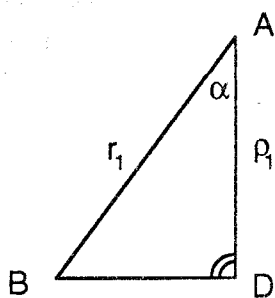


6. REKURSIVE RECHENGRUNDLAGEN DER TRIGONOMETRIE

6. 1. Grundlagen



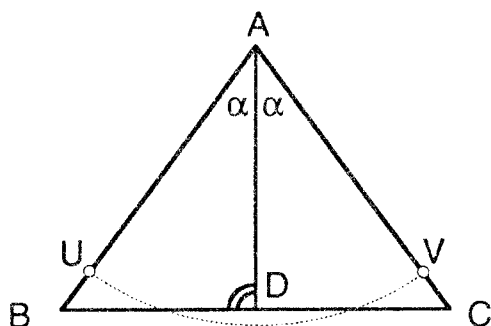
Figur XVI

Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABD mit der Hypotenuse $AB = r_1$ und der Kathete $AD = \rho_1$ (vgl. Figur XVI). Im Folgenden wollen wir zeigen, daß der Winkel $\alpha < BAD$ rekursiv berechnet werden kann. Das Verfahren gestattet darüber hinaus die Berechnung eines beliebig genauen Näherungswertes der Kreiszahl π .

Wir bezeichnen die zweite Kathete BD mit $\frac{s}{2}$. Dann spiegeln wir das Dreieck ABD an AD und erhalten so das gleichschenklige Dreieck ABC .

Nun biegen wir die Strecke $BC = s$ in einen Kreisbogen UV gleicher Länge um, dessen Zentriwinkel 2α ist.

Dabei ergibt sich die Frage nach den Radius $R = AU = AV$ des Kreissektors. Angenommen, wir hätten den Radius von R ermittelt, dann läßt sich damit der Winkel α unmittelbar berechnen:



Figur XVII

Es ist zunächst: $\frac{s}{2R\pi} = \frac{2\alpha}{360^\circ}$ mit

$$\frac{s}{2} = \sqrt{r_1^2 - \rho_1^2}$$

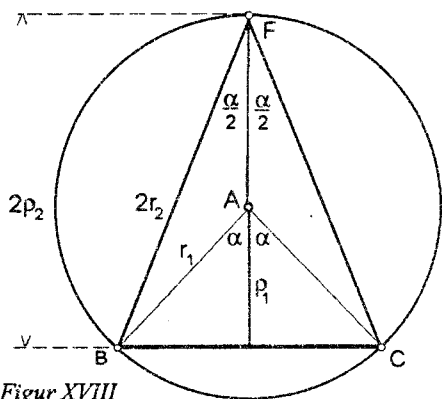
Daraus folgt:

$$\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{r_1^2 - \rho_1^2}}{R} \quad \text{XIV} \quad \text{mit } r_1 > \rho_1$$

Im Folgenden werden zu dieser Berechnung einige Voraussetzungen zusammengestellt, die wir an der Figur ablesen können (vgl. auch die Figur II auf Seite 7): Es ist zunächst:

$$\rho_2 = \frac{r_1 + \rho_1}{2} \quad \text{und} \quad 4r_2^2 = 2r_1 \cdot (r_1 + \rho_1) \quad (\text{Kathetensatz})$$

Zur Berechnung des Radius R verfolgen wir die Idee einer Annäherung des Bogens $UV = s$ durch einen sukzessiv verfeinerten Polygonzug.



Figur XVIII

Daraus ergeben sich die Rekursionsformeln

$$\rho_2 = \frac{r_1 + \rho_1}{2} \quad \text{arithmetische Mittelbildung}$$

$$r_2 = \sqrt{r_1 \cdot \rho_2} \quad \text{geometrische Mittelbildung}$$

Dadurch kann ein algorithmischer Rechenprozeß spezieller Art in Gang gesetzt werden, der durch die beiden Rekursionsformeln ⁶

⁶ vgl. auch Abschnitt 1.2.

