Rechnung:
Deutung: Mit $FS = r$ und $BC = CD = \ldots = s$ sei

$$2\pi \cdot r = 4 \cdot s$$

(Kreisumfang = Umfang des Basisquadrats)

Nun ist $(ST)^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + r^2$ Satz des Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck SFT)

Weiter ist $FT = \frac{s}{2} = \frac{\pi \cdot r}{4}$

Daraus folgt nach kurzer Rechnung:

$$\frac{FT}{ST} = \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + 16}} = 0{,}617667_8$$

Dieser Zahlenwert wird mit der Quotientenfolge bestmöglichster Näherungen[4] für g mit möglichst kleinen Zahlen folgendermassen ausgedrückt (vergl. auch S. 87ff.):

$$\frac{1}{1} / \frac{1}{2} / \frac{2}{8} / \frac{3}{5} / \frac{5}{8} / \frac{8}{13} / \frac{13}{21} / \frac{21}{34} / \frac{874}{1415} \ldots\ldots$$

Man kann dieses Ergebnis folgendermassen formulieren: Wenn die alten Ägypter die Kreiszahl π kannten, dann konnten sie daraus die Zahl „g" symbolisch zum Ausdruck bringen, indem sie diese am „Stelldreieck" zur Erscheinung brachten. Hätten sie hingegen die Zahl „g" des goldenen Schnitts gekannt, dann wäre die Kreiszahl π ihrerseits symbolisch zur Darstellung gekommen im Umfang des „Stellkreises". Für die Kreiszahl π würde sich dann entsprechend unseren Voraussetzungen nach einer kleinen Rechnung folgender Wert ergeben:

$$\pi = 4 \cdot \sqrt{g} \approx 3{,}1446\ldots$$

Es ist wahrscheinlich, dass im Bau der Cheops-Pyramide die geometrische Erkenntnis zur Anwendung kam, dass die Zahl g des Goldenen Schnittes und die Kreiszahl π in ein mathematisches Verhältnis zueinander gebracht werden sollten.

2. Das Pentagramm, die Masszahl g des goldenen Schnitts und vier mit ihr in Zusammenhang stehende fundamentale Einsichten

Warum erfolgt hier ein Beispiel aus der Euklidischen Geometrie? Diese fördert ein Sich-Beheimaten der Seele in der Endlichkeit der irdisch-räumlichen Gegebenheiten. Sie beschreibt deren Messbarkeit, Überschaubarkeit und Strukturiertheit. Sie stützt in jeder Beziehung das Lebensgefühl im Hier und Jetzt, im Alltagsleben, in der sogenannten gegenständlichen Realität. Im Rahmen dieser euklidisch-geometrischen Gesetze nimmt die Geometrie des Pentagramms eine besondere Stellung ein. Denn die hier sichtbar werdenden geometrischen Gesetze führen über die rein geometrische Raumerfassung hinaus in die prozessual-zeitliche Dimension. Es geschieht dies dadurch, dass die am Pentagramm zu entwickelnden Denkformen weit über das reine Erfassen des Pentagramms als einer räumlichen Gestalt hinausweisen. Die am Pentagramm entwickelbaren Denkformen führen zu vier fundamentalen Einsichten.

