VORWORT

Rekursives Rechnen ist ein solches, bei dem man durch Zurückgreifen auf erste Rechenschritte die dabei auftretenden Gesetzmäßigkeiten erkennen muß, so daß daraus die nächsten Rechenschritte folgerichtig vollzogen werden können. Die bekannte Folge 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... läßt eine Gesetzmäßigkeit erkennen, die sich in der Rekursionsformel $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ erfassen läßt. Solches Rechnen vollzieht sich im Prinzip in gleichartig sich wiederholenden Schritten und ist daher geeignet, "unendliche Prozesse" sachgerecht zu beschreiben. Die folgenden Beiträge widmen sich elementaren mathematischen Fragestellungen wie z.B. der Berech-nung der Kreiszahl π, die auch zum Teil inhaltlich geeignet sind in dieser Form an der Oberstufe einer Schule behandelt zu werden. In den einzelnen Beiträgen soll gezeigt werden, wie die rekursive Denkweise für diese Fragestellungen in der Natur der Sache gegründet ist. In einer Zeit, in welcher der Gebrauch des Taschenrechners im Unterricht immer selbstverständlicher wird, ist es wichtig, dasjenige stärker ins Bewußtsein zu heben, was sich sonst im Computer unbewußt abspielt: Ein technisch realisierter *iterativer Prozeß.* Aus dem Dargestellten ergibt sich ganz von selbst, wo und wann der Einsatz des Taschenrechners wirklich sinnvoll wird. Die einzelnen Beiträge können als Teil eines umfassenderen Ganzen – dem Rhythmologischen Rechnen – aufgefaßt werden.

Im weiteren finden sich ergänzende Aspekte inbezug auf Arithmetik, Musik, Astronomie, Geschichte, und Spektroskopie. Das Kapitel "Rekursive Rechengrundlagen der Berechnung von Logarithmen" und die im Teil IIa dargestellten Zusammenhänge überschreiten zum Teil schon die Grenze der elementaren Mathematik. Möge diese provisorische Schrift einige Anregungen für den Mathematikunterricht geben. Für weiterführende Ergänzungen bin ich dankbar.

Die beiden Aufsätze von L. Locher-Ernst – vor mehr als 30 Jahren geschrieben und in den "Elementen der Mathematik"[1] veröffentlicht – sind heute so aktuell wie damals. L. Locher-Ernst macht in diesen Aufsätzen auf gewisse Unzulänglichkeiten im Mathematikunterricht aufmerksam und gibt Hinweise auf einige verstärkt zu behandelnde Unterrichts-Gebiete. Ich habe mich deshalb entschlossen, diese Aufsätze im Anhang dieser Betrachtungen wieder abzudrucken.

Zum Schluß gebührt Wolfgang Held der Dank für die Drucklegung mit den zum Teil recht komplizierten Figuren.

Georg Glöckler   Dornach, im März 1994

---

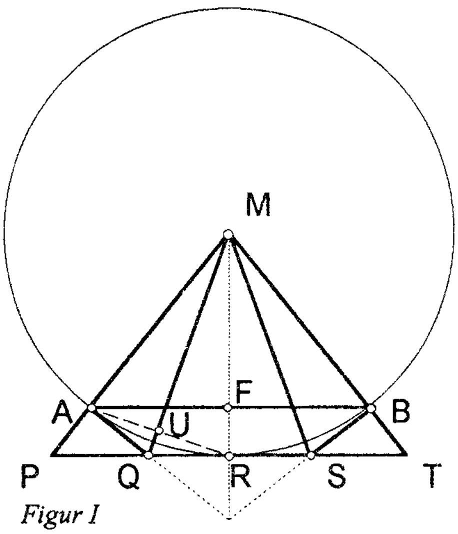
1 "Elemente der Mathematik"Jahrgang 1961 Band XVI, Nr. 5,6, Jahrgang 1962 Band XVII, Nr. 1,2

TEIL I

1. DIE BERECHNUNG DER KREISZAHL Π NACH ARCHIMEDES

Im Folgenden soll die Kreiszahl π nach der Ausschöpfmethode des Archimedes berechnet wer-den, und zwar rekursiv aus den Umfängen eines dem Kreis mit Radius $r = 1$ einbeschriebenen und umbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks. Diese Umfänge u_n bzw. U_n seien zunächst gegeben. Aufgrund elementargeometrischer Beziehungen lassen sich dann die entsprechenden Umfänge u_{2n} bzw. U_{2n} für die dem Kreis einbeschriebenen bzw. umbeschriebenen regelmäßigen $2n$-Ecke ermitteln.

Wir betrachten zunächst die folgende Grundfigur:



Figur I

Voraussetzung: $AB = s_n$ sei die Seite eines dem Kreis einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks

Weiter ist dann: $PT = S_n$ die Seite des dem Kreis umbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks.

$AR = s_{2n}$ die Seite des dem Kreis einbeschriebenen regelmäßigen $2n$-Ecks.

$QS = S_{2n}$ die Seite des dem Kreis umbeschriebenen regelmäßigen $2n$-Ecks.

