst bekannt würde, in erst Linie in Kreisen der Mathematiklehrer.

Neue Gestaltungen in der Behandlung der Mathematik

In vorangehenden Artikeln wurden einige Probleme gestreift, vor die sich der Mathematiklehrer aller Stufen durch die Wege, die seit einiger Zeit in der Mathematik eingeschlagen worden sind, heute gestellt findet. Der wesentliche Kern dieser Probleme besteht darin, daß die Gedankenlosigkeit geradezu zum Prinzip erhoben worden ist, indem man nämlich die Frage nach dem wirklichen Gedankeninhalt mathematischer Beziehungen verdrängte und die bloß formale Struktur in den Vordergrund rückte. Damit ist nichts gegen die offensichtliche Nützlichkeit der Verwendung von bloß formalen Strukturen gesagt. Es gilt sogar, daß beim Hinblick auf die bloße Nützlichkeit der Mathematik für alle technisch gearteten Anwendungen tatsächlich *der reinen Struktur die maßgebliche Rolle* (hervorg. vom Hrsg.) zukommt.

Im Untergrund der heutigen Entwicklung spielt sich in neuer Form der alte Kampf zwischen Realisten (im scholastischen Sinne) und Nominalisten ab, wobei die letzteren heute vorläufig als Sieger auftreten. Für die technischen Anwendungen der Mathematik mag dies zunächst belanglos erscheinen. Wenn es nur auf diese ankäme, könnte man ruhig abwarten, was die Philosophen über das Problem noch auszumachen vermögen. Heute marschieren diese mehrheitlich in der Gefolgschaft der Nominalisten, wobei sich in der Erkenntnistheorie eine bedauerliche Primitivität eingebürgert hat.

Nicht belanglos ist dies Lage für den Unterricht auf allen Stufen, da es hier um junge Menschen geht.

Das National Council of Teachers of Mathematics (USA)[41] gab Ende 1961 eine Schrift heraus mit dem Titel: The Revolution in School Mathematics, a Challenge for Administrators and Teachers.

---

40 *P. Finsler:* Formale Beweise und die Entscheidbarkeit. Math. Zeitschrift 25

41 National Council of Teachers of Mathematics. 1201 Sixteenth Street, N.S., Washington 6, D.C.

Man ist dankbar für diese Orientierung, da sie in klarer Form die Gründe, praktische Vorschläge und erste Erfahrungen für eine Neugestaltung des mathematischen Unterrichts darlegt und viele Hinweise auf neue Lehrbücher und über einschlägige Organisationen bietet. Als Ausgangssituation wird erklärt, die Entwicklung der Mathematik sei gegenwärtig derart intensiv und folgenschwer, daß sie nur als Revolution beschrieben werden könne. Es werden drei Gründe für diese Lage aufgeführt. Erstens die außerordentliche Ausdehnung der Forschungstätigkeit:

"The twentieth century has been the golden age of mathematics, since more mathematics, and more profound mathematics, has been created in this period than during all the rest of history." Der Jahrgang 1960 der *Mathematical Review* enthalte 1652 große, zweikolonnige Seiten, derjenige des Jahrgangs 1961 wohl mehr als 2400 solcher Seiten. Es wird auf abstrakte Algebra, die Topologie, die Maßtheorie, die allgemeine Funktionalanalysis und Integrationstheorie, die Statistik und die Spieltheorie hingewiesen, die in unserem Jahrhundert entwickelt worden sind.

In der Tat hat eine enorme Entwicklung in die Breite stattgefunden. Prüft man das "goldene Zeitalter" genauer, so stellt man allerdings fest, daß die wesentlichen Ideen fast alle bereits im 19. Jahrhundert konzipiert, wenn auch noch nicht zu ausladenden Theorien ausgearbeitet worden sind.

Als zweiter Grund für die Revolution wird die Automation genannt, die zur Ausführung gewisser technischer Objekte nötig ist. Als Beispiel wird der neue Flugzeugtyp B-70 angeführt: "Its range will be 7000 miles, and it will fly 2000 miles per hour at an altitiude of 70 000 feet. It will be capable of carrying in its thirty-foot bays enough nuclear bombs to blow a small nation off the map."

