7. Rekursive Rechengrundlagen der Berechnung der Logarithmen

7. 1. Eine Vorbetrachtung

Im Abschnitt 2 haben wir gezeigt, daß der algorithmische Rechenprozeß, den die Formeln III und IV vermitteln, für den Fall $\rho_1 < r_1$ gegen den Grenzwert R konvergiert. Im vorangehenden Abschnitt haben wir diesen Grenzwert ganz allgemein als Funktion seiner Ausgangsgrößen r_1 und ρ_1 ermittelt (vgl. Formel XVIa). Dabei wurde schon das Ergebnis des zunächst geometrisch nicht interpretierbaren Falles $\rho_1 > r_1$ ohne Beweis mitgeteilt (vgl. Formel XVIb)[11].

Zunächst zeigen wir wie sich aufgrund der Formel XVIb die natürlichen Logarithmen aller reellen Zahlen größer als 1 berechnen lassen:

In der Formel
$$R_1 = \frac{\sqrt{\rho_1^2 - r_1^2}}{\ln \dfrac{\rho_1 + \sqrt{\rho_1^2 - r_1^2}}{r_1}} \qquad \text{XVIb}$$

führen wir für ein t > 1 die folgende Substitution durch:

$$\left.\begin{aligned} \rho_1 &= 1 + t^2 \\ r_1 &= 2t \end{aligned}\right. \qquad \text{XVII}$$

Dann folgt daraus zunächst

$$\rho_1 - r_1 = (1-t)^2 > 0,$$

d.h. es ist dann auch $\rho_1 > r_1$.

Durch die Substitution XVII vereinfacht sich die Formel XVIb ganz wesentlich, und zwar ergibt sich durch eine kleine Rechnung

$$R_1 = \frac{t^2 - 1}{\ln t}$$

oder

$$\boxed{\ln t = \frac{t^2 - 1}{R_1} \quad - \quad (t > 1)} \qquad \text{XVIc}$$

Beispiel: Es soll ln 3 berechnet werden. Dann ist in der Formel XVIc $t = 3$. Die Substitutionsformeln XVII ergeben dann weiter:

$$\rho_1 = 1 + t^2 = 1 + 3^2 = 10$$

$$r_1 = 2t = 2 \cdot 3 = 6$$

Damit kann nun der Algorithmus der Formeln III und IV durchgeführt werden:

[11] Die Formeln XVIa und XVIb samt den zugehörigen Algorithmen finden sich in einem Brief von *Pfaff* an *Gauß* vom 8. Dezember 1800 (vgl. *C.F. Gauß*, Gesammelte Werke, Band X_1, Seite 234).

n	ρ_n	r_n
1	10	6
2	8	6,928203230276
4	7,464101615138	7,191162139815
8	7,327631877476	7,259076313954
16	7,29335409571	7,276195019751
32	7,284774557731	7,280483524943
64	7,282629041337	7,281556204118
128	7,282092622727	7,281824408483
256	7,2819585156	7,281891461733
⋮	⋮	⋮

$R_1 \approx 7{,}2819$

Als Ergebnis erhalten wir aufgrund von XVIc und obiger Tabelle:

$$\frac{8}{\rho_{256}} < \ln 3 < \frac{8}{r_{256}}$$

$$\frac{8}{7{,}2819585156} < \ln 3 < \frac{8}{7{,}281891461733}$$

$$1{,}098606 \quad < \ln 3 < \quad 1{,}098616$$

oder unter Berücksichtigung des obigen Näherungswertes für R_1:

$$\ln 3 = \frac{3^2 - 1}{R_1}$$

$$\approx \frac{8}{7{,}2819} = 1{,}0986$$

Die Annäherung entspricht also auf dieser Stufe der Genauigkeit von 4 Dezimalen nach dem Komma.

Bemerkung: Mit ein- und denselben Algorithmen, nämlich denjenigen der Formeln III und IV, lassen sich also die Werte von π, der trigonometrischen Funktionen und der Logarithmen berechnen.

7.2. Beweis der Formel XVIb

Bei diesem Beweis folgen wir Untersuchungen von Gauß aus seinem Nachlaß wie sie durch *K. Kommerell* in seinem Buch "Das Grenzgebiet der elementaren und höheren Mathematik"[12] wiedergegeben sind. Bei diesem Beweis überschreiten wir in der Tat das Grenzgebiet von der elementaren zur höheren Mathematik, wobei es höchst interessant ist, wie Gauß ein derartiges Problem durch eine besondere Substitutionstechnik bewältigt.

---

[12] vgl. Literaturhinweis am Ende der Schrift

Wir betrachten also den durch die Formeln III und IV vermittelten rekursiven Prozeß im Falle $\rho_1 > r_1$:

Nach Gauß sind durch die folgenden Substitutionen zwei *positive* Größen u_1 und v_1 bestimmt:

$$\boxed{\rho_1 = \frac{u_1^2+1}{u_1^2-1}\cdot v_1 \qquad r_1 = \frac{2u_1}{u_1^2-1}\cdot v_1 \qquad \text{XVIII}}$$

Daraus folgt

$$\frac{\rho_1}{r_1} = \frac{u_1^2+1}{2u_1}$$

und weiter

$$u_1 = \frac{\rho_1}{r_1} + \sqrt{\frac{\rho_1^2}{r_1^2} - 1} > 1$$

woraus

$$\boxed{v_1 = \sqrt{\rho_1^2 - r_1^2} \; - \; > 0}$$

folgt. XIX

Nun wird auf die Größen ρ_1 und r_1 der Algorithmus der Formeln III und IV angewandt:

$$\rho_2 = \frac{\rho_1 + r_1}{2} \qquad r_2 = \sqrt{r_1 \cdot \rho_2} \qquad \text{XX}$$

$$= \frac{u_1+1}{u_1-1}\cdot\frac{v_1}{2} \qquad = \frac{2\sqrt{u_1}}{u_1-1}\cdot\frac{v_1}{2}$$