4 Der Begriff der „Näherung" wird ebenfalls in Abschnitt 2 erläutert

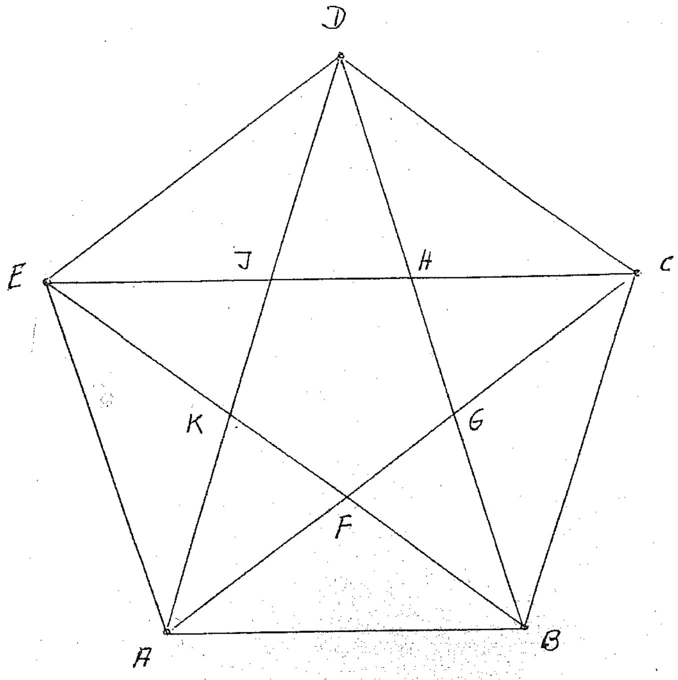

Abb. 2

Aus der Zeichnung ist – bei Voraussetzung elementarer geometrischer Grundkenntnisse – ersichtlich, dass DG = AG = AB ist und die beiden Dreiecke A B D mit B G A ähnlich sind, d.h. zum Beispiel, dass die entsprechenden Winkel gleich sind.
Daraus folgt:

$$\frac{BG}{AB} = \frac{AB}{BD} \text{ und weil } DG = AB \text{ ist, auch } \frac{BG}{DG} = \frac{DG}{BD}$$

Die Strecke BD wird also durch G so geteilt, dass sich die kleinere Strecke (Minor) BG zur grösseren Strecke (Major) DG so verhält, wie die grössere Strecke DG zur ganzen Strecke BD. Diese Teilung nennt man *Goldenen Schnitt* (sectio aurea). Sie kommt häufig in der Natur und der Kunst vor, aber auch in der menschlichen Gestalt. Sie wird daher auch „göttliche Proportion" genannt.[5]

Setzt man nun $BD = 1$ und $DG = g$, dann gilt wegen der obigen Beziehungen:

$$\frac{BG}{DG} = \frac{DG}{BD} \text{ und damit}$$

$$\frac{1-g}{g} = \frac{g}{1} \quad \text{woraus} \quad g^2 + g = 1 \quad \text{folgt.}$$

Dabei ist

$$g = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right) \approx 0{,}61803398_8$$

Die Masszahl g ist also eine quadratisch-irrationale Zahl.

5 vgl. Walther Bühler: Das Pentagramm. Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart 1996.

Alle quadratisch-irrationalen Zahlen lassen sich mit Zirkel und Lineal konstruktiv erfassen. Für g ergibt sich die folgende Konstruktion:

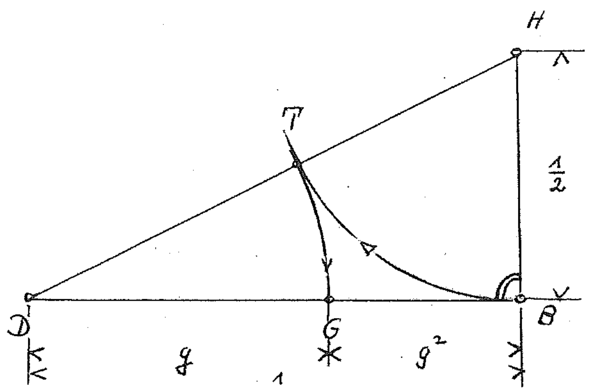

Abb. 3

$$(DH)^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$ (Satz des Pythagoras für das rechtwinklige Dreieck DBH)

daraus folgt

$$DH = \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

und schliesslich

$$DT = DG = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = g$$

Dabei ist $BG = 1 - g = g^2 \approx 0{,}38196601_1$

Mit der Masszahl g des goldenen Schnittes sind nun neben den rein quantitativen Beziehungen eine Reihe von qualitativen Eigenschaften verbunden, deren Charakter weit über den Rahmen des rein Mathematischen hinausgeht. Um diese Eigenschaften sachgemäss beschreiben zu können, müssen wir vorab einen wichtigen Begriff klären, und zwar den Begriff der Näherungswerte von g.