Daraus ergeben sich die Rekursionsformeln

$$\rho_{2n} = \frac{r_n + \rho_n}{2} \quad \text{III} \quad \text{und} \quad r_{2n} = \sqrt{r_n \cdot \rho_{2n}} \quad \text{IV}$$

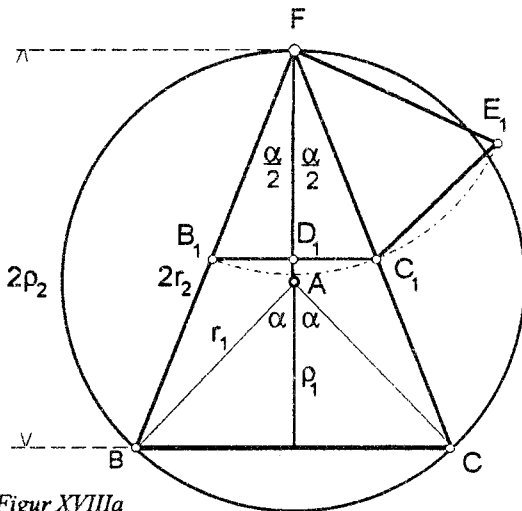
bestimmt ist. Wir wollen nun zeigen, daß mit diesen Rekursionsformeln der Radius R des beschriebenen Kreissektors berechnet werden kann. Im Abschnitt 2 haben wir gezeigt, daß für den Fall $\rho_1 < r_1$ die Folgen III und IV gegen den gleichen Grenzwert R konvergieren. An einem konkreten Beispiel kann man sich diese Tatsache noch einmal vergegenwärtigen.

$$\left(\frac{s}{2} = \sqrt{r_1^2 - \rho_1^2} = 3 \right)$$

ρ_1	=	4	r_1	=	5
ρ_2	=	4,5	r_2	=	4,74342...
ρ_4	=	4,62171...	r_4	=	4,68217...
ρ_8	=	4,65194...	r_8	=	4,66703...
ρ_{16}	=	4,65948...	r_{16}	=	4,66325...
ρ_{32}	=	4,66137...	r_{32}	=	4,66231...
ρ_{64}	=	4,66184...	r_{64}	=	4,66207...
ρ_{128}	=	4,66196...	r_{128}	=	4,66201...

Also $R = 4,6620$ auf 4 Dezimalstellen genau.

Nun konstruieren in einem ersten Schritt die Annäherung des Bogens UV durch einen Polygonzug:

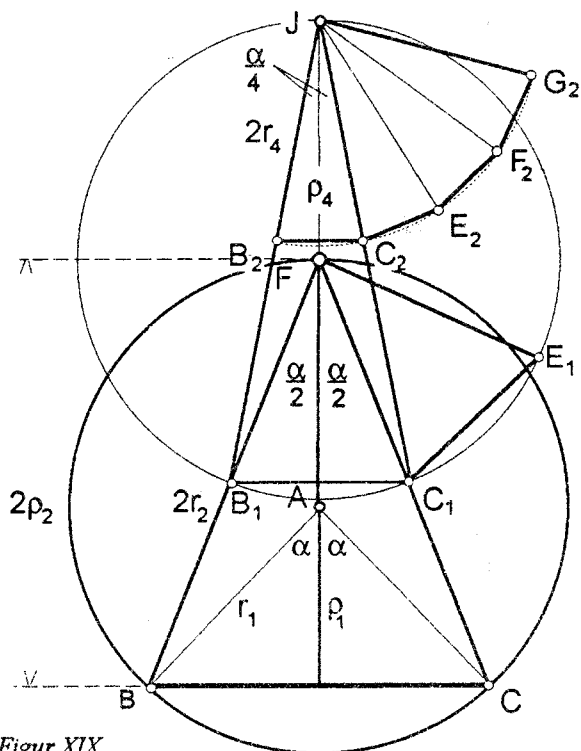


Figur XVIIIa

Zunächst verkleinern wir das Dreieck FBC im Verhältnis $2:1$ und erhalten so das Dreieck FB_1C_1 mit dem Winkel $\sphericalangle B_1FC_1 = 2 \cdot \frac{\alpha}{2} = \alpha$. Dabei ist $D_1F = \rho_2$, $B_1F = r_2$ und $B_1C_1 = \frac{s}{2}$. Spiegeln wir das Dreieck FB_1C_1 an FC_1 , so erhalten wir das kongruente Dreieck FC_1E_1 .