Dabei gilt: $\Delta QRM \cong \Delta QAM$

und auch: $AQ = RQ$ sowie $MR = MA$

Nun gilt weiter: $\Delta APQ \sim \Delta AFM \sim \Delta PRM$

Daraus folgt: $\dfrac{MF}{MA} = \dfrac{MR}{MP} = \dfrac{MA}{MP} = \dfrac{AF}{PR}$

Weiter gilt: $\dfrac{AQ}{PQ} = \dfrac{MF}{MA} = \dfrac{AF}{PR}$

Wir erhalten so die erste geometrische Fundamentalbeziehung:

$$\boxed{\frac{AQ}{PQ} = \frac{AF}{PR} \qquad (1)}$$

Zur besseren Übersicht stellen wir die wichtigsten Bezeichnungen nochmals zusammen:

$AB = s_n$	$AF = \frac{1}{2} s_n$	
$PT = S_n$	$PR = \frac{1}{2} S_n$	$PQ = PR - QR = \frac{1}{2} S_n - \frac{1}{2} S_{2n}$
$AR = s_{2n}$	$UR = \frac{1}{2} s_{2n}$	$AQ = \quad QR \quad = \frac{1}{2} S_{2n}$
$QS = S_{2n}$	$QR = \frac{1}{2} S_{2n}$	

Aus (1) folgt dann: $$\frac{\frac{1}{2}S_{2n}}{\frac{1}{2}S_n - \frac{1}{2}S_{2n}} = \frac{\frac{1}{2}s_n}{\frac{1}{2}S_n}$$

und daraus: $$S_{2n} = \frac{s_n \cdot S_n}{s_n + S_n} \quad (*)$$

Nun gilt für die entsprechenden Umfänge der Vielecke:

$$\begin{aligned} u_n &= n \cdot s_n \qquad & U_n &= n \cdot S_n \\ u_{2n} &= 2n \cdot s_{2n} \qquad & U_{2n} &= 2n \cdot S_{2n} \end{aligned} \qquad \text{(a)}$$

und damit aus (*): $$S_{2n} = \frac{U_{2n}}{2n} = \frac{\frac{u_n}{n} \cdot \frac{U_n}{n}}{\frac{u_n}{n} + \frac{U_n}{n}}$$

oder: $$U_{2n} = \frac{2u_n \cdot U_n}{u_n + U_n}$$

anders geschrieben $$\boxed{\frac{1}{U_{2n}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{U_n} \right) \qquad \mathrm{I}}$$

Nun ist weiter: $\Delta QRU \sim \Delta ARF$

Daraus ergibt sich die zweite geometrische Fundamentalbeziehung:

$$\boxed{\frac{QR}{UR} = \frac{AR}{AF} \qquad (2)}$$

Mit den eingeführten Bezeichnungen folgt daraus zunächst:

$$\frac{\frac{S_{2n}}{2}}{\frac{s_{2n}}{2}} = \frac{\frac{s_{2n}}{2}}{\frac{s_n}{2}} \qquad \text{oder:} \qquad s_{2n}^2 = \frac{s_n \cdot S_{2n}}{2}$$

Mit (a) ergibt sich daraus: $$\boxed{\frac{1}{u_{2n}} = \sqrt{\frac{1}{u_n} \cdot \frac{1}{U_{2n}}} \qquad \mathrm{II}}$$

Wir erhalten also das schöne Resultat: Einerseits ergibt sich der Umfang des dem Kreis *um*beschriebenen regelmäßigen $2n$-Ecks als harmonisches Mittel aus den beiden Umfängen des dem Kreis einbeschriebenen und umbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks. Andererseits ist der Umfang des dem

Kreis *ein*beschriebenen regelmäßigen $2n$-Ecks das geometrische Mittel aus den Umfängen des dem Kreis einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks und dem Kreis umbeschriebenen regelmäßigen $2n$-Ecks.

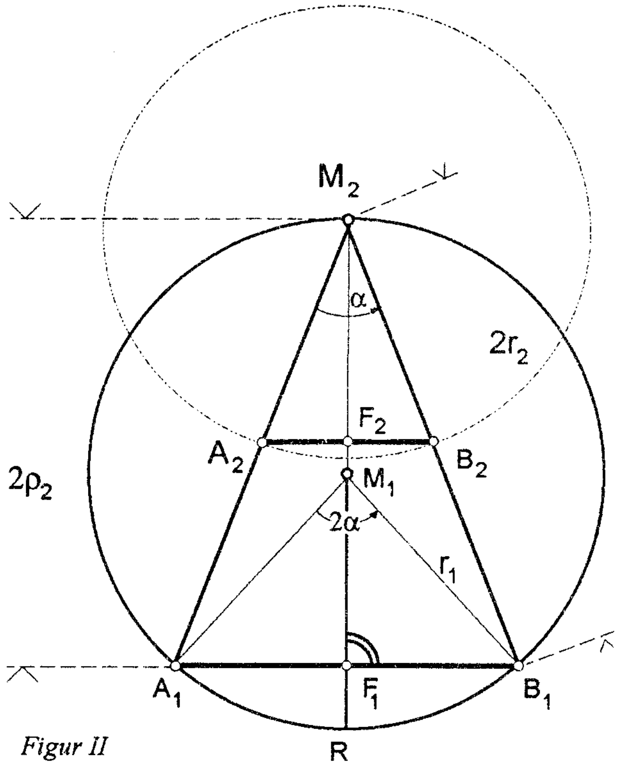
Archimedes (290 – 212 v. Chr.) hat den Umfang eines Kreises dadurch bestimmt, daß er diesen Umfang durch regelmäßige ein- und umbeschriebene Vielecke angenähert hat. Verfolgt man diesen Weg und geht man von einem regelmäßigen ein- bzw. umbeschriebenen Vieleck aus, berechnet deren Umfänge u_n bzw. U_n und bestimmt dann die Umfänge u_{2n} bzw. U_{2n} der zugehörigen (ein und umbeschriebenen) $2n$-Ecke, so lassen sich diese Umfänge rekursiv durch die folgenden Formeln berechnen:

$$\frac{1}{U_{2n}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{U_n} \right) \quad \mathrm{I} \qquad\qquad \frac{1}{u_{2n}} = \sqrt{\frac{1}{u_n} \cdot \frac{1}{U_{2n}}} \quad \mathrm{II}$$

Bemerkenswert dabei ist das Auftreten des arithmetischen bzw. geometrischen Mittels aus den Kehrwerten entsprechender Umfänge. Allerdings tritt dabei in II der Kehrwert von U_{2n} auf.