Aus $g^2 + g = 1$ folgt zunächst

$$g = \frac{1}{1+g}$$

Dies ergibt fortgesetzt:

$$g = \frac{1}{1+\frac{1}{1+g}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+g}}} = \cdots\cdots$$

Die Masszahl g kann also als sogenannter Kettenbruch dargestellt werden.

Für diesen Kettenbruch gilt es nun Näherungswerte in Form von Bruchzahlen (sog. Näherungsbrüche) zu finden. Diese ergeben sich nacheinander wie folgt:

$$N_1 = \frac{1}{1} \qquad N_2 = \frac{1}{1+\frac{1}{1}} = \frac{1}{2} \qquad N_3 = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}} = \frac{2}{3} \qquad N_4 = \frac{3}{5}$$

$$N_5 = \frac{5}{8} \qquad N_6 = \frac{8}{13} \qquad \text{etc.}$$

$N_6 = \frac{8}{13}$ ist schon ein brauchbarer Näherungswert für g. Es ist nämlich

$$\frac{8}{13} = 0{,}615_4$$

Aus dem Vorangehenden kann man auch das Bildungsgesetz der hier dargestellten Näherungsbrüche N_1, N_2, N_3 usw. erkennen. Bei diesen Näherungsbrüchen treten Zahlen im Zähler und Nenner auf, die einer berühmten Zahlenfolge angehören, der von Fibonacci[6] gefundenen Fibonacci-Folge:

$$\begin{aligned}
f_1 &= 1\\
f_2 &= 1\\
f_3 &= 1 + 1 = 2\\
f_4 &= 1 + 2 = 3\\
f_5 &= 2 + 3 = 5\\
f_6 &= 3 + 5 = 8\\
f_7 &= 5 + 8 = 13\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Allgemein formuliert: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ (für n = 3, 4, ...)

Bei einer Fibonacci-Folge ist ein Glied die Summe der beiden Vorhergehenden. Daraus ergibt sich für die obige Folge der Näherungswerte für g die Folge der Quotienten aus jeweils zwei aufeinander folgenden Fibonacci-Zahlen. Die Fibonacci-Zahlen selbst sind folglich mit der Masszahl g konstitutiv verbunden.

Vier fundamentale Einsichten im Zusammenhang mit der Masszahl g

1. Es gibt Prozesse, welche sensibel von den Ausgangsbedingungen abhängen. Dies lehrt die sogenannte Chaostheorie. Im Allgemeinen gehen aber die Ausgangsbedingungen in das Endresultat mitbestimmend ein.

   Darüber hinaus aber gibt es Prozesse, *die stärker sind als die Ausgangsbedingungen,* d.h. der Prozess *als solcher* überwindet seine Ausgangsbedingungen.

---

6 Leonardo von Pisa, genannt Fibonacci. Geboren zwischen 1170 und 1180, gestorben ca. 1240.

Dass sich g durch die Folge der Näherungswerte N_1, N_2, N_3 immer besser approximieren lässt, wissen wir schon. Würden wir aber anstelle der Ausgangswerte f_1 und $f_2 = 1$ irgendwelche Ausgangswerte z.B. $a_1 = 1$ $a_2 = 3$ mit $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ (für n = 3, 4, 5, ...) setzen und den gleichen arithmetischen Prozess darauf anwenden, so würde die Folge der Näherungswerte auch gegen g streben.

