bleiben, sondern sich alle jeweils auf den ihnen zugehörigen Fluchtpunkt hinbewegen bzw. beziehen. Die Zeichnung gibt hier einen Quader wieder (im Spezialfall kann es auch ein Würfel sein), der zwölf Kanten besitzt, von denen jeweils vier parallel sind und die je einen gemeinsamen Fluchtpunkt haben. Diese drei Fluchtpunkte bestimmen ihrerseits eine Ebene, die Fernebene genannt wird und dem Horizont in den Abbildungen 4 bis 6 entspricht. An die Stelle des Horizontes tritt also jetzt eine Ebene, die gemäss den Gesetzen der Perspektive das unendlich Ferne in die beschreibbare geometrische Anschaulichkeit rückt.

Welche neue Anschauungsform wurde also durch die Maler der Renaissance und die sich daran anschliessende mathematisch-geometrische Erfassung bewusst gemacht? Es zeigt sich hier, dass die bekannten geometrischen Grundelemente Punkt, Gerade und Ebene jetzt in der Funktion von Fernelementen auftreten und zwar in der Form eines Fluchtpunktes, einer Ferngeraden (als Horizont) und einer Fernebene. Durch Berücksichtigung der Fernebene kann eine Form, wie hier der Quader, als von den Fernelementen her bestimmt gedacht werden. Damit kann die punktorientierte Binnenbetrachtung ergänzt werden durch die Perspektive vom Umkreis her. So erscheint ein Kristall – z.B. der Quader eines Kochsalzes – einerseits durch sein Kristallgitter binnenstrukturiert. Andererseits kann er als durch die Fernelemente strukturiert beschrieben werden. Damit sind erstmals die geometrischen Begriffe gebildet, die den Umkreis, d.h. die Peripherie des Raumes, ebenso exakt beschreiben, wie dies die Euklidische Geometrie für die endlich gedachten Formen und Gestalten des Raumes getan hat.

Die perspektivische Betrachtung erweist sich so als eine Raumvorstellung, die zwischen dem endlich gedachten und dem peripherisch gedachten Raum vermittelnd auftritt. Während der euklidische Raum Formen und Gestalten dieser Welt im Endlichen begrenzt denkt und beschreibt und damit zu einem in sich abgeschlossenen Weltbild die Grundlagen liefert, geht der perspektivisch gedachte Raum an die Grenze zur Unendlichkeit, ohne diese *jedoch zu überschreiten*. Das heisst mit anderen Worten: Das Reich des Unendlichen wird hier in Form von Fernebene, Horizontlinie und Fluchtpunkt in die sichtbare Anschauung herübergeholt und macht damit den Umgang mit dem so genannten Unendlichen erstmals gedanklich voll bewusst. Im Bereich der perspektivischen Darstellung werden die Fernelemente konstruktiv funktionell erfasst und damit zeichnerisch handhabbar. Punkte, Geraden und Ebenen können dabei in ihrer Funktion als Fernelemente zeichnerisch gehandhabt werden.

4. Entdeckung und Studium der Projektiven Geometrie – Durchbruch in ein Raumbewusstsein unabhängig von der Sinnesanschauung

Begriffe wie Projektive Geometrie oder Synthetische Geometrie beschreiben Gesetzmässigkeiten, die nicht bei denen der Euklidischen Geometrie und der Perspektive stehen bleiben. Es kommt zur Entdeckung neuer Gesetzmässigkeiten in Form des Polaritätsgesetzes und der Beschreibung von doppel- bzw. geometrischen Mehrfachverhältnissen. Erkannt wurde, dass jedem geometrischen Grundelement (Punkt, Gerade und Ebene) ein Complementäres entspricht: dem Punkt die Ebene, der Ebene der Punkt und der Geraden wieder eine Gerade. Die Gerade ist also zu sich selbst polar. Entsprechend sind z.B. Gebilde wie ebenes Punktfeld und Ebenenbündel zueinander polar.[9]