2. Die Berechnung der Kreiszahl π nach Cusanus

Ganz anders geht Nikolaus Cusanus (1401–1464) vor. Er geht von einem dem Kreis einbeschriebenen regelmäßigen n-Eck aus und berechnet dann den Umfang des einem neuen Kreis einbeschriebenen regelmäßigen $2n$-Ecks *gleichen Umfangs*. Dieses Prinzip wird weiter fortgesetzt, sodaß sich die regelmäßigen Vielecke schließlich einem Kreis annähern, dessen Umfang U von vorne-herein bekannt ist. Die Aufgabe bei diesem Verfahren besteht nun darin, den Radius R des beschriebenen Kreises zu berechnen.



Figur II

Es seien dabei die folgenden Beziehungen gewählt (Figur II):

A_1B_1	$= s$	Seite des einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks
M_1B_1	$= r_1$	Radius des Umkreises des regelmäßigen n-Ecks
M_1F_1	$= \rho_1$	Radius des Inkreises des regelmäßigen n-Ecks

Es sei $2r_2 := M_2B_1$
$2\rho_2 := M_2F_1$

Weiter seien A_2 bzw. B_2 die Mitte von A_1M_2 bzw. B_1M_2. Daraus folgt dann:

$$A_2B_2 = \tfrac{s}{2};\ M_2B_2 = r_2;\ M_2F_2 = \rho_2$$

Damit ist zunächst gesichert:

$$n \cdot s = 2n \cdot \tfrac{s}{2} = U_n = U_{2n} = U$$

Man erkennt an der Figur unmittelbar die folgenden Beziehungen:

$$M_2F_1 = M_2M_1 + M_1F_1$$

und $(M_2B_1)^2 = M_2R \cdot M_2F_1$ (Kathetensatz)

also $2\rho_2 = r_1 + \rho_1$

und $(2r_2)^2 = 2r_1 \cdot 2\rho_2$.

Daraus ergeben sich zunächst die Rekursionsformeln:

$$\rho_2 = \frac{r_1 + \rho_1}{2} \qquad r_2 = \sqrt{r_1 \cdot \rho_2}\ .$$

Da diese Überlegungen unmittelbar als der Übergang von n zu $2n$ betrachtet werden können,

gilt allgemein: $$\boxed{\rho_{2n} = \frac{r_n + \rho_n}{2} \qquad \text{III}}$$

$$\boxed{r_{2n} = \sqrt{r_n \cdot \rho_{2n}} \qquad \text{IV}}$$

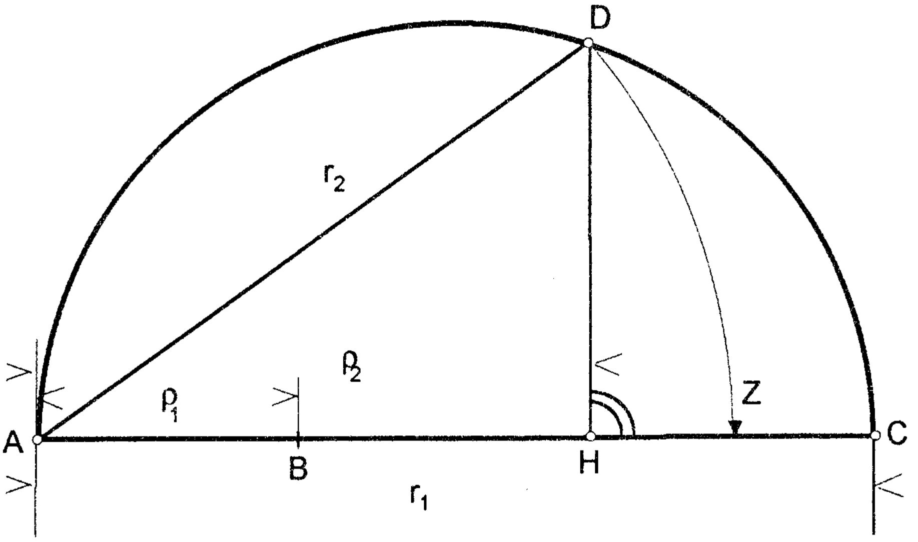
Vergleicht man die Formeln mit den Formeln I und II, so erkennt man den prinizipiell gleichen Aufbau der beiden Formelpaare.

Bildet man nun die Folgen ρ_1, ρ_2, ρ_4, ρ_8, ... bzw. r_1, r_2, r_4, r_8, ... so ist zu vermuten, daß sie ein und demselben Grenzwert zustreben, der dem gesuchten Radius R entspricht. Daß dies tatsächlich so ist, wollen wir nun auch rechnerisch zeigen. Dabei sei vorausgesetzt, daß eine reelle Zahl durch eine Intervallschachtelung erfaßt werden kann. (Cantor-Dedekindsches Axiom).