Beispiel:

$a_1 = 1$
$a_2 = 3$
$a_3 = 4$
$a_4 = 7$
$a_5 = 11$
$a_6 = 18$

$$N_1 = \frac{1}{3} \qquad N_2 = \frac{3}{4} \qquad N_3 = \frac{4}{7} \qquad N_4 = \frac{7}{11} \qquad N_5 = \frac{11}{18}$$

$$N_6 = \frac{18}{29} \qquad N_7 = \frac{29}{47} \qquad N_8 = \frac{47}{76} \qquad N_9 = \frac{76}{123} \qquad N_{10} = \frac{123}{199}$$

$$N_{10} = \frac{123}{199} \approx 0{,}618_1 \cdots\cdots$$

Die zugehörige mathematische Beweisführung lässt sich z.B. so formulieren:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_n + a_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}} = \frac{1}{1+g}, \text{ was zu zeigen war.}$$

Dieses Prinzip lässt sich z.B. auch in der Homöopathie auffinden.

Das Potenzieren in der Homöopathie beruht auf zwei Grundprinzipien:

- der Wiederholung des Verdünnungsprozesses mit dem Ergebnis einer zahlenmässig erfassbaren Reihe, z.B. als Zehnerpotenzen D_1, D_2, D_3, in dem ein Teil Ausgangssubstanz mit 9 Teilen eines empfänglichen Mediums innigst durchmischt werden,
- der Aufnahme der Ausgangssubstanz durch den Schüttelvorgang im Medium Wasser oder dem Durchmischungsvorgang im Medium Milchzucker. Diese Aufnahme ins Medium kann einerseits als Verdünnung aufgefasst werden, andererseits erfolgt eine Verwandlung der Substanz, da diese im immer weiter Zerteilt-Werden ihr Geistig-Wesenhaftes in das Medium entlässt. Der Prozess des Aufgenommen-Werdens und sich dem Medium Einprägens wird stärker als die Ausgangssubstanz. Damit ist eine Gedankenform gewonnen, die es ermöglicht, den Übergang von statisch-räumlichen Verhältnissen zu prozessual-zeitlichen *Wirksamkeiten* deutend zu erfassen und zu verfolgen.

Ein dem Potenzieren analoger Vorgang ist der arithmetisch unendliche Prozess, der unabhängig von den beiden Ausgangszahlen zur Masszahl g geführt hat. Die Ausgangszahl entspricht der Ausgangssubstanz; die Masszahl g dem vollständigen „Sterbe-“ bzw. Vergeistigungsvorgang des Prozesses.

2. Typisch für einen Organismus ist die Tatsache, dass in seinen Teilen immer die Ganzheit wirkt. Einige herausragende Beispiele dafür sind Seesterne oder die Pflanze Bryophyllum, die unmittelbar in der Lage sind, aus einem ihrer Teile (etwa bei Isolierung) sich als Ganzes wieder hervorzubringen. Man betrachte dazu auch das in Abschnitt 4 Dargestellte. Genau auf diesen qualitativen Sachverhalt stossen wir bei der Betrachtung der Masszahl g. Es ist nämlich

$$\underline{g} = \frac{1}{1+\underline{g}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\underline{g}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\underline{g}}}} = \cdots\cdots$$

Im Lebendigen gilt das Gesetz, dass das Ganze mehr ist als die Summe seiner Einzelteile. Durch die Wechselwirkungen, durch die jedes mit jedem verbunden ist, entzieht sich jeder Lebensvorgang einer linear-kausalen Beschreibung. Komplexen Wirkungszusammenhängen wohnen scheinbar einfache Lebensrhythmen und -wirkungen inne, wie die der Masszahl g und der ihr innewohnenden unendlich vielen Bezüge und Rückbezüge.

