5. "DER PROZEß ALS SOLCHER IST STÄRKER ALS DIE AUSGANGSDATEN"

5.1. Eine arithmetische Betrachtung

Ausgangsvoraussetzungen: Gegeben seien die positiven Größen x_0 und x_1.

Daraus bilden wir die Folge:

$$x_2 = ax_1 + bx_0 \qquad \text{(mit } a > 0 \text{ und } b > 0\text{)}$$
$$x_3 = ax_2 + bx_1$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2} \qquad \text{VIII}$$

Schließlich bilden wir daraus die Quotientenfolge $q_n = \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ $\quad n = 0,1,2,3\ldots$

Also
$$q_1 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{ax_1 + bx_0}{x_1} = a + \frac{b}{q_0}$$
$$q_2 = \frac{x_3}{x_2} = \frac{ax_2 + bx_1}{x_2} = a + \frac{b}{q_1}$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$q_n = a + \frac{b}{q_{n-1}}$$
$$= a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{q_{n-2}}}$$
$$= \ \cdots$$
$$q_n = a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{\ddots \, a + \cfrac{b}{q_0}}}}$$

Beispiel:
$$q_3 = a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{q_0}}}$$
mit $q_0 = \dfrac{x_1}{x_0}$

(4-gliedriger Kettenbruch)

Daraus folgt weiter mit $q = \lim\limits_{n\to\infty} q_n$:

$$q = a + \frac{b}{q}$$
$$q^2 = aq + b \qquad \text{IX}$$
$$q = \frac{a}{2} \underset{(-)}{+} \sqrt{\frac{a^2}{4} + b} \qquad (q > 0, \text{ weil } a, b, x_0, x_1 > 0)$$

Drei ergänzende Bemerkungen

1. Für a=2 und b=1 und den Anfangswerten x_0=2 u. x_1=6 sei der folgende unendliche Prozeß betrachtet:

$$q_0 = \frac{x_1}{x_0} \qquad = 3 \quad = 3$$

$$q_1 = 2 + \frac{1}{q_0} \qquad = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \quad = 2{,}\overline{3}$$

$$q_2 = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{q_0}} \qquad = 2 + \frac{3}{7} = \frac{17}{7} \approx 2{,}4286$$

$$q_3 = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{q_0}}} = 2 + \frac{7}{17} = \frac{41}{17} \approx 2{,}4118$$

$$q_4 \qquad = 2 + \frac{17}{14} = \frac{99}{41} \approx 2{,}4146$$

$$\vdots \qquad \vdots \quad \vdots$$

Nach den vorangehenden Betrachtungen ist $q = \lim\limits_{n \to \infty} q_n$ und q läßt sich aus der Gleichung IX ermitteln, ist ersichtlich unabhängig von der Wahl der Ausgangsgrößen x_0 und x_1. In diesem Falle ist dann $q = 1 + \sqrt{2} \approx 2{,}4142$.

An dem obigen Prozeß läßt sich sehr schön überblicken, wie mit steigendem Index n der Ein-fluß des Gliedes $\frac{1}{q_0}$ (und damit der Einfluß der Ausgangsgrößen x_0 und x_1) auf q_n in dem Maße zurücktritt, als sich q_n dem Grenzwert q nähert. Im Grenzfall $q_n \to \infty$ ist dieser Einfluß dann verschwunden. Der Prozeß als solcher hat sich durchgesetzt. Man vergleiche diesen Gedanken mit dem Prozeß des homöopathischen Potenzierens.

Der Einfluß des Gliedes $\frac{1}{q_0}$ im jeweiligen Kettenbruch auf den Wert q_n läßt sich am besten aus der Differenz zu seinem Näherungsbruch N_n ermitteln. Unter Näherungsbruch wollen wir den entsprechenden Kettenbruch ohne $\frac{1}{q_0}$ verstehen. Demnach ist also:

$$q_1 - N_1 = \frac{7}{3} - 2 \qquad = \frac{1}{3}$$

$$q_2 - N_2 = \frac{17}{7} - \left(2 + \frac{1}{2}\right) \quad = -\frac{1}{14}$$

$$q_3 - N_3 = \frac{41}{17} - \left(2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{85}$$

$$q_4 - N_4 \qquad = -\frac{1}{492} \text{ etc.....}$$

2. Die Darstellung des Grenzwertes q als unendlicher Kettenbruch in der Form

$$q = a + \frac{b}{q} \quad \text{oder z. B. als} \quad q = a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{q}}}$$

zeigt, wie hier das Ganze (nämlich q) im Teil (als Glied des Kettenbruches) steckt. Man vergleiche diesen Gedanken mit den Erscheinungsformen des Lebendigen, z.B. einer Pflanze oder einem Seestern.