Wir wollen im Folgenden zeigen, daß durch die Folgen der Gleichungen III und IV tatsächlich eine Intervallschachtelung bestimmt ist. Dazu ist dreierlei zu zeigen:

1. Es ist stets $r_n > \rho_n$ für alle n.
2. ρ_n ist eine monoton steigende, r_n eine monoton fallende Folge.
3. $r_n - \rho_n$ strebt mit zunehmendem Index n gegen 0.

Um die Gültigkeit der ersten beiden Bedingungen zeigen zu können, betrachten wir FigurIII:



Figur III

Aus Figur II ist zunächst anschaulich klar: $r_1 > \rho_1$. Weiter sei (in Figur III stark übertrieben) $AB=\rho_1$ und $AC=r_1$. Der Endpunkt der Strecke $\rho_2 = \frac{r_1+\rho_1}{2}$ liegt deshalb in der Mitte H zwischen B und C. Weiter gilt: $(AD)^2 = AC \cdot AH$ (Kathetensatz) oder $AD = \sqrt{r_1 \cdot \rho_2}$. Der Endpunkt Z der Strecke r_2 liegt damit zwischen H und C. Also gilt zunächst $r_2 < r_1$ und $\rho_2 > \rho_1$, wobei $\rho_2 < r_2$ ist. Entsprechendes gilt für r_4 und ρ_4 etc..

Allgemein können wir also schreiben:

$$\rho_1 < \rho_2 < \rho_4 < \rho_8 < .... < r_8 < r_4 < r_2 < r_1$$

Damit ist die Gültigkeit der ersten beiden Bedingungen gezeigt. Die Gültigkeit der 3. Bedingung ergibt sich nun aus dem folgenden rekursiven Rechenweg unter Benutzung der Formeln III und IV:

$$\rho_2^2 = \frac{(r_1 + \rho_1)^2}{4}$$

$$r_2^2 = r_1 \cdot \rho_2 = r_1 \cdot \frac{r_1 + \rho_1}{2}$$

$$r_2^2 - \rho_2^2 = r_1 \cdot \frac{r_1 + \rho_1}{2} - \frac{(r_1 + \rho_1)^2}{4}$$

$$= \frac{r_1 + \rho_1}{2} \cdot \left(r_1 - \frac{r_1 + \rho_1}{2} \right)$$

$$= \frac{r_1^2 - \rho_1^2}{4}$$

entsprechend gilt: $$r_4^2 - \rho_4^2 = \frac{r_2^2 - \rho_2^2}{4} = \frac{r_1^2 - \rho_1^2}{4^2}$$

$$\vdots$$

Daraus folgt dann die ganz allgemeine Beziehung: $$r_{2^\nu}^2 - \rho_{2^\nu}^2 = \frac{r_1^2 - \rho_1^2}{4^\nu}$$ für $\nu = 1, 2, 3, 4, \ldots$;

oder: $$r_\nu^2 - \rho_\nu^2 = \frac{r_1^2 - \rho_1^2}{\nu^2}$$ für $\nu = 1, 2, 4, 8, \ldots$

Weiter folgt daraus

$$\lim_{\nu \to \infty} \left(r_\nu^2 - \rho_\nu^2 \right) = \lim_{\nu \to \infty} \left(r_\nu + \rho_\nu \right) \left(r_\nu - \rho_\nu \right) = 0$$

und deshalb

$$\lim_{\nu \to \infty} r_\nu = \lim_{\nu \to \infty} \rho_\nu = R$$

womit die Gültigkeit der 3. Bedingung nachgewiesen ist.

Beschreibt man nun um den Mittelpunkt des regelmäßigen Vieleckes, das die Radien ρ_ν und r_ν besitzt, Kreise mit diesen Radien, dann gilt:

$$2\rho_\nu \cdot \pi < U < 2r_\nu \cdot \pi$$

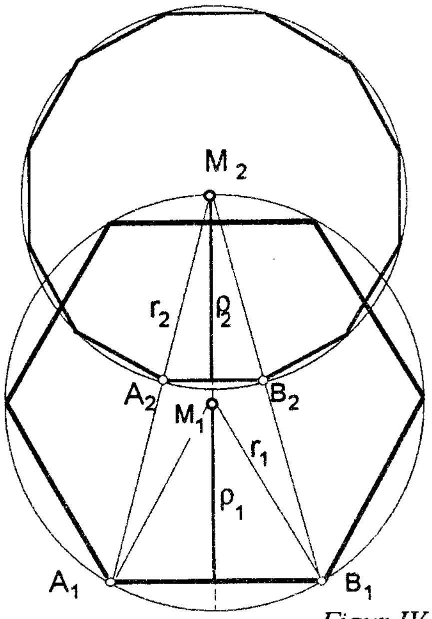
wobei U der bei dem Prozeß konstant bleibende Umfang der verschiedenen Vielecke ist. Im Grenzfall geht dieser über in den Umfang des Kreises, dessen Radius R wir suchten. Es gilt für diesen Radius:

$$2R\pi = U = 2R\pi$$

Zusammenfassend ergibt sich also durch die Formeln III und IV, daß sich der Radius R des-jenigen Kreises, dessen Umfang U gleich dem Umfang eines gegebenen regelmäßigen Vielecks ist, beliebig genau bestimmen läßt.