Als dritter Grund gilt der Umstand, daß heute die elektronischen Rechenanlagen zur Verfügung stehen. Während *W. Shanks* zur Berechnung von π auf 707 Dezimalstellen viele Jahre brauchte, lieferte die *ENIAC* in 70 Stunden mehr als 2000 Dezimalstellen, wobei ein Fehler von *Shanks* Rechnung in der 528. Stelle zum Vorschein kam. Schon 1949 konnten mehr als 3000 Stellen in 13 Minuten bestimmt werden. Um 1960 wurden mehrfach 10 000 Stellen berechnet. Als typisches Beispiel für die heute sich darbietenden Probleme wird die Kontrolle der Bahn eines automatisch gelenkten Geschosses erwähnt.

Die genannten Gründe sollen es notwendig machen, nicht nur viel mehr Mathematiker auszubilden und allgemein die mathematischen Kenntnisse in weiteren Kreisen zu forcieren, sondern den Unterricht auf allen Stufen tiefgreifend umzuwandeln.

Wo bleibt die Kardinalfrage jedes Unterrichtens: nämlich die Entwicklung zur Menschenwürde?

Würden die heute vornehmlich und mit Vehemenz propagierten Methoden durchgängig eingeführt, *ohne gleichzeitig einen Ausgleich in anderer Richtung zu schaffen*, so wäre das Ergebnis eine Katastrophe in zwanzig Jahren. Die einseitige Inanspruchnahme des bloßen Intellekts im Kinde würde als Folge nicht eine wahre Stärkung der Intellektualität, sondern im allgemeinen eine Schwächung und durchgreifende Verflachung ergeben. Man vergißt völlig, daß der gesunde, starkmütige Intellekt eine Blüte ist, zu deren Leben eine vorgängige Entwicklung anderer Fähigkeiten nötig ist.

Wirft man dagegen ein, daß auch die modernen Befunde und Methoden der Psychologie herangezogen werden, daß die raffiniert ausgeklügelten Wege heute es erlauben, den Intellekt schon bei Zehn- bis Zwölfjährigen in Aktion zu setzen, so ist darauf aufmerksam zu machen, daß der derart künstlich aufgeschaukelte Intellekt eine Scheinblüte ist, die den Menschen in ein automatenhaft funktionierendes intellektuelles Bewußtsein hineintreibt, in welchem die Menschenwürde keinen Anker findet.

Ich bin mir bewußt, daß mit diesen Bemerkungen allein recht wenig geholfen ist. Es erscheint mir aber als eine Pflicht, daß gegenüber dem überhandnehmenden strohenen Verabstrahieren auch eine dezidiert andersklingende Stimme zu Wort kommt.

Im folgenden seien einige Vorschläge genannt, die mir für den mathematischen Unterricht mittlerer Stufe als notwendig erscheinen.

Arithmetik und Algebra

1. Mehr Gewicht legen auf das rekursive Rechnen.
2. In die Welt der Eigenschaften der natürlichen Zahlen einführen, was erfahrungsgemäß in der schönsten Weise geschehen kann, und im jungen Menschen die gesunde Kraft des Staunens mit dem noch zarten Intellekt verbindet.
3. Im Aufbauen des Stoffes den Gesamtorganismus der sieben, bzw vier Grundoperationen im Auge behalten, so daß am Schluß dieser Organismus jedem Schüler sichtbar und sogar erlebbar wird.
4. Einführung in die Boolesche Algebra in ihren Elementen und in ihre verschiedenen Anwendungen in der Mengenlehre, Zahlentheorie und formalen Logik. Hieraus in elementarster Form in das Wesen ein facher Formalismen eintreten.
5. In oberen Jahrgängen die Prinzipien der elektronischen Rechenmaschinen erläutern aufgrund der unter Punkt 4 genannten Kenntnisse.