Das Studium der Projektiven Geometrie führt daher zur Überwindung des einseitig punktzentrierten Bewusstseins zugunsten einer dynamischen Raumvorstellung, die den Kontext, den Umkreis miterfasst. So kann man beispielsweise eine Gerade oder Ebene als Gesamtheit aller diese strukturierenden Punkte auffassen. Dadurch erscheinen solche Gebilde dann als zu-

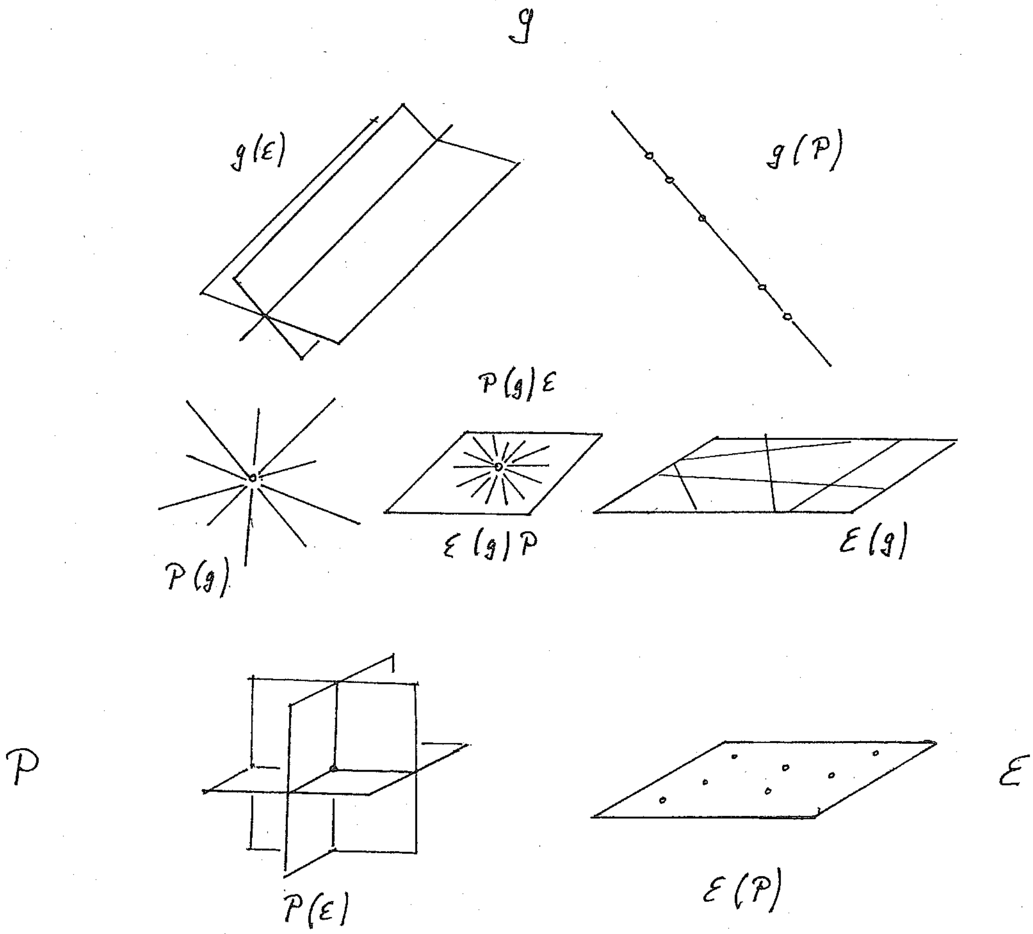
9 Im 19. Jhdt. haben die Mathematiker Poncelet, von Staudt und Reye diese Gesetzmässigkeiten z.T. unabhängig voneinander entdeckt und erforscht.

sammengesetzt bzw. gegliedert durch unendlich viele kleinste Bausteine bzw. Punkte. Umgekehrt können Geraden und Punkte als Gesamtheit aller diese strukturierenden Ebenen aufgefasst werden usw.