Insgesamt hat dann der Polygonzug $B_1C_1 + C_1E_1$ die Länge s bei zugehörigem Zentriwinkel $\sphericalangle B_1FE_1 = 2\alpha$. Die gesuchte Annäherung des Kreisbogens durch einen Polygonzug ist also in einem ersten Schritt vollzogen.

Dabei läßt sich r_2 als erster Näherungswert für R aus den Formeln III und IV berechnen. Den so eingeschlagenen Weg verfolgen wir nun konsequent weiter. Die Figur XIX soll noch den nächsten Schritt verdeutlichen.



Figur XIX

$$\rho_1 = 4 \quad r_1 = 5 \quad R = 4,6620 \quad \frac{s}{2} = \sqrt{r_1^2 - \rho_1^2} = 3$$

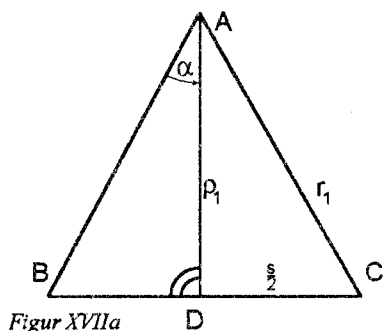
Aus Formel XIV folgt dann:

$$\alpha = \frac{\sqrt{r_1^2 - \rho_1^2}}{R} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{3}{4,6620} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 36,870^\circ = 36^\circ 52' 12''$$

Die eingangs gestellte Aufgabe ist also für ein konkretes Beispiel gelöst, und zwar ohne Trigonometrie. Das im vorangehenden Dargestellte führt nun zu interessanten Folgerungen.

6. 2. Folgerungen

1. Der durch die Rekursionformeln III und IV vermittelte Algorithmus gestattet auch eine unmittelbare Berechnung der Kreiszahl π , und zwar beliebig genau. Dazu müssen wir nur von speziellen Dreiecken ausgehen, bei denen wir die Zuordnung der gegebenen Strecken ρ_1 und r_1 zu dem zugehörigen Winkel α unmittelbar kennen. Wir wählen ein solches Dreieck:



Figur XVIIa

$$\begin{aligned} \sphericalangle BAD &= \alpha = 30^\circ \\ r_1 &= 1 \\ \rho_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{s}{2} &= \sqrt{r_1^2 - \rho_1^2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Aus Formel XIV folgt dann:

$$\pi = \frac{180^\circ}{\alpha} \cdot \frac{\sqrt{r_1^2 - \rho_1^2}}{R} = 6 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{R} = 6 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{0,955} = 3,1410$$

Es gelten dabei folgende Beziehungen:

$$\rho_4 = \frac{r_2 + \rho_2}{2} ; \quad r_4 = \sqrt{r_2 \cdot \rho_4}$$

für den Polygonzug:

$$B_2C_2 + C_2E_2 + E_2F_2 + F_2G_2 = s$$

für den Zentriwinkel:

$$\sphericalangle B_2JG_2 = 2\alpha$$

Setzen wir den Prozeß weiter fort, so ist anschaulich klar, daß die folgenden Polygonzüge sich immer mehr einem Kreisbogen annähern.

Dabei läßt sich der Radius dieses Kreisbogens durch die Formeln III und IV sukzessive rechnerisch bestimmen.