Beispiel:

Als Ausgangspunkt kann irgendein regelmäßiges Vieleck gewählt werden, z.B. ein regelmäßiges Sechseck (vgl. Figur IV und nachfolgende Tabelle).



Figur IV

$r_1 = 1$ dann ist U = 6

$\rho_1 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \qquad \approx 0{,}8660\ldots$

$\rho_2 = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4} \approx 0{,}9330\ldots > \rho_1$ (nach Formel III)

$r_2 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}} \approx 0{,}9659\ldots < r_1$ (nach Formel IV)

Nimmt man also das regelmäßige 6-Eck als Ausgangsvieleck, so ist U=6 und r_ν und ρ_ν streben gegen den Radius R als Grenzwert. Dieser Grenzwert R läßt sich (falls der Wert für π als bekannt vorausgesetzt wird) zur Kontrolle berechnen:

$$R = \frac{U}{2\pi} = \frac{6}{2\pi} = 0{,}9549296\ldots$$

Aus der folgenden Tabelle läßt sich sehr schön der Approximations-Grad von π ablesen: Für $n = 2^6 \cdot 6 = 384$ (und $\nu = 64$) stimmen r_ν und ρ_ν bis auf vier Dezimalstellen überein, so daß sich π auf dieser Approximations-Stufe wie folgt berechnen läßt:

$$\pi = \frac{U}{2\rho_\nu} \approx \frac{U}{2r_\nu} = \frac{6}{2 \cdot 0{,}9549}.$$

Wie die unterste Zeile der nachfolgenden Tabelle zeigt, ist dieser Wert von π auf 3 Dezimalen genau.

Zusammenfassend seien jetzt die beiden verschiedenen Approximationen von π mit dem zahlenmäßigen Verlauf der Annäherung vergleichsweise dargestellt:

Approximation nach Cusanus: (Ausgangsvieleck ist ein regelmäßiges Sechseck)

$\rho_{2n} = \dfrac{r_n + \rho_n}{2}$ $\qquad$ $r_{2n} = \sqrt{r_n \cdot \rho_{2n}}$ $\qquad$ U = const. = 6

$\rho_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ $\qquad$ $r_1 = 1$

$\rho_2 = \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{4}\left(2+\sqrt{3}\right)$ $\qquad$ $r_2 = \sqrt{1 \cdot \frac{1}{4}\left(2+\sqrt{3}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$

$\vdots$ $\qquad$ $\vdots$

n	$\rho_\nu \to R$	$r_\nu \to R$ ($\nu = 1, 2, 4, 8\ldots$)	$\dfrac{U}{2\rho_\nu} \to \pi$	$\dfrac{U}{2r_\nu} \to \pi$
6	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$	1	$\frac{6}{\sqrt{3}} = 3{,}46410$	3
12	$\frac{1}{4}\left(2+\sqrt{3}\right)$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}}$	$\frac{12}{2+\sqrt{3}} = 3{,}21539$	$\frac{6}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = 3{,}10583$
24	0,94947	0,95766	3,15966	3,13264
48	0,95357	0,95561	3,14607	3,13936
96	0,95459	0,95510	3,14271	3,14103
192	0,95484	0,95497	3,14189	3,14146
384	0,95491	0,95494	3,14166	3,14156

Approximation nach Archimedes: (Ausgangsvieleck ist ein regelmäßiges Dreick)

$$\frac{1}{U_{2n}} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{U_n}\right) \qquad \frac{1}{u_{2n}} = \sqrt{\frac{1}{u_n}\cdot\frac{1}{U_{2n}}} \qquad r = \text{const.} = 1$$

$$U_1 = 6\sqrt{3} \qquad u_1 = 3\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{U_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{6\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{4\sqrt{3}} \qquad \frac{1}{u_2} = \sqrt{\frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{4\sqrt{3}}} = \frac{1}{6}$$

$\vdots$ $\qquad$ $\vdots$

n	$s_n \to 0$	$S_n \to 0$	$u_n \to 2\pi$	$U_n \to 2\pi$
3	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$	$3\sqrt{3}$	$6\sqrt{3}$
6	1	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	6	$4\sqrt{3}$
12	$\sqrt{2-\sqrt{3}}$	$4-2\sqrt{3}$	$2 \cdot 3{,}10582$	$2 \cdot 3{,}21539$
24	0,26105	0,26330	$2 \cdot 3{,}13263$	$2 \cdot 3{,}15966$
48	0,13081	0,13109	$2 \cdot 3{,}13935$	$2 \cdot 3{,}14609$
96	0,06544	0,06547	$2 \cdot 3{,}14103$	$2 \cdot 3{,}14271$
192	0,032723	0,032728	$2 \cdot 3{,}14145$	$2 \cdot 3{,}14187$
384	0,016362	0,016363	$2 \cdot 3{,}14156$	$2 \cdot 3{,}14166$

1. Bemerkung:

Die Rekursionsformeln III und IV sind zunächst der Berechnung der Kreiszahl π auf die beschriebene Art angepaßt, wobei immer $r_1 < \rho_1$ vorausgesetzt wurde. Löst man sich von dieser Bindung und geht von anderen Ausgangszahlen (z.B. $r_1=2$ und $\rho_1=8$; $r_1 < \rho_1$) aus, dann ergeben sich neue Fragen. Für $r_1 < \rho_1$ stellt sich die Konvergenzfrage des Verfahrens aufs Neue.