Die sieben Grundgebilde des projektiven Raumes:[10]

$P(\varepsilon)$ Ebenen-Bündel	$\leftrightarrow$	$\varepsilon(P)$ ebenes Punktfeld
$P(g)$ Strahlen-Bündel	$\leftrightarrow$	$\varepsilon(g)$ ebenes Geradenfeld
$g(\varepsilon)$ Ebenen-Büschel	$\leftrightarrow$	$g(P)$ gerade Punktreihe

$$P(g)\varepsilon \equiv \varepsilon(g)P$$
Strahlenbüschel



Ein einzelner Punkt kann also durch Ebenen und Geraden gegliedert sein und wiederum eine Gerade durch Ebenen und Punkte. Die drei elementaren Bausteine der Geometrie werden in

10 Louis Locher-Ernst: Urphänomene der Geometrie. Verlag am Goetheanum, Dornach [2]1980.

der Projektiven Geometrie zu völlig gleichberechtigten Anschauungsformen. Dem Punktbewusstsein des euklidisch-geometrisch geschulten Menschen wird ein Geraden- und Ebenen-Bewusstsein an die Seite gestellt, durch das Prozesse, Gestaltungen und Objekte ganz neu in ihrer Raumstruktur verstanden werden können. Der Raum hört auf, nur ein „Gefäss" zu sein, in dem sich Objekte befinden und bewegen. Er wird zu einer dynamischen Qualität, die sich dem Denken erschliesst. D.h. der Raum hört auf, nur eine „Anschauungsform der Sinne" zu sein. Er wird als Idee zu einer Perspektive des Denkens. Praktisch heisst dies, dass jede Gestaltung durch Punkte, Geraden oder Ebenen beschrieben werden kann, allerdings hat Louis Locher Recht, wenn er feststellt, dass es für das Alltagsbewusstsein des modernen Menschen leicht ist, eine Gerade als Gesamtheit ihrer Punkte zu verstehen, wo hingegen wir Mühe haben, eine Gerade als Gesamtheit ihrer Ebenen zu betrachten. Daher hier nochmals einige Übungsbeispiele:

Das gewöhnliche, selbstzentrierte Bewusstsein, das von sich als dem Mittelpunkt des Geschehens ausgeht und von dort aus die Welt betrachtet, kann durch eine solch dreifältige Betrachtungsart in seiner Einseitigkeit erkannt werden. Es kann durch das „Geraden-„ bzw. „Ebenen"-Bewusstsein ergänzt werden. Die Frage ist nur, *woher die Bewusstseinsbildung in Richtung Punkt-, Geraden-, Ebenenbewusstsein ihre jeweilige **Erlebnisgrundlage** bezieht.* Hierzu hat Louis Locher bemerkenswerte Ausführungen gemacht: „In den letzten Jahrzehnten ist man zur Ansicht gelangt, dass die Aufgabe der Mathematik in ihrem gesamten Umfange darin bestehe, Strukturschemata zu liefern, die vom menschlichen Geist nach Zweckmässigkeitsgründen in Anpassung an die Erscheinungswelt ausgedacht werden. Dies bedeutet einen Fortschritt gegenüber der lange herrschenden, früher von Kant vertretenen Meinung, der Raum sei eine festgeprägte Anschauungsform, die man fertig hinzunehmen hat. Einen weiteren Fortschritt wird es bedeuten, zu erkennen, *wie das Denken dazu gelangt, ganz bestimmte Strukturschema dazu zu schaffen.* Um diese Einsicht zu gewinnen, hat man den Menschen in seinem Werden zu betrachten. In den ersten Jahren seines Lebens hat er sich – ohne begriffliches Bewusstsein – in die Vertikale hineingearbeitet, im Zusammenspiel der Funktionen seines rechten und linken Organismus die Breitendimension erlebt, im Visieren mit den beiden Augen – auch mit dem Greifen der Arme – die Tiefendimension verwirklicht. Als Substrat dieser inneren Erlebnisse – nicht als Abstraktion aus der Erscheinungswelt – vermag er, nachdem die Gestalt schaffenden Bildkräfte von ihrer Tätigkeit am physischen Leibe zum Teil entlassen worden sind, im Denken den abstrakten Raum zu bilden. So erscheinen denn die Dimensionen des üblichen Raumes als spätere abstrakte Spiegelbilder früherer organischer Tätigkeiten.