An dem konkreten Beispiel von Seite 40 wollen wir das Ergebnis unserer Darstellungen auswerten:

wobei aus der folgenden Tabelle die Berechnung von R ersichtlich wird:

$\rho_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$	$= 0,86603$	$r_1 = 1$	$= 1$
$\rho_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{3}$	$= 0,93301$	$r_2 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}}$	$= 0,96593$
$\rho_4 = \frac{1}{8}(2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{2 + \sqrt{3}})$	$= 0,94947$	$r_4 = \frac{1}{4} \sqrt{\sqrt{(2 + \sqrt{3})^3} + 2(2 + \sqrt{3})}$	$= 0,95766$
$\rho_8 =$	$= 0,95356$	$r_8 =$	$0,95561$
$\rho_{16} = 0,95459$	$\approx 0,955$	$r_{16} = 0,95510$	$\approx 0,955$

Bemerkung: Für den Unterricht kann Folgendes von Interesse sein: Will man den Winkel α berechnen (bei noch nicht bekannter Kreiszahl π), so setzt man zunächst den Algorithmus der Formeln III und IV wie im vorangehenden Beispiel für ein "sehr spezielles Dreieck" an. Dies führt zur Berechnung der Kreiszahl π . In einem zweiten Schritt läßt sich dann α mit allgemein gegebenen ρ_1 und r_1 nach dem im Prinzip gleichen Algorithmus berechnen.

2. Nun können wir den Seitenverhältnissen im Dreieck ABD Namen, bzw. Bezeichnungen geben. Wenn dies erst jetzt geschieht, hat das den Vorteil, daß der geistigen Anschauung eines Rechenprozesses die Namensgebung bzw. Bezeichnung folgt, nicht umgekehrt. Dies hat schon *K. Kommerell*, der große mathematische Didaktiker so empfohlen.

$$\begin{array}{cccc} \frac{\rho_1}{r_1} = \cos \alpha & \frac{\frac{s}{2}}{r_1} = \sin \alpha & \frac{\frac{s}{2}}{\rho_1} = \tan \alpha & \frac{\rho_1}{\frac{s}{2}} = \cot \alpha \\ \frac{\rho_1}{r_1} = \cos \alpha & \frac{\sqrt{r_1^2 - \rho_1^2}}{r_1} = \sin \alpha & \frac{\sqrt{r_1^2 - \rho_1^2}}{\rho_1} = \tan \alpha & \frac{\rho_1}{\sqrt{r_1^2 - \rho_1^2}} = \cot \alpha \end{array}$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt dann (für das Beispiel auf Seite 40 mit $r_1 = 5$; $\rho_1 = 4$; $\frac{s}{2} = 3$):

$$\begin{array}{l} \frac{4}{5} = 0,8 = \cos 36^\circ 52' \\ \frac{3}{5} = 0,6 = \sin 36^\circ 52' \\ \frac{3}{4} = 0,75 = \tan 36^\circ 52' \\ \frac{4}{3} = 1,333 = \cot 36^\circ 52' \end{array}$$

3. Das beschriebene Verfahren gestattet darüberhinaus für konkret gegebene $\rho_1 < r_1$ einen ganzen Satz von Winkeln samt den zugehörigen natürlichen Werten der trigonometrischen Funktionen zu bekommen. Es ist nämlich, was an den Figuren XVIII und XIX unmittelbar abzulesen ist:

Die eingangs gestellte Aufgabe ist also für ein konkretes Beispiel gelöst, und zwar ohne Trigonometrie. Das im vorangehenden Dargestellte führt nun zu interessanten Folgerungen.

Das beschriebene Verfahren gestattet darüberhinaus für konkret gegebene $\rho_1 < r_1$ einen ganzen Satz von Winkeln samt den zugehörigen natürlichen Werten der trigonometrischen Funktionen zu bekommen. Es ist nämlich, was an den Figuren XVIII und XIX unmittelbar abzulesen ist:

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{\rho_1}{r_1} \\ \cos \frac{\alpha}{2} &= \frac{\rho_2}{r_2} \\ \cos \frac{\alpha}{4} &= \frac{\rho_4}{r_4} \\ &\vdots \\ \cos \frac{\alpha}{2^k} &= \frac{\rho_{2^k}}{r_{2^k}}\end{aligned}$$

Damit lässt sich schon eine kleine Tabelle für die natürlichen Zahlen der trigonometrischen Funktion $\cos \gamma$ aufstellen, z.B. für $\rho_1 = 4$, $r_1 = 5$ (vgl dazu Tabelle auf Seite 40).