3. Aus dem Vorangehenden läßt sich auch eine Methode zur Ermittlung von Näherungen an eine der positiv reellen Lösungen einer quadratischen Gleichung entwickeln.

Es gelten die Beziehungen:

$$x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2} \qquad \text{VIII}$$

$$q^2 = aq + b \qquad \text{IX}$$

$$q_n = \frac{x_{n+1}}{x_n} \qquad \text{(c)}$$

$$\lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = q$$

Zunächst entnimmt man der quadratischen Gleichung IX die Koeffizienten a und b, wodurch die Rekursionsfolge x_n bestimmt ist. Mit *irgend welchen* Anfangswerten $x_0 > 0$ und $x_1 > 0$ kann nun der Rekursionsprozeß für x_n in Gang gesetzt werden.

Im Fall der 1. Bemerkung war $a = 2$, $b = 1$ und wir wählen $x_0 = 1$ und $x_1 = 4$.

Damit ist

$$\begin{aligned} x_2 &= 2\cdot 4+1 &&= 9 \\ x_3 &= 2\cdot 9+4 &&= 22 \\ x_4 &= 2\cdot 22+9 &&= 53 \\ x_5 &= 2\cdot 53+22 &&= 128 \\ x_6 &= 2\cdot 128+53 &&= 309 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Daraus folgt dann die Quotientenfolge $q_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$, die gegen q strebt. Es ist also:

$$\begin{aligned} \frac{x_3}{x_2} &= \frac{22}{9} = 2{,}\overline{4} \\ \frac{x_4}{x_3} &= \frac{53}{22} = 2{,}\overline{409} \\ \frac{x_5}{x_4} &= \frac{128}{53} = 2.4151 \\ \frac{x_6}{x_5} &= \frac{309}{128} = 2{,}4141 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Der Grenzwert $q = \lim_{n\to\infty} q_n$ ist in diesem Fall $q = 1 + \sqrt{2} .= 2{,}4142..$

5.2. Eine geometrisch - arithmetische Betrachtung

a) Das Entstehen eines Quadrates aus einem "Viereck-Keim"

Wir gehen von einem Quadrat aus und ermitteln zwei Beziehungen, aus denen sich die Inkommensurabilität von Diagonale und Seite leicht nachweisen läßt:

Es seien die folgenden Bezeichnungen gewählt:

$AC = d_1$

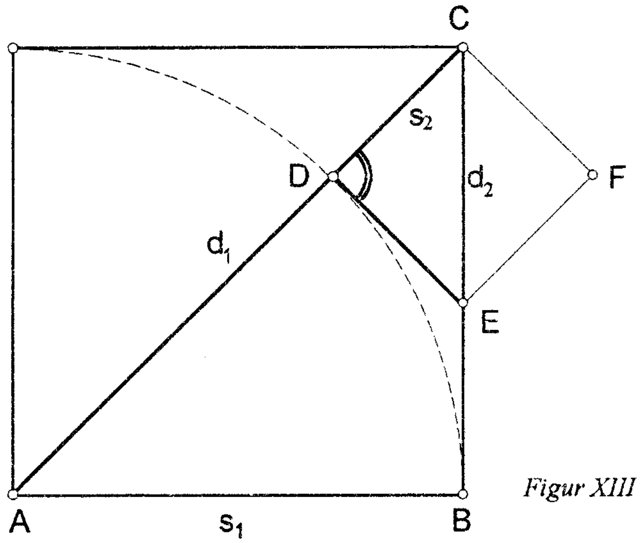
$AB = AD = s_1$

$CD = DE = BE = s_2$

$CE = d_2$

Dann gilt:

$s_2 = d_1 - s_1$ und $d_2 = s_1 - s_2$



Figur XIII

Wendet man das gleiche Verfahren auf das Quadrat *CDEF* an und setzt diesen Prozeß sinngemäß fort, so erhält man die folgenden Beziehungen:

$$\boxed{\begin{aligned} s_n &= d_{n-1} - s_{n-1} \\ d_n &= s_{n-1} - s_n \end{aligned}} \quad \text{X}$$

Dabei sind s_n und d_n "werdende Nullen", wobei ihr Verhältnis q für alle n das gleiche ist. Wir berechnen nun für alle n dieses konstante Verhältnis mittels der Rekursionsformel X:

$$q = \frac{d_n}{s_n} = \frac{s_{n-1} - s_n}{d_{n-1} - s_{n-1}} = \frac{s_{n-1} - d_{n-1} + s_{n-1}}{d_{n-1} - s_{n-1}}$$

$$= \frac{2s_{n-1} - d_{n-1}}{d_{n-1} - s_{n-1}}$$

$$= \frac{2 - \dfrac{d_{n-1}}{s_{n-1}}}{\dfrac{d_{n-1}}{s_{n-1}} - 1}$$

$$= \frac{2-q}{q-1} \qquad \text{Also:} \quad q^2 = 2 \quad \text{oder} \quad \frac{d_{n-1}}{s_{n-1}} = \sqrt{2} \quad \text{für } n = 2,3,4\ldots$$

Nun führen wir eine Vertauschung durch, deren Sinn erst erkannt sein will. Wir ersetzen den Index n-1 durch n und umgekehrt. Damit ergibt sich aus den Formeln X:

$$s_{n-1} = d_n - s_n$$
$$d_{n-1} = s_n - s_{n-1}$$

und weiter:

$$d_n = s_n - s_{n-1} = d_{n-1} + s_{n-1} + s_{n-1}$$

$$\boxed{\begin{aligned} d_n &= d_{n-1} + 2s_{n-1} \\ s_n &= d_{n-1} + s_{n-1} \end{aligned}} \qquad \text{Xa}$$

Ausgehend von *irgendeiner Raute* (mit den willkürlich gewählten Seiten s_1 und der Diagonale d_1) als "Keim" erhält man so eine Folge immer größer werdender Rauten, die immer quadratähnli-cher werden. Der rekursive Prozeß ist also auch hier stärker als die Ausgangswerte.

Theon von Smyrna schrieb dazu: "Wie die Einheit hier allen Dingen gemäß dem obersten und dem einem Samenkorn ähnlichen Verhältnis am Anfang steht, so wird auch das Verhältnis von Durchmesser zur Seite in der Einheit gefunden."

Plato nennt im *Staat* (546c) die Zahl 7 die "rationale Diagonale" zur Seite 5 gehörend. In dem Kommentaren des Proklos (450 n.Chr.) zum Staat findet sich dazu folgende Erläuterung die Seiten- und Diagonalenzahlen betreffend, die er den Pythagoreern zuschreibt:

> "Die Einheit ist, als Ursprung aller Zahlen, potentiell sowohl Seite als auch Diagonale. Man nimmt jetzt zwei Einheiten: eine Seite und eine Diagonale-Einheit, und bildet eine neue Seite, indem man zu der Seite-Einheit die Diagonale-Einheit hinzufügt, und eine neue Diagonale, indem man zu der Diagonale-Ein-heit zweimal die Seite-Einheit hinzufügt." [5]

Die Formel Xa ermöglicht uns nun die Berechnung der Seiten und Diagonalen der Folge der Rauten, die immer quadratähnlicher werden, entsprechend dem obigen Kommentar des Proklos:

n	s_n	d_n
1	1	1
2	2	3
3	5	7
4	12	17
5	29	41

Bemerkungen:

Wir ermitteln noch den Grenzwert von $q_n = \frac{d_n}{s_n}$ für $n \to \infty$.