Geometrie

1. In rein zeichnender Geometrie die Fülle der Formenwelt kennenlernen, vor allem auch viele Kurvengestalten.
2. Rein konstruierend die ebene (später auch in den Elementen die räumliche) projektive Geometrie unter steter Beachtung des Dualitätsgesetzes entwickeln. Vor allem die wichtigsten projektiven Transformationen (zentrale Kolineation und andere) zeichnerisch an verschiedenen Figuren darstellen – ohne besondere Theorie - und ihre Sonderformen in der affinen und metrischen Geometrie zeigen.
3. Beweisführungen zunächst ruhig durch vernünftige Inanspruchnahme der Evidenz andeuten, dabei aber nicht so tun, als ob die wissenschaftlich strenge Form erreicht sei. (Je mehr der Lehrer ausgebildeter Mathematiker ist, desto besser weiß er, daß es Unsinn ist, mit Axiomatik anzufangen. Die Axiomatik kommt an den Schluß, als letztes Schema, nachdem man die Fülle wirklich gekostet hat.)

Als historisch und sachlich gegebenes Beispiel dafür, wie das moderne Denken funktioniert, wird man das *lineare Kontinuum*, seine Merkwürdigkeiten und seine begriffliche Bestimmung erläutern, was Anlaß zu fast dramatisch spannenden Schilderungen bietet.

In den *Anwendungen* ist natürlich eine Einführung in die Statistik zu vermitteln. Ferner ist die mathematische Geographie unter besonderer Berücksichtigung des Flugverkehrs zu behandeln.

Die Geometrie ermöglicht es, gegenüber dem abstrakten Element einen künstlerischen Zug als Ausgleich in die Mathematik als Unterrichtsstoff hineinzubringen. In fördernder Weise kann diese allerdings nur demjenigen Lehrer gelingen , der selbst über eine hinreichende Fülle geometrischer Anschauungen verfügt, die heute keineswegs leicht zu erlangen ist.

Im Unterrichten hat freilich das "*Wie*" den Vorrang gegenüber dem "*Was*", so daß mit bloßen Stoffandeutungen noch wenig gesagt ist.

LITERATURHINWEISE

A. Bernhard — Projektive Geometrie;
Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart 1984

H. Kayser — Akróasís, die Lehre von der Harmonik der Welt;
Stuttgart 1964

K. Kommerell: — Das Grenzgebiet der elementaren und höheren Mathematik;
K.F. Köhler Verlag, Leipzig 1936

Elementare Berechnung der Zahl π und der trigonometrischen Funktionen, Archiv der Mathematik und Physik III. Reihe, XXV

L. Locher-Ernst — Von der Gedankenlosigkeit in der Behandlung der Mathematik;
Elemente der Mathematik, Jahrgang 1961 Band XVI, Nr. 5,6

Neue Gestaltungen in der Behandlung der Mathematik;
Elemente der Mathematik, Jahrgang 1962 Band XVII, Nr. 1,2;

Raum und Gegenraum,
Verlag am Goetheanum, Dornach 1957

A. Meschkowski: — Denkweisen großer Mathematiker;
Vieweg Verlag, Braunschweig 1990

B.L. van der Waerden : — Erwachende Wissenschaft;
Birkhäuser Verlag, Basel/Stuttgart 1966

Ziegler, Renatus — Mathematik und Geisteswissenschaft;
Verlag am Goetheanum, Dornach 1992

Rekursives Rechnen

1 Allgemeine Ergänzung[1]

Im Nachlass von Georg Glöckler fanden sich verschiedene Ergänzungen und Korrekturen zu seinem gedruckten Manuskript „Rekursives Rechnen“. Sie werden hier in einer Zusammenfassung dargestellt.

Georg Glöckler zeigt auf Seite 16, dass in der Figur VII die Strecke $AB = p + q$ innen durch den Punkt U in die beiden Strecken p und q und außen durch den Punkt U’ in die beiden Strecken AU’ und BU’ im gleichen Verhältnis geteilt wird: $\frac{p}{q} = \frac{AU}{BU} = \frac{AU'}{BU'}$. Die vier Punkte ABUU’ liegen also harmonisch und das bedeutet: die Strecke UU’ ist harmonisches Mittel der Strecken AU’ und BU’, und die Strecke AB ist harmonisches Mittel der Strecken BU und BU’. Auf Seite 58 leitet Glöckler die Formel

$$UU' = \frac{2pq}{q-p}$$

her. In den ergänzenden Bemerkungen untersucht er nun das Verhältnis $\frac{UU'}{AB}$ dieser beiden harmonischen Mittel UU’ und AB in Abhängigkeit von dem Verhältnis $\lambda = \frac{p}{q} < 1$. Er schreibt:

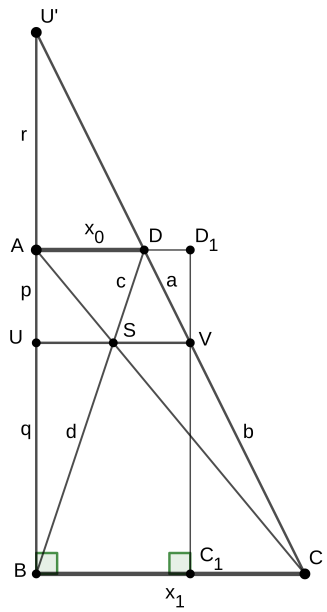


Abbildung 1: Figur VII von Seite 15

> Mit den Mittelbildungen im Teil I sind aber die Gesetze der Figur VII noch keinesfalls ausgeschöpft. Wir wollen im Folgenden ganz allgemein das Verhältnis der beiden harmonischen Mittel UU' und AB untersuchen.
>
> Wir stellen dazu die Ausgangsformeln kurz zusammen:

$$UU' = \frac{2pq}{q-p} \qquad\qquad AB = p + q$$

[1] Zusammenfassung von Peter Baum

Daraus folgt

$$\frac{UU'}{AB} = \frac{2pq}{q^2 - p^2} = \frac{2\frac{p}{q}}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^2} = \frac{2\lambda}{1 - \lambda^2} \qquad \text{mit} \quad \frac{p}{q} = \lambda < 1$$

Es ergibt sich nun die Frage, für welche Werte von λ dieses Verhältnis eine rationale Zahl ist. Anders formuliert: Für welche λ ist

$$\frac{2\lambda}{1 - \lambda^2} = \frac{m}{n}$$

eine rationale Zahl?

Nun löst Glöckler diese quadratische Gleichung nach λ auf und erhält $\lambda = \frac{-n+\sqrt{n^2+m^2}}{m}$. Während es sich bei der rationalen Zahl $\frac{m}{n}$ um einen Bruch mit natürlichen Zahlen m und n handelt, kann das Streckenverhältnis $\lambda = \frac{p}{q}$ auch irrational sein, wie z.B. bei dem Verhältnis der Quadratseite zur Quadratdiagonale. λ ist aber von der Darstellung des Bruches $\frac{m}{n}$ unabhängig, denn für den mit r erweiterten Bruch $\frac{r \cdot m}{r \cdot n}$ ist ebenfalls

$$\lambda = \frac{-r \cdot n + \sqrt{r^2 m^2 + r^2 n^2}}{r \cdot n}$$
$$\lambda = \frac{-n + \sqrt{n^2 + m^2}}{m}$$

Glöckler fährt nun fort:

Aus $\lambda = \frac{-n+\sqrt{n^2+m^2}}{m}$ folgt zunächst unmittelbar die Rationalität von λ und deshalb auch für $\frac{m}{n}$, wenn die Quadratsumme n^2+m^2 selbst eine Quadratzahl ist.

Beispiele:

Für $n = 5$ und $m = 12$ ergibt sich

$$\lambda = \frac{-5 + 13}{12} = \frac{2}{3} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{m}{n} = \frac{2\lambda}{1 - \lambda^2} = \frac{12}{5}$$

Für $n = 12$ und $m = 5$ ergibt sich

$$\lambda = \frac{-12 + 13}{5} = \frac{1}{5} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{m}{n} = \frac{2\lambda}{1 - \lambda^2} = \frac{5}{12}$$

Anmerkung: Dieses Verfahren liefert uns darüberhinaus eine bemerkenswerte Methode zur Ermittlung von Pythagoräischen Zahlentripeln.[2]

1. Beispiel; λ sei irgend eine rationale Zahl < 1, z.B. $\frac{3}{7}$, dann ist

$$\frac{2\lambda}{1 - \lambda^2} = \frac{\frac{6}{7}}{1 - \frac{9}{49}} = \frac{21}{20} = \frac{m}{n} \qquad m^2 + n^2 = 21^2 + 20^2 = 29^2$$