3. Es gibt Prozesse, die langsamer als andere verlaufen. Der Prozess der Menschenwerdung, vor allem was seine Gestalt als homo sapiens betrifft, ist im Vergleich mit den Säugetieren am langsamsten. Dabei ist die menschliche Gestalt vom Goldenen Schnitt ganz und gar durchproportioniert.[7] Der Mensch tritt innerhalb der Evolution als Letzter der Arten in Erscheinung. Er steht am Ende der Entstehung der Arten („eine Sekunde vor 12") und integriert sie mit ihren Prozessen und Fähigkeiten in einer neuen Schlichtheit, Schönheit, Einfachheit.

Nun kann man zeigen, dass irgendeine irrationale Zahl durch die Näherungsbrüche ihrer Kettenbruchentwicklung bestmöglichst angenähert werden kann. Dies bedeutet z.B. konkret, dass es z.B. für 8/13 als Näherungsbruch von g keine Bruchzahl mit kleineren Zahlen im Zähler und im Nenner gibt, die eine bessere Näherung von g wäre. Vergleicht man nun weiter die verschiedenen Folgen von Näherungsbrüchen für irrationale Zahlen, so ergibt sich die zugehörige Folge für g als diejenige, deren Zahlen im Zähler und im Nenner am *langsamsten* wachsen.

Drei Beispiele für Folgen bestmöglichster Näherungen für die Maßzahlen g, h und k:

$g = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$: $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{8}{13} \cdots$ langsamstes „Wachstum" der Zahlenwerte

$h = \sqrt{2}-1$: $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{12}{29} \cdot \frac{29}{70} \cdot \frac{70}{169} \cdots$ schnelleres „Wachstum"

$k = \sqrt[3]{5}$: $\frac{1}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{22}{31} \cdot \frac{71}{100} \cdot \frac{235}{331} \cdots$ noch schnelleres „Wachstum"

Es zeigt sich, *dass unter allen irrationalen Zahlen g diejenige ist, deren schrittweise Annäherung durch bestmögliche Näherungen die langsamste von allen ist.* So wird mathematisch unmittelbar verständlich, warum der Goldene Schnitt mit seiner Masszahl g in den Proportionen des menschlichen Körpers die alles Beherrschende ist. Durch die Langsamkeit seiner Entwicklung

7 vergl. die schönen Darstellungen und Bezüge bei Walter Bühler (s. Anm. 6)

hat der Mensch die Möglichkeit „seelisch mitzukommen“, „dabei zu sein“, „verbindlich zu werden“, Identität zu entwickeln. Es zeigt sich daran auch, warum *Geduld* die Kerntugend aller Erziehungs- und Entwicklungsarbeit ist.

4. Für alle Fibonacci-Zahlen und auch für g ergibt sich die bemerkenswerte Tatsache, *dass sie sich aus sich selbst heraus rekonstituieren.* Dazu drei Beispiele:

   a) Rekonstituierung durch Quadrate der Fibonacci-Zahlen

allgemeines Gesetz: $\sum_{1}^{n} (-1)^{n+1} f_{2n-1} = (-1)^{n+1} fn^2$ (für n = 1, 2, ...)

Also z.B.

$$\begin{array}{ll}
1 & = 1 \\
1-2 & = -1^2 \\
1-2+5 & = 2^2 \\
1-2+5-13 & = -3^2 \\
1-2+5-13+34 = 5^2 & = 5^2 = f_1 - f_3 + f_5 - f_7 + f_9 - f_5^2 \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

   b) Rekonstruktion einer Fibonacci-Zahl aus dem gesamten Spektrum derselben:

   allgemeines Gesetz: $f_{n+v-2} = f_v \cdot f_n - f_{v-2} \cdot f_{n-2}$

   Also z.B.

$$\begin{array}{l}
\qquad \vdots \\
34 = 5 \cdot 8 - 2 \cdot 3 = f_5 \cdot f_6 - f_3 \cdot f_4 \\
\quad = 3 \cdot 13 - 1 \cdot 5 \\
\quad = 2 \cdot 21 - 1 \cdot 8 \\
\quad = 1 \cdot 34 - 0 \cdot 13 \\
\qquad \vdots
\end{array}$$

   c) Rekonstituierung von g aus dem gesamten Spektrum der Fibonacci-Zahlen:

allgemeines Gesetz: $(-1)^{n+1} \cdot g = (f_n + f_{n-1} \cdot g) \cdot (f_n \cdot g - f_{n-1})$ (für n = 1, 2, ...)
Also z.B.