Es ist:

$$\frac{d_n}{s_n} = \frac{2s_{n-1} + d_{n-1}}{s_{n-1} + d_{n-1}} = \frac{2 + \frac{d_{n-1}}{s_{n-1}}}{1 + \frac{d_{n-1}}{s_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{d_{n-1}}{s_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{1 + \frac{d_{n-2}}{s_{n-2}}}}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{d_n}{s_n} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \cdots}} = \sqrt{2}$$

Arithmetisch bedeutet dies:

q_n ist hier nicht von vorneherein gleich $\sqrt{2}$, sondern q_n unterscheidet sich mit wachsendem Index immer weniger von $\sqrt{2}$ oder anders ausgedrückt

$$\lim_{n \to \infty} q_n = \sqrt{2}$$

5 siehe: "*Van der Waerden* in Erwachende Wissenschaft" S.207

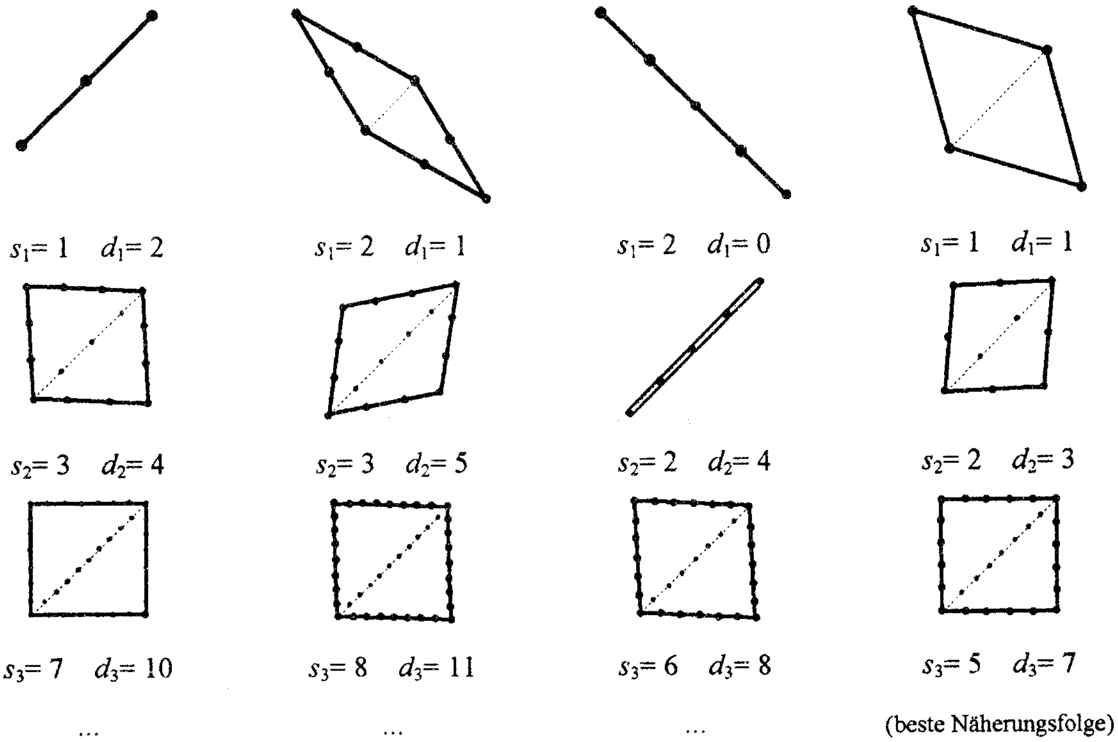
2. Es ist reizvoll für verschiedene Ausgangswerte s_n u. d_n die Folge der Quadrat-Werdung zu verfolgen:

n	s_n	d_n
1	1	2
2	3	4
3	7	10
4	17	24
⋮	⋮	⋮

n	s_n	d_n
1	2	1
2	3	5
3	8	11
4	19	27
⋮	⋮	⋮

n	s_n	d_n
1	2	0
2	2	4
3	6	8
4	14	20
⋮	⋮	⋮

n	s_n	d_n
1	1	1
2	2	3
3	5	7
4	12	17
⋮	⋮	⋮



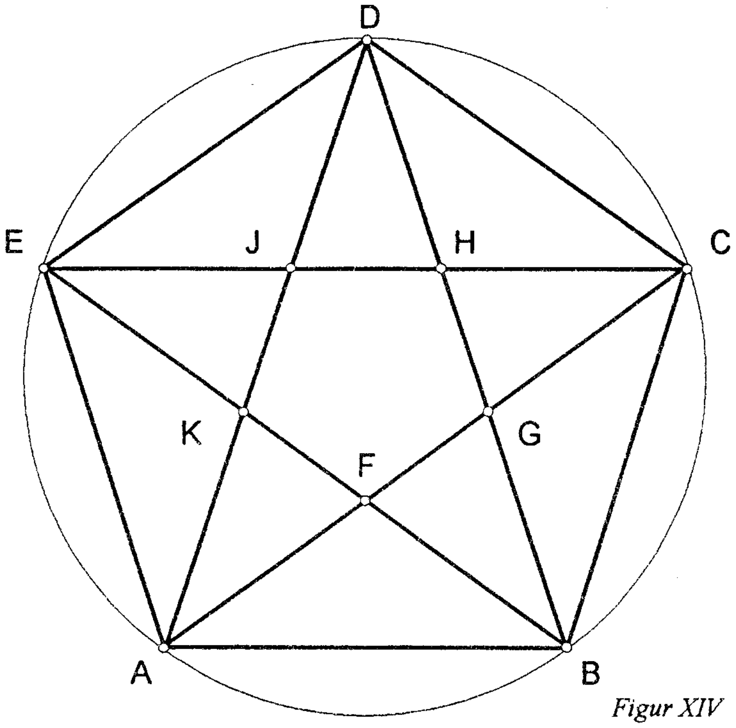
Die Figuren sind in verschiedenen Maßstäben gezeichnet.

3. Kennt man die Kettenbruchentwicklung von $x = \sqrt{2} = (1;\bar{2})$ so erkennt man im Fall $s_1 = d_1 = 1$ in den aufeinanderfolgenden Quotienten $q_n = \frac{d_n}{s_n}$ aufeinanderfolgende Näherungsbrüche des regulären Kettenbruches für x:

	q_n	1	2	2	2	2	2	2	…
0	1	1	3	7	17	41	99	239	…
1	0	1	2	5	12	29	70	169	…

b) Das Entstehen eines regulären Fünfecks aus einem "Fünfeckkeim"

Wir gehen aus von einem regulärem Fünfeck mit den Seiten s und der Diagonale d:



Figur XIV

Es sei $BD = d$
und $AB = s$
wobei $s = AB = AG = GD$ ist.

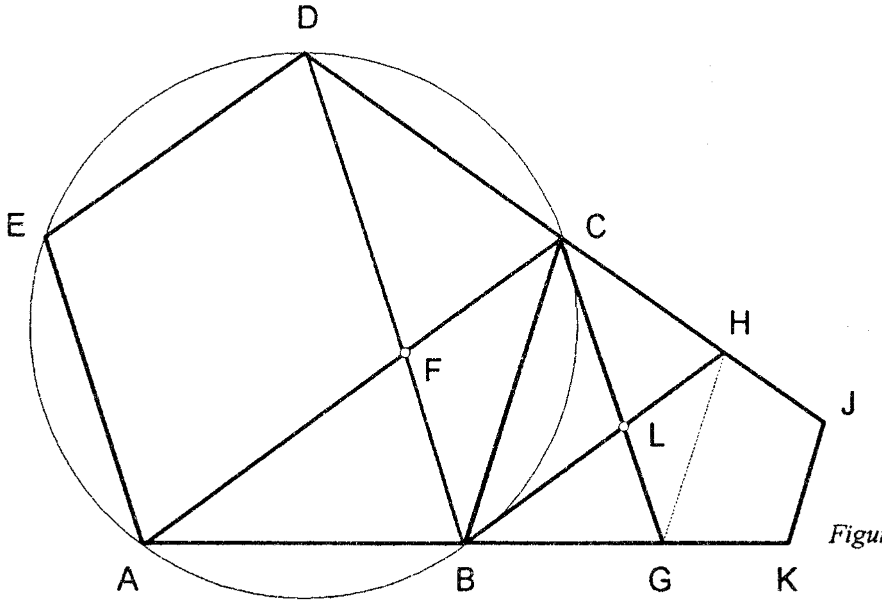
Da die beiden Dreiecke BGA und ABD ähnlich sind, folgt:

$$\frac{d-s}{s} = \frac{s}{d}$$

oder

$$\boxed{d(d-s) = s^2} \qquad \mathrm{XI}$$

Im Folgenden lagern wir dem Ausgangs-Fünfeck eine Folge immer kleinerer Fünfecke F_n an:



Figur XV

F_1 : $ABCDE$
F_2 : $BGHCF$
F_3 : $GKJHL$
$\vdots$

Aus dem Vergleich der Seiten und Diagonalen der Fünfecke F_1 und F_2 ergeben sich unmittelbar die folgenden Beziehungen:

$$s_2 = d_1 - s_1$$
$$d_2 = s_1$$

Für die aufeinanderfolgenden Fünfecke F_{n-1} und F_n folgt daraus allgemein:

$$\begin{aligned} s_n &= d_{n-1} - s_{n-1} \\ d_n &= s_{n-1} \end{aligned} \qquad \text{XII}$$

Für alle n ist dabei $\frac{s_n}{d_n}$ = constant = q.

Wir berechnen q mit XII :

$$\frac{s_n}{d_n} = \frac{d_{n-1} - s_{n-1}}{s_{n-1}} = \frac{1 - \frac{s_{n-1}}{d_{n-1}}}{\frac{s_{n-1}}{d_{n-1}}}$$

oder

$$q = \frac{1-q}{q}$$

$q^2 = 1 - q$ also $q = g \approx 0{,}6181$ (Zahl des Goldenen Schnittes)

Im Folgenden tauschen wir die Indizes n und n-1 in Formel XII aus (entsprechend dem Vorgehen auf Seite 31):

$$\begin{aligned} s_{n-1} &= d_n - s_n \\ d_{n-1} &= s_n \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\boxed{\begin{aligned} s_n &= d_{n-1} \\ d_n &= d_{n-1} + s_{n-1} \end{aligned}} \qquad \text{XIIa}$$

Die Formeln XIIa bestimmen das Bildungsgesetz einer Folge von immer größer werdenden Fünfecken. Denkt man sich nun als Keim ein erstes Fünfeck, mit *willkürlich gewählten Seiten und Diagonalen* – z.B. $s_1 = 1$ und $d_1 = 1$ – , so erhält man auf Grund von XIIa eine Folge von immer größer werdenden nicht regulären Fünfecken, die dem Aussehen nach immer regulärer erscheinen.

Arithmetisch bedeutet dies: $q_n = \frac{s_n}{d_n} \rightarrow q = g$ für $n \rightarrow \infty$. (siehe Anmerkung weiter unten)

Auch hier zeigt sich wieder, daß der durch die Formeln XIIa vermittelte Prozeß stärker ist als die Ausgangswerte.

Dieses "immer regulärer" Aussehen wollen wir nun auch arithmetisch untersuchen. Dazu betrachten wir die Formel XI, die für reguläre Fünfecke gilt und damit auch für die Folge der regulären Fünfecke F_1, F_2, F_3.... Wir fragen uns nun, welchen Charakter der Ausdruck

$$A_n \equiv d_n(d_n - s_n) - s_n^2 \text{ hat.}$$

Aus den Formeln XIIa folgt nach kurzer Rechnung:

$$d_n(d_n - s_n) - s_n^2 = d_{n-1}(s_{n-1} - d_{n-1}) + s_{n-1}^2$$

Abgesehen vom Vorzeichen bleibt also A_n für alle n konstant. Diese Konstante hängt von der Wahl der Ausgangswerte s_1 und d_1 ab. Ist z.B. $s_1 = d_1 = 1$, so hat diese Konstante den Betrag 1. Allgemein gilt in diesem Fall unter Berücksichtigung des Vorzeichens:

$$\boxed{d_n(d_n - s_n) - s_n^2 = (-1)^n} \qquad \text{XIII}$$

Diese Formel läßt sich natürlich auch durch vollständige Induktion direkt beweisen:

1. Für $s_1 = d_1 = 1$ und $n = 1$ ist die Formel richtig.
2. Wir nehmen an, sie sei für $n = \nu-1$ richtig.

Durch Einsetzen ist zunächst

$$d_{\nu-1}(d_{\nu-1} - s_{\nu-1}) - s_{\nu-1}^2 = (-1)^{\nu-1}.$$

Nach XIIa folgt daraus:

$$s_\nu(s_\nu - d_\nu + s_\nu) - (d_\nu - s_\nu)^2 = (-1)^{\nu-1}$$

$$2s_\nu^2 - s_\nu d_\nu - d_\nu^2 + 2s_\nu d_\nu - s_\nu^2 = (-1)^{\nu-1}$$

$$d_\nu(s_\nu - d_\nu) + s_\nu^2 = (-1)^{\nu-1}$$

$$d_\nu(d_\nu - s_\nu) - s_\nu^2 = (-1)^\nu$$

was zu zeigen war.