Im Falle der Konvergenz des Verfahrens bleibt außerdem offen, ob es für die Grenz-werte überhaupt eine konkrete geometrische oder arithmetische Deutung gibt. Vorab kann gesagt werden, daß dies möglich ist. Es zeigt sich, daß mit den Rekursionsformeln III und IV z.B. trigonometrische Funktionen – und sogar Logarithmen berechnet werden können. In unserem Falle liegt also nur ein kleiner, spezieller Anwendungsbereich der Formeln III und IV vor.

2. Bemerkung:

Im Falle der archimedischen Rechnung bleibt *der gesuchte Umfang des Kreises* immer kon-stant. Er wird durch Streckenzüge immer besser angenähert (Rektifizierung). *"Krummes" mißt sich am "Gera-den"*. Im Falle der Berechnung nach N. Cusanus bleibt der Umfang der aufeinanderfolgenden Vielecke immer konstant. Dieser gleichbleibende Umfang wird schließ-lich zum Umfang eines Kreises, *dessen Radius wir suchten*. Hier mißt sich *"Gerades" am "Krummen"*.

3. Die drei klassischen Mittelbildungen

Gegeben seien zwei gleichartige Größen x_0 und x_1 ($x_1 > x_0$). Dann gibt es drei Möglichkeiten mittels der elementaren Rechenoperationen eine dritte Größe m dazwischen zu schalten.

1. Arithmetisches Mittel:

m_a ist arithmetisches Mittel, wenn die Unterschiede $m_a - x_0$ und $x_1 - m_a$ gleich sind.

Also: $m_a - x_0 = x_1 - m_a$

$$m_a = \frac{x_1 + x_0}{2}$$

2. Geometrisches Mittel:

m_g ist geometrisches Mittel, wenn die Verhältnisse $m_g : x_0$ und $x_1 : m_g$ gleich sind.

Also: $\frac{m_g}{x_0} = \frac{x_1}{m_g}$

$$m_g = \sqrt{x_0 x_1}$$

m_g nennt man auch die "mittlere Proportionale" aus den Strecken x_0 und x_1.

3. Harmonisches Mittel:

m_h ist harmonisches Mittel, wenn die Unterschiede $m_h - x_0$ und $x_1 - m_h$ sich wie die Größen x_0 und x_1 verhalten.

Also: $\frac{m_h - x_0}{x_1 - m_h} = \frac{x_0}{x_1}$

$$m_h = \frac{2x_0x_1}{x_0 + x_1} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{m_h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_1}\right)$$

Sind die Größen x_0 und x_1 ($x_0 < x_1$) als Strecken gegeben, so lassen sich die entsprechenden Mittelstrecken leicht konstruieren.

Historisches:

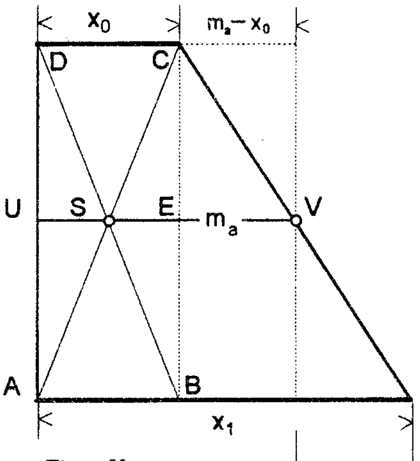
Das arithmetische, geometrische und harmonische Mittel bilden die drei pythagoräischen Medietäten (Pythagoras 570–480 v.Chr.), d.h. Proportionsverhältnisse aus drei Größen, von denen die mittlere aufgrund einer Proportion durch die beiden anderen bestimmt ist. Theon von Smyrna (um 100 n.Chr.) unterschied in späterer Zeit zehn Arten von Mitteln zwischen drei Zahlen a, b, und m, unter denen sich als die wichtigsten die oben aufgeführten befinden. Als vollkommenes Verhältnis galt dasjenige, das aus zwei Zahlen a, b sowie ihrem arithmetischen und harmonischen Mittel besteht, also $a : m_a = m_h : b$,

z. B. $12 : 9 = 8 : 6$ [2].

[2] vgl. auch Teil IIa, Seite 78

Zur Konstruktion der 3 klassischen Mittel aus den gegebenen Strecken x_0 und x_1 ($>x_0$)

1. **Arithmetisches Mittel m_a:**



Figur V

Aus $m_a - x_0 = x_1 - m_a$

folgt $m_a = \dfrac{x_0 + x_1}{2}$

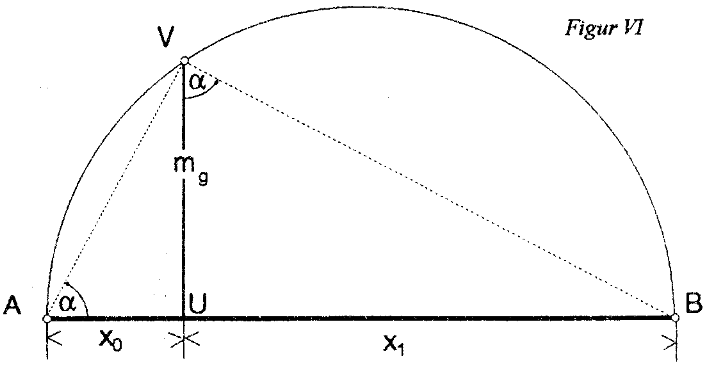
Zur Konstruktion von m_a:

zunächst ist $\dfrac{CE}{CB} = \dfrac{1}{2}$

und weiter $\dfrac{CE}{CB} = \dfrac{m_a - x_0}{x_1 - x_0}$ (Scheitel C)

woraus insgesamt: $UV = m_a = \dfrac{x_0 + x_1}{2}$ folgt.