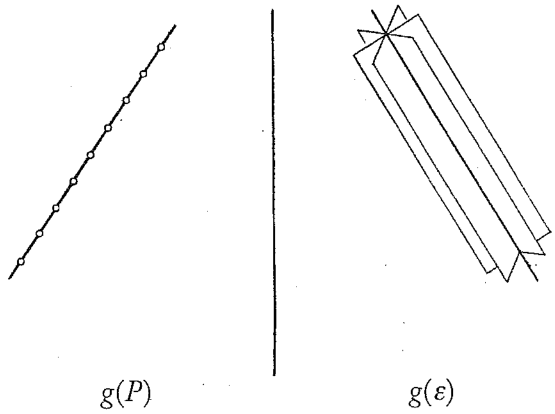


Abb. 8: Die Gerade als Träger von Punkten und als Träger von Ebenen.

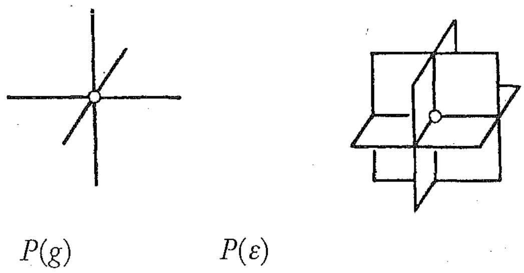


Abb. 9: Punkte erleben wir spontan als Teile eines Ganzen, die Gerade jedoch als Träger dieser Teile. Entsprechend ist es aber auch möglich, den Punkt begrifflich als das Ganze aufzufassen, die Ebenen und Geraden eines Punktes hingegen als dessen Teile anzuerkennen.

Wenn es gelingt, vielleicht ohne unmittelbares Bewusstsein davon, Spiegelbilder im Denken zu schaffen von noch weiter zurückliegenden Tätigkeiten – etwa in den Jahren vor der Geburt, wo die Individualität, auf die Erde niedersteigend, sich mit den Bildekräften aus der Weltumgebung umhüllt – so kommt ein anderer Raumbegriff zustande, nämlich derjenige des Gegenraumes[11].

Festzuhalten ist jedoch, dass dieses Polaritätsgesetz von Punkt und Ebene mit den die beiden vermittelnden Geraden *nicht abgeleitet ist aus Experiment und Beweisführung*, sondern **Phänomen** ist, d.h. axiomatischen Charakter hat. Nachfolgende Zeichnungen bringen diese phänomenale Gesetzmässigkeit in die Anschauung. Bei den Abbildungen 10a und 10b handelt es sich um die Polarisierung eines Würfels, wodurch ein Oktaeder zur Erscheinung kommt. Jeder kann ein solches Oktaeder leicht in einen zuvor gezeichneten Würfel hineinkonstruktieren, indem er dem Polaritätsgesetz folgt und überall da, wo er beim Würfel eine Ebene findet, den Mittelpunkt des die jeweilige Würfelfläche begrenzenden Quadrates setzt. Ebenso muss dem Polaritätsgesetz folgend anstelle der acht Würfelecken (in denen sich drei Kanten schneiden) eine durch drei Geraden begrenzte Ebene erscheinen. Diese acht Ebenen des dadurch entstehenden Oktaeders ergeben sich durch Verbinden der Quadratmittelpunkte der sechs Würfelflächen. Offensichtlich ist, dass es sich bei diesen beiden polar zueinander stehenden Körpern um zwei der fünf platonischen Körper handelt. Denn die fünf sogenannten platonischen Körper zeichnen sich vor allen anderen geometrischen Körpern dadurch aus, dass sie bezüglich ihrer Eckpunkte und Flächen voll regelmässig gegliedert sind. So wie Würfel und Oktaeder einander polar sind, sind dies auch der Pentagondodekaeder (er besteht aus zwölf regelmässigen Fünfecken) und der Ikosaeder (er besteht aus zwanzig regelmässigen Dreiecken). Der fünfte platonische Körper, das Tetraeder, ist zu sich selbst polar.