[2](PB) Bekanntlich gewinnt man alle pythagoreischen Zahlentripel (x, y, z) durch die natürlichen Zahlen

2. Beispiel: $\lambda = \frac{13}{17}$

$$\frac{2\lambda}{1-\lambda^2} = \frac{\frac{26}{17}}{1-\frac{169}{289}} = \frac{221}{60} = \frac{m}{n} \qquad m^2+n^2 = 221^2+60^2 = 229^2$$

3. Beispiel: $\lambda = \frac{16}{33}$

$$\frac{2\lambda}{1-\lambda^2} = \frac{\frac{32}{33}}{1-\frac{256}{1089}} = \frac{1056}{833} \qquad m^2+n^2 = 1056^2+833^2 = 1345^2$$

Nun untersuchen wir den Fall wo λ keine rationale Zahl ist.
Aus $\lambda = \frac{-n+\sqrt{n^2+m^2}}{m}$ folgt unmittelbar, dass λ dann eine quadratische Irrationalzahl sein muss. Da aber z.B. $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$ auf

$$\frac{2\lambda}{1-\lambda^2} = 4\sqrt{3}$$

führt ergibt sich die Frage nach denjenigen quadratischen Irrationalzahlen λ, für die

$$\frac{2\lambda}{1-\lambda^2} = \frac{m}{n}$$

eine rationale Zahl ist.

Es wird sich im Folgenden zeigen. dass die gesuchten quadratischen Irrationalzahlen solche sind, die sich durch eine besondere Art von Kettenbrüchen darstellen lassen:
Aus $\frac{2\lambda}{1-\lambda^2} = \frac{m}{n}$ folgt

$$\lambda = \frac{m}{2n+m\lambda}$$

und wegen $m\lambda = \frac{m^2}{2n+m\lambda}$ weiter

$$\lambda = \cfrac{m}{2n+\cfrac{m^2}{2n+\cfrac{m^2}{2n+\cdots}}}$$

(a,b) mit $a > b$ und

$$x = a^2-b^2 \qquad y = 2ab \qquad z = a^2+b^2$$

und für $\lambda = \frac{b}{a}$ erhält man

$$\frac{2\lambda}{1-\lambda^2} = \frac{2\frac{b}{a}}{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{2ab}{a^2-b^2} = \frac{y}{x} \qquad z = a^2+b^2$$

Falls a und b ungerade sind (wie in Beispiel 1 und 2) ist das Tripel (x,y,z) imprimitiv und kann gekürzt werden.

Für $m = 2$ bzw. $n = 1$ ergeben sich dann besonders einfache Kettenbrüche.

1. Fall $m = 2$

$$\lambda = \frac{2}{2n + 2\lambda} = \frac{1}{n + \lambda} = \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{n + \cdots}}} \qquad \lambda = \frac{-n + \sqrt{n^2 + 2^2}}{2}$$

2. Fall $n = 1$

$$\lambda = \cfrac{m}{2 + \cfrac{m^2}{2 + \cfrac{m^2}{2 + \cdots}}} \qquad \lambda = \frac{-1 + \sqrt{m^2 + 1}}{m}$$

Glöckler berechnet nun die Verhältnisse $\frac{UU'}{AB} = \frac{m}{n}$ für den 1. Fall $m = 2$:

$$\begin{array}{lll}
n = 1 & \dfrac{UU'}{AB} = \dfrac{2}{1} & \lambda = [0; 1, 1, 1, \cdots] = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2} = g \\
n = 2 & \dfrac{UU'}{AB} = \dfrac{2}{2} & \lambda = [0; 2, 2, 2, \cdots] = \dfrac{-2 + \sqrt{8}}{2} = \sqrt{2} - 1 \\
n = 3 & \dfrac{UU'}{AB} = \dfrac{2}{3} & \lambda = [0; 3.3.3. \cdots] = \dfrac{-3 + \sqrt{13}}{2} \\
n = 4 & \dfrac{UU'}{AB} = \dfrac{2}{4} & \lambda = [0; 4.4.4. \cdots] = \dfrac{-4 + \sqrt{20}}{2} = \sqrt{5} - 2 = g^3 \\
n = 5 & \dfrac{UU'}{AB} = \dfrac{2}{5} & \lambda = [0; 5, 5, 5, \cdots] = \dfrac{-5 + \sqrt{29}}{2}
\end{array}$$