2. **Geometrisches Mittel m_g:**



Figur VI

Aus $\dfrac{x_0}{m_g} = \dfrac{m_g}{x_1}$

folgt $m_g = \sqrt{x_0 - x_1}$

Die Konstruktion folgt unmittelbar aus dem Kathetensatz oder aus der Ähnlichkeit der Dreiecke *AUV* und *VUB*.

Behauptung: $m_h = \dfrac{2x_0 x_1}{x_0 + x_1}$

3. **Harmonisches Mittel m_h:**

Zur Konstruktion des harmonischen Mittels m_h aus den gegebenen Strecken x_0 und x_1 :

Es ist also zunächst zu beweisen:

$$m_h = UV = \frac{2x_0 x_1}{x_0 + x_1}$$

Mit den Bezeichnungen der Figur VII gelten die folgenden Proportionen:

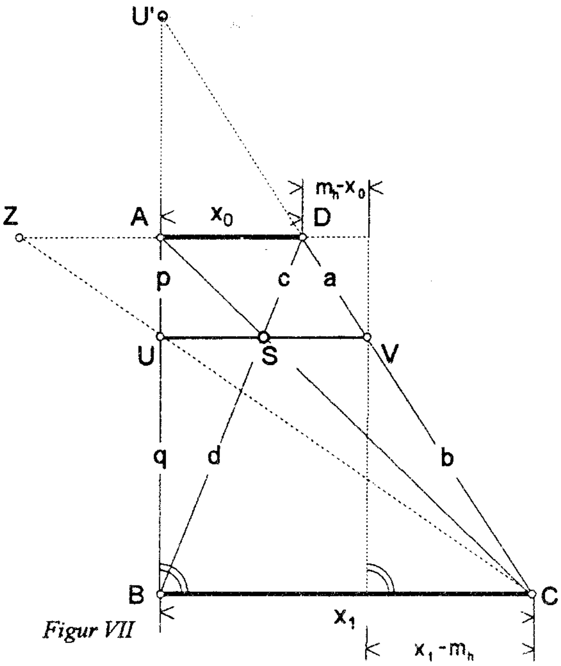
$\dfrac{m_h - x_0}{x_1 - m_h} = \dfrac{a}{b}$ (Scheitel V)

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ (Scheitel D)

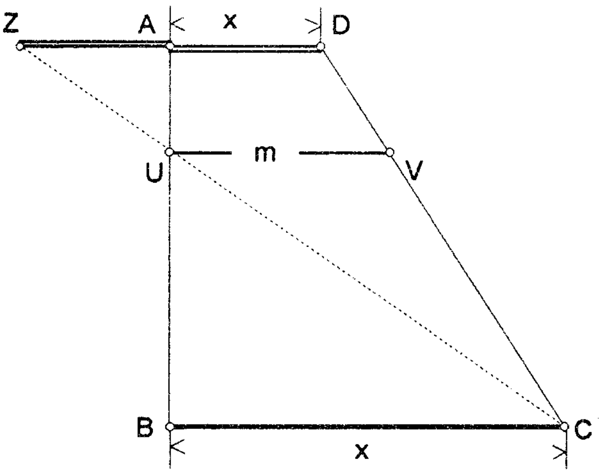
$\dfrac{c}{d} = \dfrac{x_0}{x_1}$ (Scheitel S)

Also $\dfrac{m_h - x_0}{x_0 - m} = \dfrac{x_0}{x_1}$

woraus $m_h = \dfrac{2x_0 x_1}{x_0 + x_1}$ folgt.



Figur VII



Drei ergänzende Bemerkungen zum Aufbau der Figur VII:

1. Leicht einzusehen ist, daß S die Strecke UV halbiert, daß also gilt $US = SV$. Das folgt aus den drei Proportionen:

$$\frac{SV}{x_1} = \frac{c}{c+d} \qquad \text{(Scheitel } D\text{)}$$

$$\frac{c}{c+d} = \frac{p}{p+q} \qquad \text{(Scheitel } B\text{)}$$

$$\frac{p}{p+q} = \frac{US}{x_1} \qquad \text{(Scheitel } A\text{),}$$

woraus schließlich $US = SV$ folgt.

Wegen

$$\frac{US}{SV} = \frac{ZA}{AD} = \frac{1}{1} \qquad \text{(Scheitel } C\text{)}$$

folgt daraus weiter $ZA = AD$, was zu einer zweiten möglichen Konstruktion des harmonischen Mittels m_h aus x_0 und x_1 führt (vgl. Figur VIII):

2. Aus dem Vorangehenden ergibt sich die harmonische Lage der Punkte A, B, U und U', d.h. es gilt

$$\frac{AU}{BU} = \frac{AU'}{BU'} \text{ oder } DV(ABUU') = (-)1.$$

((−1) bei Berücksichtigung orientierter Strecken)

In diesem Zusammenhang sagt man auch eine Strecke AB werde innen (durch U) und außen (durch U') in demselben Verhältnis geteilt. Es gelten nämlich die folgenden Proportionen:

$$\frac{AU}{BU} = \frac{p}{q} = \frac{c}{d} \qquad \text{(Scheitel } B\text{)}$$

$$\frac{c}{d} = \frac{x_0}{x_1} \qquad \text{(Scheitel } S\text{)}$$

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{AU'}{BU'} \qquad \text{(Scheitel } U'\text{)}$$

womit die obige Behauptung bestätigt ist.