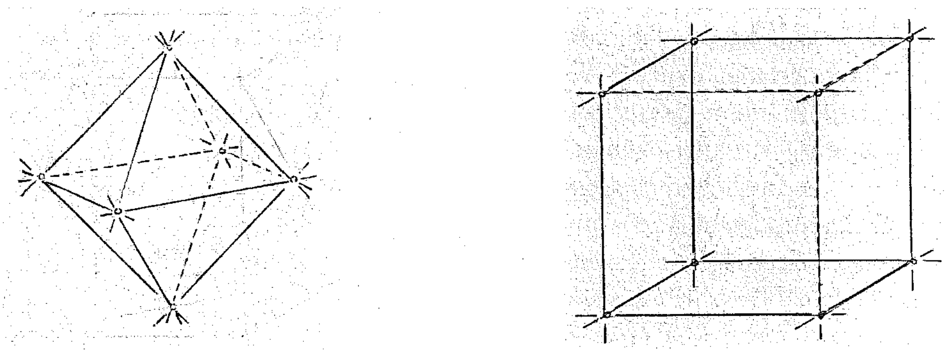


Abb. 10: Hexaeder und Oktaeder sind als voll regelmässige Körper zueinander polar.

Die nachfolgend hier abgebildeten Körper, der Kuboktaeder und der Rhomben-Dodekaeder gehören nicht zu den platonischen Körpern, sie sind jedoch zueinander polar.

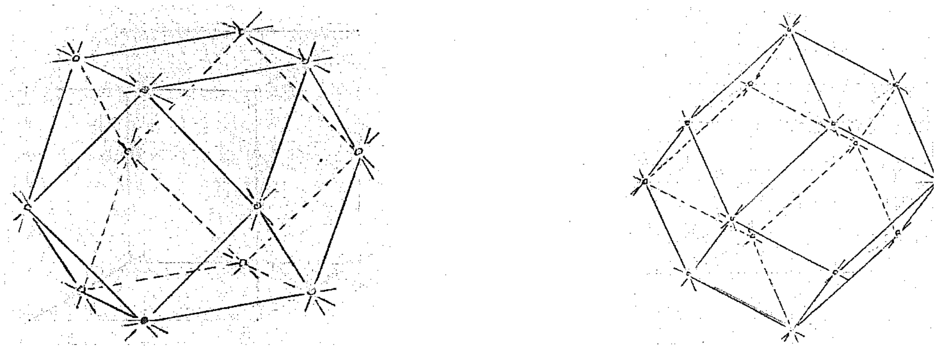


Abb. 11: Kuboktaeder und Rhomben-Dodekaeder sind als halbregelmässige (also nicht platonische) Körper zueinander polar.

11 Vgl. Louis Locher-Ernst: Raum und Gegenraum. Einführung in die neuere Geometrie. Verlag am Goetheanum, Dornach ^{3}1988.

Vom Umgang mit den Fernelementen

Die untenstehenden Abbildungsreihen zeigen zwei geometrische Verwandlungsprozesse in der Ebene, die einen regulären Punkt über das Unendliche hinüberführen. Die erste Reihe nimmt ihren Anfang bei einer Ellipse, deren Punkt B nach oben über das Unendliche hinüberwandert und in der dritten Abbildung von unten zurückgekehrt ist. Aus der Ellipse ist eine Hyperbel geworden. (Abb. 12b zeigt eine Parabel mit dem Fernpunkt B∞) Interessant ist dabei, dass im Bereich der euklidischen Geometrie das Unendliche bei der Hyperbel zwar zeichnerisch schon hereinspielt, dass diese Anschauung aber zunächst nicht zu einer abstrakten Erfassung der Fernelemente führte. (vgl. Abb. 12a, 12b und 12c)