usw. Für den zweiten Fall mit $n = 1$ erhält er

$$m = 1 \qquad \frac{UU'}{AB} = \frac{1}{1} \qquad \lambda = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}} = \frac{-1 + \sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} - 1$$

$$m = 2 \qquad \frac{UU'}{AB} = \frac{2}{1} \qquad \lambda = \cfrac{2}{2 + \cfrac{4}{2 + \cfrac{4}{2 + \cdots}}} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = g$$

$$m = 3 \qquad \frac{UU'}{AB} = \frac{3}{1} \qquad \lambda = \cfrac{3}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{9}{2 + \cdots}}} = \frac{-1 + \sqrt{10}}{3}$$

$$m = 4 \qquad \frac{UU'}{AB} = \frac{4}{1} \qquad \lambda = \cfrac{4}{2 + \cfrac{16}{2 + \cfrac{16}{2 + \cdots}}} = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}$$

$$m = 5 \qquad \frac{UU'}{AB} = \frac{5}{1} \qquad \lambda = \cfrac{5}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{25}{2 + \cdots}}} = \frac{-1 + \sqrt{26}}{5}$$

Hier enden die allgemeinen Ergänzungen von Georg Glöckler.

Bemerkung:
Mit der Bezeichnung

$$\frac{Z_\nu}{N_\nu} = \left[a_0; \frac{b_1|}{|a_1}, \frac{b_2|}{|a_2}, \frac{b_3|}{|a_3}, \cdots, \frac{b_\nu|}{|a_\nu}\right] = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cdots + \cfrac{b_\nu}{a_\nu}}}}$$

gelten für $\nu = 0, 1, 2, \cdots$ die Rekursionsformeln

$$Z_\nu = Z_{\nu-1} \cdot a_\nu + Z_{\nu-2} \cdot b_\nu \qquad\qquad N_\nu = N_{\nu-1} \cdot a_\nu + N_{\nu-2} \cdot b_\nu \tag{1}$$

mit

$$\begin{aligned} Z_0 &= a_0 & &= Z_{-1} \cdot a_0 + Z_{-2} \cdot b_0 & N_0 &= 1 & &= N_{-1} \cdot a_0 + N_{-2} \cdot b_0 \\ Z_1 &= a_0 \cdot a_1 + b_1 & &= Z_0 \cdot a_1 + Z_{-1} \cdot b_1 & N_1 &= a_1 & &= N_0 \cdot a_1 + N_{-1} \cdot b_1 \end{aligned}$$

also $b_0 = 1$ und

$$Z_{-2} = 0 \qquad\qquad Z_{-1} = 1$$
$$N_{-2} = 1 \qquad\qquad N_{-1} = 0$$

Ist $b_\nu = 1$ für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ nennt man den Kettenbruch regulär.
Beispiel einer Berechnung der Näherungsbrüche:
Aus den Rekursionsformeln (1) ergeben sich für $\lambda = \left[0; \frac{3|}{|2}, \frac{9|}{|2}, \frac{9|}{|2}, \cdots\right] = \frac{\sqrt{10}-1}{3} = 0,72075922\ldots$ nach dem folgenden Berechnungsschema:

ν	-2	-1	0	1	2	3	...
b_ν			1	3	9	9	...
a_ν			0	2	2	2	...
Z_ν	0	1	$1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$	$0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 3$	$3 \cdot 2 + 0 \cdot 9 = 6$	$6 \cdot 2 + 3 \cdot 9 = 39$	...
N_ν	1	0	$0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$	$1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 = 2$	$2 \cdot 2 + 1 \cdot 9 = 13$	$13 \cdot 2 + 2 \cdot 9 = 44$	...

die Näherungsbrüche

$$\frac{3}{2} = 1.5 \quad \frac{6}{13} = 0,64... \quad \frac{39}{44} = 0,88... \quad \frac{132}{205} = 0,643 \quad \frac{615}{806} = 0,76... \quad \frac{2\,418}{3\,457} = 0,699... \quad \cdots$$