$$\begin{array}{rlcl}
g = & (1-0) & \cdot & (g-0) \\
-g = & (1+g) & \cdot & (g-1) \\
g = & (2+g) & \cdot & (2g-1) \\
-g = & (3+2g) & \cdot & (8g-2) \\
g = & (5+3g) & \cdot & (5g-3) \\
\vdots & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

Auch diese Beispiele zeigen mathematische Gedankenformen, die den Lebensvorgängen eigen sind: Will man das Leben als solches charakterisieren, so steht als erstes die Fähigkeit, sich aus sich selbst heraus zu erneuern bzw. sich zu rekonstituieren, ganz im Vordergrund. Das schönste Beispiel dafür ist die Pflanzenwelt selbst. Im 19. Jahrhundert haben Schimper und Braun die Anordnung der Blätter um den Stängel herum untersucht (die sog. Phylotaxis). Blätter wachsen in Spiralform um den Stängel herum, wobei der Winkel zwischen zwei aufeinander folgenden Blättern konstant ist. Auf den Vollkreis bezogen ergeben sich dann für die am häufigsten auftretenden Blattstellungen, ausgedrückt durch Bruchzahlen, die folgenden:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{13}, \frac{8}{21}, \frac{13}{34}, \frac{21}{55}, \frac{34}{89} \ldots$$

Das sind die Brüche, die man erhält, wenn man in der Fibonacci-Folge immer ein Glied überspringt. z.B. entsprechen der Blattstellung $\frac{2}{5}$ der Rose 5 Blätter bei 2 Stängelumwindungen. Diese überraschenden Tatsachen hatte wohl schon Johannes Kepler im Auge, als er die folgenden Sätze formulierte:

„In der Ähnlichkeit dieser aus sich selbst heraus entwickelnden Folge bildet sich meiner Meinung nach die Fähigkeit zur Ausbreitung ab. Deshalb ist in Pflanzen das Kennzeichen dieser Fähigkeit, das Pentagramm, nämlich zu sehen. Alle weiteren Beweise, die man nach langem Grübeln hierfür anbringen kann, übergehe ich an dieser Stelle.“[8]

Die häufigsten Blattstellungen, als Folge der obigen Bruchstellen geschrieben, weisen auf eine zweite bemerkenswerte Tatsache hin: Diese Folge strebt nämlich nicht gegen g, sondern gegen die 1. Potenz von g, nämlich g^2. Denkt man dabei an die Anschauung Goethes von der Urpflanze, die in ihren Ausgestaltungen den verschiedenen Typen der Pflanzen entspricht, dann hat man in der obigen Quotienten-Folge das dafür arithmetische Korrelat. Dieses weist darauf hin, dass die Pflanzenwelt uns in ihren Bildeprozessen schon zeigt, dass sie das Potenzierungsgesetz im Ansatz in sich trägt.

Die angeführten vier fundamentalen Einsichten mit Bezug auf die Masszahl g weisen unmittelbar auf den Bereich des Lebendigen hin. Dieser ist gekennzeichnet durch Prozesse der Integration, der Wechselwirkung, der Potenzierung, der Vereinfachung, der Reproduzierbarkeit. Gedankenformen aus Mathematik und Geometrie des Goldenen Schnittes können dazu beitragen, die „Intelligenz“ lebender Systeme transparent zu machen und die raum-zeitlichen Gesetze des Lebens zu studieren.

8 Zitiert nach David Wells: Das Lexikon der Zahlen. Fischer-Taschenbuch-Verlag, S. 66.