γ	$\alpha = 36^\circ 52'$	$\frac{\alpha}{2} = 18^\circ 26'$	$\frac{\alpha}{4} = 9^\circ 13'$	$\frac{\alpha}{8} = 4^\circ 37' \dots$
$\cos \gamma$	0,8	$4,5 : 4,74342 = 0,949$	0,987	0,997

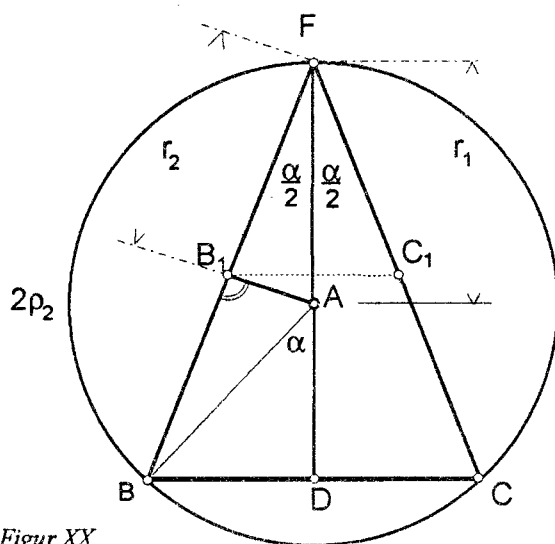
Entsprechendes lässt sich für die übrigen Winkelfunktionen durchführen, denn es ist:

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{\sqrt{r_1^2 - \rho_1^2}}{r_1} & \tan \alpha &= \frac{\sqrt{r_1^2 - \rho_1^2}}{\rho_1} & \cot \alpha &= \frac{\rho_1}{\sqrt{r_1^2 - \rho_1^2}} \\ \sin \frac{\alpha}{2} &= \frac{\sqrt{r_2^2 - \rho_2^2}}{r_2} & \tan \frac{\alpha}{2} &= \frac{\sqrt{r_2^2 - \rho_2^2}}{\rho_2} & \cot \frac{\alpha}{2} &= \frac{\rho_2}{\sqrt{r_2^2 - \rho_2^2}} \\ \sin \frac{\alpha}{4} &= \frac{\sqrt{r_4^2 - \rho_4^2}}{r_4} & \tan \frac{\alpha}{4} &= \frac{\sqrt{r_4^2 - \rho_4^2}}{\rho_4} & \cot \frac{\alpha}{4} &= \frac{\rho_4}{\sqrt{r_4^2 - \rho_4^2}} \\ &\vdots & &\vdots & &\vdots\end{aligned}$$

In der folgenden Tabelle sind für unser Beispiel die Ergebnisse ausgewertet:

γ	$\alpha = 36^\circ 52'$	$\frac{\alpha}{2} = 18^\circ 26'$	$\frac{\alpha}{4} = 9^\circ 13'$
$\cos \gamma$	0,8	0,949	0,987
$\sin \gamma$	0,6	0,31623	0,16018
$\tan \gamma$	0,75	0,33333	0,16228
$\cot \gamma$	1,33333	3	6,16219

4. Betrifft die Herleitung einer bemerkenswerten Formel von Euler:



Figur XX

Wir gehen aus von der Figur IIa und fällen von A das Lot AB_1 auf die Seite BF (vgl. Figur XX!).

Dann ist $AF = r_1$ und $B_1F = r_2$, d.h.

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{r_2}{r_1}$$

Entsprechendes gilt für die Figur XIX als Ausgangsfigur:

$$\cos \frac{\alpha}{4} = \frac{r_4}{r_2}$$

und weiter

$$\cos \frac{\alpha}{8} = \frac{r_8}{r_4} \text{ etc.}$$

Nun ist für die ersten 3 Schritte:

$$\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{4} \cdot \cos \frac{\alpha}{8} = \frac{r_8}{r_1}$$

Allgemein:

$$\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{4} \cdot \cos \frac{\alpha}{8} \cdot \dots \cdot \cos \frac{\alpha}{2^k} = \frac{r_{2^k}}{r_1}$$

Weiter ist

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_{2^k}}{r_1} = \frac{R}{r_1}$$

Damit konvergiert auch die linke Seite der vorletzten Gleichung und zwar gegen $\frac{R}{r_1}$.