3. Zusammenhang zwischen harmonischen gelegenen Punkten und dem harmonischen Mittel

Wir wollen noch zeigen, daß die Strecke UU' das harmonische Mittel aus den Strecken AU' und BU' ist. Aufgrund der 2. Bemerkung gilt:

$$\frac{AU}{BU} = \frac{AU'}{BU'}$$

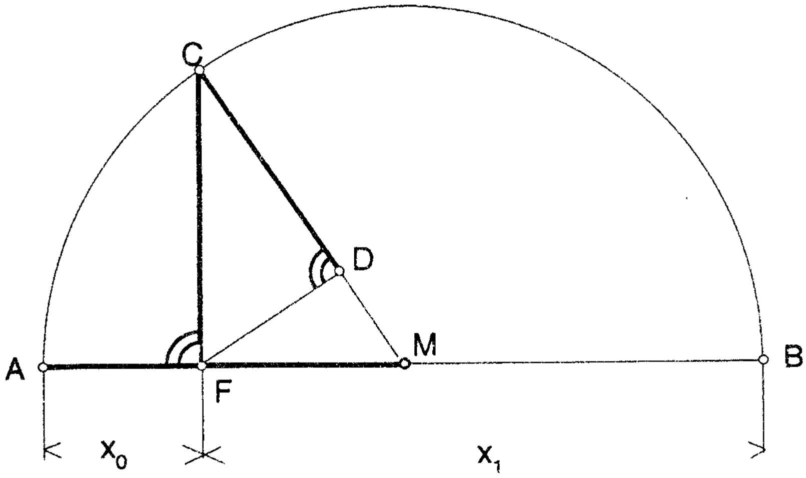
Nun ist $AU = UU' - AU'$ und $BU = BU' - UU'$,

woraus $\dfrac{UU' - AU'}{BU' - UU'} = \dfrac{AU'}{BU'}$ oder $UU' = \dfrac{2AU' \cdot BU'}{AU' + BU'}$ folgt.

Zwei verschiedene zusammenfassende Figuren

Alle drei Mittelbildungen lassen sich auf zwei verschiedene Weisen in einer Figur veranschaulichen:

1.



Figur IX

$m_a = AM = MB$

$m_g = FC$

$m_h = CD$

Dabei ist unmittelbar klar:

$x_0 < m_h < m_g < m_a < x_1$

und

$m_a \cdot m_h = m_g^2$

2.

Konstruktion der drei klassischen Mittel m_a, m_g und m_h mittels Kreisen:

Gegeben:

$AB = a = 12$

$BC = b = 6$

zunächst ist dann

$AM = MC$

$= \dfrac{a+b}{2} = m_a$

und (Kathetensatz):

$BD = BE = m_g = \sqrt{a \cdot b}$

Nun werde die Strecke $SB = m_a$ über B hinaus bis T verlängert.

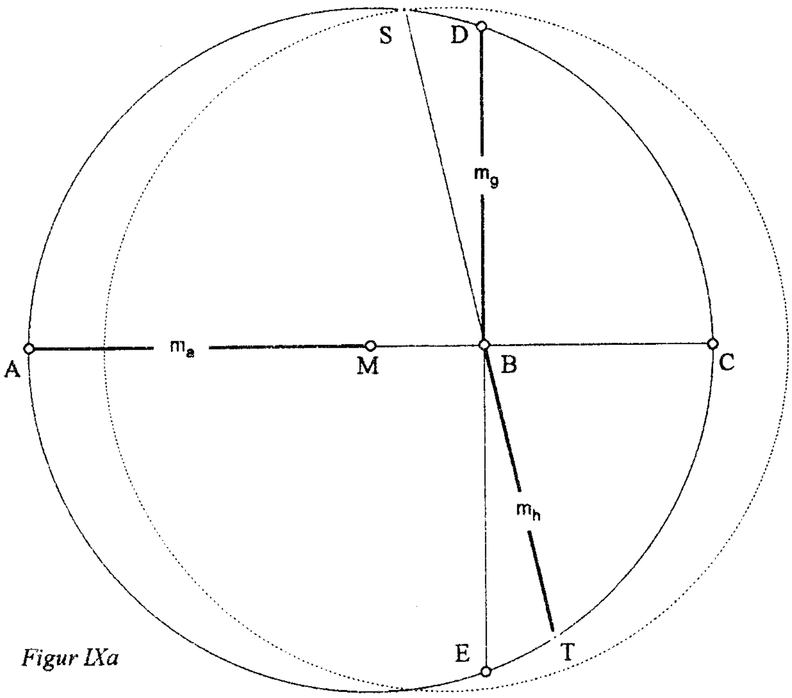
Dann gilt aufgrund des Sehnensatzes im Kreis (mit Scheitel B):

$BD \cdot BD = SB \cdot BT$

oder

$$BT = \frac{(BD)^2}{SB} = \frac{m_g^2}{m_a} = m_h = \frac{2ab}{a+b}$$

(vgl. Seite 16)



Figur IXa

Alle drei Mittel lassen sich dann an der obigen Figur unmittelbar ablesen. Dabei ist ersichtlich:

$m_a > m_g > m_h$

Hinweis: Im Teil II auf Seite 55f finden sich zum Begriff "Harmonisches Mittel" noch einige ergän zende Bemerkungen.