Offenbar konvergieren sie sehr schlecht gegen $\frac{\sqrt{10}-1}{3} = 0,72075922\ldots$ Eine viel bessere Näherung gewinnt man durch den regulären Kettenbruch von $\sqrt{10}$.
Wegen $\left(\sqrt{10} - 3\right)\left(\sqrt{10} + 3\right) = 1$ ist

$$\sqrt{10} = 3 + \frac{1}{3 + \sqrt{10}} = 3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \ldots}} = \left[3; \overline{6}\right]$$

und

$$\left(\sqrt{10} - 1\right)\left(\sqrt{10} + 1\right) = 9$$
$$\frac{\sqrt{10} - 1}{3} = \frac{3}{1 + \sqrt{10}} = \cfrac{3}{4 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \ldots}}} = \left[0; \frac{3|}{|4}, \frac{1|}{|6}, \frac{1|}{|6}, \ldots\right]$$

und das Berechnungsschema liefert

ν	-2	-1	0	1	2	3	4
b_ν			1	3	1	1	1
a_ν			0	4	6	6	6
Z_ν	0	1	0	3	18	111	684
N_ν	1	0	1	4	25	154	949

also die wesentlich besseren Näherungsbrüche

$$\frac{3}{4} = 0,75 \qquad \frac{18}{25} = 0.72 \qquad \frac{111}{154} = 0,720779\ldots \qquad \frac{684}{949} = 0,72075869\ldots$$

Allgemein gewinnt man für den 2. Fall mit $n = 1$ wegen
$\left(\sqrt{1+m^2} - m\right)\left(\sqrt{1+m^2} + m\right) = 1$

$$\sqrt{1+m^2} = m + \frac{1}{m+\sqrt{1+m^2}} = m + \cfrac{1}{2m + \cfrac{1}{2m+\ldots}} = \left[m; \overline{2m}\right]$$

und $\left(\sqrt{1+m^2} - 1\right)\left(\sqrt{1+m^2} + 1\right) = m^2$

$$\frac{\sqrt{1+m^2}-1}{m} = \frac{m}{1+\sqrt{1+m^2}} = \cfrac{m}{(1+m) + \cfrac{1}{2m + \cfrac{1}{2m+\ldots}}} = \left[0; \frac{m|}{|1+m}, \frac{1|}{|2m}, \frac{1|}{|2m}, \ldots\right]$$

Für $\lambda = \frac{-n+\sqrt{n^2+m^2}}{m}$ erhält man

$$\frac{\sqrt{n^2+m^2}-n}{m} = \frac{m}{n+\sqrt{n^2+m^2}}$$

und da man jede Quadratwurzel durch einen periodischen regulären Ketttenbruch darstellen kann, ist

$$\sqrt{n^2+m^2} = [a_0; \overline{a_1, a_2, \ldots, a_\nu}]$$

und

$$\frac{\sqrt{n^2+m^2}-n}{m} = \left[0; \frac{m|}{|n+a_0}, \overline{\frac{1|}{|a_1}, \frac{1|}{|a_2}, \ldots \frac{1|}{|a_\nu}}\right]$$

Beispiel: Mit $n = 3$ und $m = 5$ ist $\sqrt{n^2+m^2} = \sqrt{34} = \left[5; \overline{1,4,1,10}\right]$ und

$$\frac{\sqrt{n^2+m^2}-n}{m} = \frac{\sqrt{34}-3}{5} = \left[0; \frac{5|}{|8}, \overline{\frac{1|}{|1}, \frac{1|}{|4}, \frac{1|}{|1}, \frac{1|}{|10}}\right] = 0,566190379\ldots$$

und das Berechnungsschema liefert

ν	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...
b_ν			1	5	1	1	1	1	...
a_ν			0	8	1	4	1	10	...
Z_ν	0	1	0	5	5	25	30	325	...
N_ν	1	0	1	8	9	44	53	574	...