Damit ist zunächst

$$\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{4} \cdot \cos \frac{\alpha}{8} \cdot \dots = \frac{R}{r_1}$$

Weiter folgt mit Gleichung XIV

$$\frac{R}{r_1} = \frac{180^\circ}{\pi \cdot \alpha} \cdot \frac{\sqrt{r_1^2 - \rho_1^2}}{r_1} = \frac{\sin \alpha}{\text{arc } \alpha} \quad 7$$

Insgesamt erhalten wir also die bemerkenswerte Formel von Euler:

$$\text{arc } \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{4} \cdot \cos \frac{\alpha}{8} \cdot \dots} \quad \text{XV}$$

⁷ vgl. Figur XVII

5. Wurde für speziell gegebene Ausgangsgrößen $\rho_1 < r_1$ der Algorithmus der Formeln III und IV durchgeführt, so kann man die folgende Frage stellen: Wie läßt sich der Grenzwert R als Funktion der Ausgangsgrößen ρ_1 und r_1 darstellen? Dies wollen wir kurz zeigen:

Aufgrund von Formel XIV ist:

$$R = \frac{180^\circ}{\alpha} \cdot \frac{\sqrt{r_1^2 - \rho_1^2}}{\pi} = \frac{\sqrt{r_1^2 - \rho_1^2}}{\frac{\alpha}{180^\circ} \cdot \pi} = \frac{\sqrt{r_1^2 - \rho_1^2}}{\arccos \frac{\rho_1}{r_1}}$$

Also:

$$R = \frac{\sqrt{r_1^2 - \rho_1^2}}{\arccos \frac{\rho_1}{r_1}} \quad \text{XVIa}$$

mit $\rho_1 < r_1$!

Damit kann die algorithmische Berechnung von R noch anderweitig kontrolliert werden.

6.

$\rho_1 = 8$	$r_1 = 2$
$\rho_2 = 5$	$r_2 = \sqrt{10}$
$\rho_4 = 4,08114\dots$	$r_4 = 3,59245\dots$
$\rho_8 = 3,83679\dots$	$r_8 = 3,71261\dots$
$\rho_{16} = 3,77470\dots$	$r_{16} = 3,74353\dots$
$\rho_{32} = 3,75911\dots$	$r_{32} = 3,75131\dots$
$\rho_{64} = 3,75521\dots$	$r_{64} = 3,75338\dots$
\vdots	\vdots

Es bleibt eine Frage noch offen.⁸ Die Konvergenz des Verfahrens mit den Rekursionsformeln II und IV wurde für $\rho_1 < r_1$ nachgewiesen. Was geschieht in dem zunächst nicht geometrisch deutbaren Fall $\rho_1 > r_1$ (z.B. $\rho_1 = 8, r_1 = 2$)?

In der Tabelle wurde das Verfahren rein formal für diesen Fall durchgeführt. Das Verfahren scheint also auch in diesem Fall zu konvergieren.

Das ist in der Tat so, denn es kann durch eine kompliziertere Rechenfolge⁹ gezeigt werden, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} r_{2n} = R_1$$

wobei

$$R_1 = \frac{\sqrt{\rho_1^2 - r_1^2}}{\ln \frac{\rho_1 + \sqrt{\rho_1^2 - r_1^2}}{r_1}} \quad \text{XVIb}$$

ist. mit $\rho_1 > r_1$!

Als Ausblick sei nur noch gesagt, daß unser rekursives Verfahren sich erweitern läßt im Hinblick auf die Berechnung von Logarithmen, worauf schon die Formel XVIb hindeutet. Dieses letztere hat Gauß entdeckt. Eine weitere Fortsetzung dieser Art von Rechnungen führt schließlich zur Berechnung von elliptischen Integralen durch das sog. arithmetisch-geometrische Mittel, wie dies ebenfalls von Gauß schon durchgeführt wurde.¹⁰

⁸ vgl. auch die erste Bemerkung im Abschnitt 2

⁹ vgl. nachfolgenden Abschnitt

¹⁰ vgl. auch Abschnitt 9.1.