Der Grenzwert von q_n für $n \to \infty$ ist natürlich g. Dies folgt auch aus Formel XIII:

Sei $q = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_n}{d_n}$

Dann folgt aus $$1 - \frac{s_n}{d_n} - \frac{s_n^2}{d_n^2} = \frac{(-1)^n}{d_n^2}$$

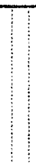
$$1 - q - q^2 = 0$$

und damit $$q = g.$$

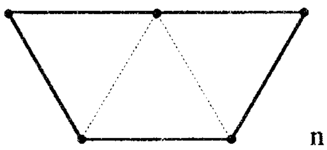
Zum Schluß zeichnen wir, ausgehend von verschiedenen "Keimen" Folgen von Fünfecken, die immer regulärer werden.

1. Beispiel

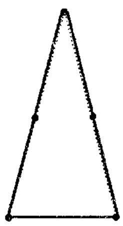
n	s	d
1	0	1
2	1	1
3	1	2
4	2	3
5	3	5
⋮	⋮	⋮



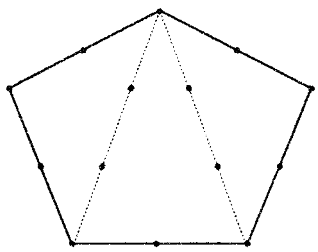
n = 1



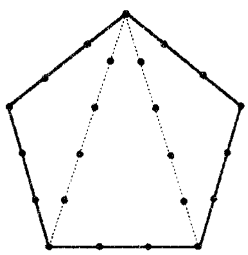
n = 2



n = 3



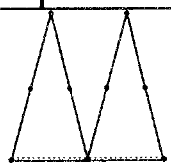
n = 4



n = 5

2. Beispiel

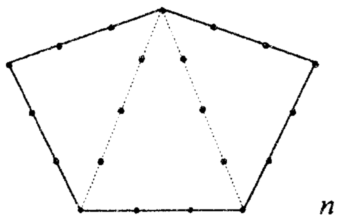
	s	d
1	2	1
2	1	3
3	3	4
4	4	7
5	7	11
⋮	⋮	⋮



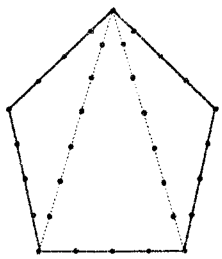
$n = 1$

$n = 2$

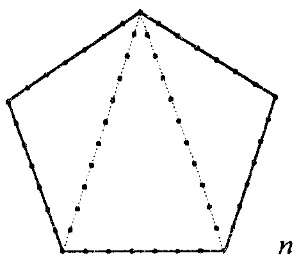
Erst hier (für $n = 2$) ist es sinnvoll, von "Keim" zu sprechen.



$n = 3$



$n = 4$



$n = 5$

Auf Seite 30 (3. Bemerkung) deuteten wir an, daß es verschiedenartige unendliche Prozesse gibt. In der Tat lassen sich drei wesentlich verschiedene unterscheiden:

1. Der Prozeß ist wesentlich bestimmt (oder wesentlich mitbestimmt) duch die Ausgangsbedingungen.

2. Der Prozeß als solcher ist stärker als die Ausgangsbedingungen. Die Ausgangsbedingungen sind nur dazu da, den Prozeß als solchen in Gang zu setzen. Das Ergebnis selbst ist unabhängig von den Ausgangsbedingungen.

3. Der Prozeß ist auf sensible Weise durch die Ausgangsbedingungen bestimmt. Solche Prozesse spielen in der Chaostheorie eine Rolle: kleinste Unterschiede in den Anfangsbedingungen können zu wesentlichen verschiedenen Ergebnissen führen.