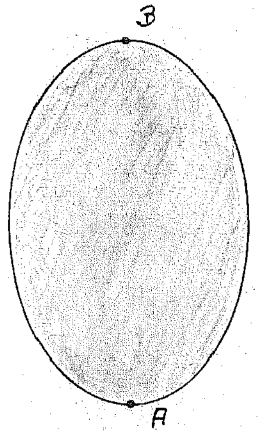


Abb. 12a: Ellipse

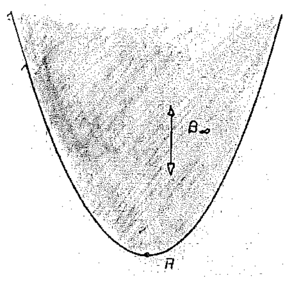


Abb. 12b:
Parabel mit Fernpunkt B∞

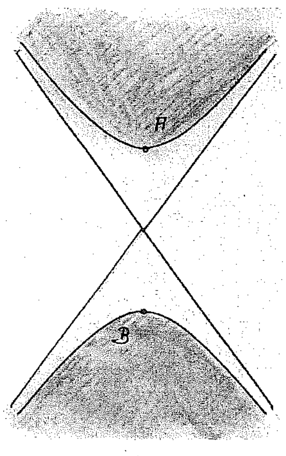


Abb 12c: Hyperbel

Bei der zweiten Reihe steht ein Dreieck am Anfang, dessen Spitze C nach oben über das Unendliche hinübergeführt wird und in der letzten Abbildung von unten wieder herankommt. Nach dem Mathematiker Möbius wird das 4. Dreieck Möbius-Dreieck genannt. (vgl. Zeichnungen 13a, 13b, 13c, 13d)

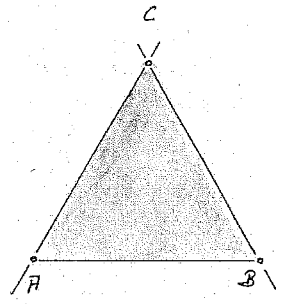


Abb. 13a:
Gewöhnliches Dreieck

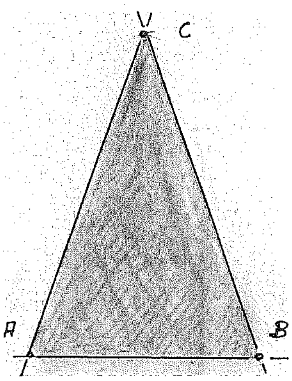
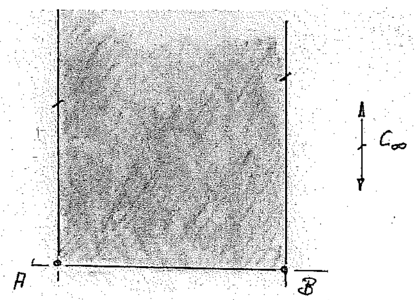


Abb. 13b



Dreieck mit einem Fernpunkt C∞ als „Eckpunkt"

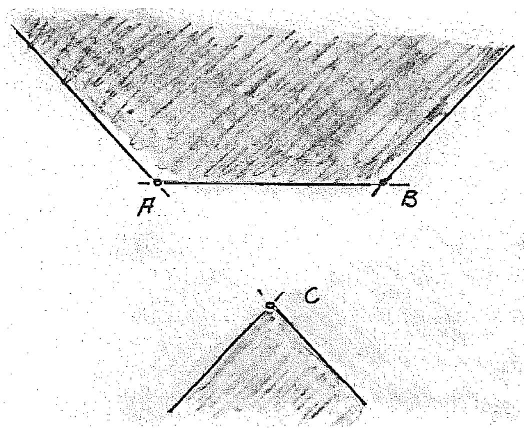


Abb. 13d: Möbius Dreieck