also die Näherungsbrüche

$$\frac{5}{8} = 0,625 \qquad \frac{5}{9} = 0,\overline{5} \qquad \frac{25}{44} = 0,56\overline{81} \qquad \frac{30}{53} = 0,5660\ldots \qquad \frac{325}{574} = 0,566202\ldots$$

2 Kommentar zu S. 4f

Die Formel I auf S. 5 besagt, dass U_{2n} das harmonische Mittel aus u_n und U_n ist, und die Formel II besagt, dass u_{2n} das geometrische Mittel aus u_n und U_{2n} ist. Die Herleitung von II ist etwas kürzer, wenn man die Ähnlichkeit $\triangle ABR \sim \triangle AQR$ in Figur I zugrunde legt, denn daraus folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} \frac{AR}{AB} &= \frac{AQ}{AR} \\ \frac{s_{2n}}{s_n} &= \frac{\frac{1}{2}S_{2n}}{s_{2n}} \\ (2n \cdot s_{2n})^2 &= (n \cdot s_n)\,(2n \cdot S_{2n}) \\ u_{2n} &= \sqrt{u_n \cdot U_{2n}} \end{aligned}$$

3 Ergänzung zu S. 52

Auf S. 52f untersucht Georg Glöckler den Spezielfall $\frac{p}{q} = \sqrt{2} - 1$ und konstruiert hierzu die passende Figur VIIb, indem er $x_0 = 1$ und $p + q = 2$ wählt. Die handschriftliche Ergänzung besagt dann, dass $r = q$ ist, was sofort aus $AB = UU'$ folgt.

In einer weiteren Ergänzung aus dem Nachlass untersucht Glöckler den Spezialfall $\frac{p}{q} = g$ und schreibt:

Spezialfall:

$$\frac{p}{q} = g = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}}$$

dann ist

$$\frac{AU}{BU} = \frac{AU'}{BU'} = g$$

und

$$\frac{AU}{AU'} = \frac{BU}{BU'} = \frac{1 - \frac{p}{q}}{1 + \frac{p}{q}} = \frac{1-g}{1+g} = g^3$$

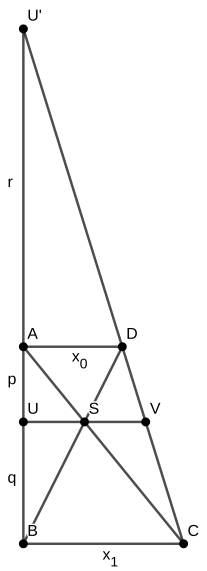


Abbildung 2: Fig. VIIc

Konstruktionsdaten (Abb. 2);

frei gewählt: $AD = x_0 = 1$ $\qquad BA = p + q = 2$

Mit $\frac{p}{q} = \frac{x_0}{x_1} = g$ ist dann $x_1 = \frac{1}{g} = 1 + g =\approx 1.618$.
Dann ist schließlich

$$UU' = \frac{2pq}{q-p} = 4 \qquad\qquad BA = p + q = 2$$

also

$$\frac{UU'}{BA} = 2:1$$

Es ist dann in diesem Fall

$$p = 2g^2 \qquad q = 2g \qquad r = AU' = \frac{2}{g}$$

4 Ergänzung zu S.37

Bei dem 1.Beispiel durchläuft d_n die Zahlenfolge von Fibonacci:
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

5 Korrekturen S. 79

Johann Jakob Balmer (1825 – 1898) fand sein erstes Seriengesetz 1884. Die Konstante in seiner Formel ist const $= 3645,68\,\text{Å}$, $1\text{Å} = 10^{-10}\text{m}$.

Die Formel in Zeile 20 lautet daher $\lim\limits_{m\to\infty} \text{const} \cdot \frac{m^2}{m^2-2^2} = \text{const} = 3645,68\,\text{Å}$.

Die heute übliche reziproke Schreibweise $\frac{1}{\lambda} = R \cdot \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{m^2}\right)$ geht auf den schwedischen Physiker Johannes Robert Rydberg (1854 – 1919) im Jahr 1888 zurück. Man nennt $R = \frac{2^2}{3645,68} \cdot 10^{10}\text{m}^{-1} = 109\,718,9\,\text{cm}^{-1}$ die Rydberg-Konstante.