Setzt man

$$\sqrt{u_1} = u_2 \quad \text{und} \quad \frac{v_1}{2} = v_2,$$

so lassen sich die Terme von ρ_2 und r_2 auf dieselbe Form wie diejenigen von ρ_1 und r_1 bringen:

$$\rho_2 = \frac{u_2^2+1}{u_2^2-1}\cdot v_2 \qquad r_2 = \frac{2u_2}{u_2^2-1}\cdot v_2 \qquad u_2 = \sqrt{u_1} \qquad v_2 = \frac{v_1}{2}$$

Entsprechend geht es weiter:

$$\rho_3 = \frac{u_3^2+1}{u_3^2-1}\cdot v_3 \qquad r_3 = \frac{2u_3}{u_3^2-1}\cdot v_3 \qquad u_3 = \sqrt{u_2} \qquad v_3 = \frac{v_2}{2}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\rho_n = \frac{u_n^2+1}{u_n^2-1}\cdot v_n \qquad r_n = \frac{2u_n}{u_n^2-1}\cdot v_n \qquad u_n = \sqrt{u_{n-1}} \qquad v_n = \frac{v_{n-1}}{2}$$

Im Folgenden sollen die Terme von ρ_n und r_n durch die Größen u_1 und v_1 ausgedrückt werden. Wir gehen zunächst von Beispielen aus, um an ihnen die allgemeinen Bildungsgesetze zu erkennen:

$$u_5 = \sqrt{u_4} = \sqrt[4]{u_3} = \sqrt[8]{u_2} = \sqrt[16]{u_1} = u_1^{\left(\frac{1}{2}\right)^4}$$

$$u_5^2 = u_1^{\left(\frac{1}{2}\right)^3}$$

$$v_5 = \tfrac{1}{2}v_4 = \tfrac{1}{4}v_3 = \tfrac{1}{8}v_2 = \tfrac{1}{16}v_1 = \tfrac{1}{2^4}v_1$$

Es gilt also für alle $n = 2, 3, \ldots$

$$u_n = u_1^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

$$u_n^2 = u_1^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}$$

$$v_n = \frac{v_1}{2^{n-1}}$$

Damit ist also

$$\boxed{\rho_n = \frac{u_1^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}} + 1}{u_1^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}} - 1} \cdot \frac{v_1}{2^{n-1}}} \qquad \boxed{r_n = \frac{2 \cdot u_1^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}}{u_1^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}} - 1} \cdot \frac{v_1}{2^{n-1}}} . \qquad \text{XXI}$$

Nun interessieren wir uns für die Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} r_n$. Wir erkennen, daß diese Grenzwerte nicht unmittelbar zu finden sind. Die folgende Zwischenbetrachtung wird aber dazu das Rüstzeug geben:

Mit $u_1 > 1$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} u_1^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2^{n-1}]{u_1} = 1$

Für das Folgende hilft uns die Substitution

$$\boxed{1 + \frac{1}{N} = u_1^{\frac{1}{n}}} \qquad \text{weiter.} \qquad \text{XXII}$$

Mit $u_1 > 1$ ist dann $N > 0$ und mit wachsendem n wächst dann auch N. Strebt n insbesondere gegen ∞, so tut dies auch N. Aus XXII folgt weiter:

$$\frac{1}{N} = u_1^{\frac{1}{n}} - 1$$

$$\frac{1}{n} \cdot \ln u_1 = \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right)$$

$$n = \frac{\ln u_1}{\ln\left(1 + \frac{1}{N}\right)}$$

Und schließlich ist

$$\boxed{n \cdot \left(u_1^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \frac{1}{N} \cdot \frac{\ln u_1}{\ln\left(1 + \frac{1}{N}\right)} = \frac{\ln u_1}{\ln\left(1 + \frac{1}{N}\right)^N}} \qquad \text{XXIII}$$

Nun setzen wir als bekannt voraus:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \tfrac{1}{N}\right)^N = e \qquad \text{und} \qquad \lim_{N\to\infty} \ln\left(1 + \tfrac{1}{N}\right)^N = \ln e = 1 .$$

Aus Formel XXIII folgt dann schließlich:

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(u_1^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \lim_{N\to\infty} \frac{\ln u_1}{\ln\left(1 + \frac{1}{N}\right)^N} = \ln u_1$$

Damit kann nun die Konvergenz der Folgen ρ_n und r_n bewiesen und ihre Grenzwerte bestimmt werden.

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n = \lim_{n\to\infty} \frac{u_1^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}} + 1}{u_1^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}} - 1} \cdot \frac{v_1}{2^{n-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{u_1^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}} + 1}{2^{n-2} \cdot \left(u_1^{\frac{1}{2^{n-2}}} - 1\right)} \cdot \frac{v_1}{2}$$

$$= \frac{1+1}{\ln u_1} \cdot \frac{v_1}{2}$$

$$= \frac{v_1}{\ln u_1}$$

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot u_1^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}}{u_1^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}} - 1} \cdot \frac{v_1}{2^{n-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{u_1^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}}{2^{n-2}\left(u_1^{\frac{1}{2^{n-2}}} - 1\right)} \cdot v_1$$

$$= \frac{1}{\ln u_1} \cdot v_1 = \frac{v_1}{\ln u_1}$$

Es ist also $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = \lim\limits_{n\to\infty} r_n = R_1$ (vgl. Abschnitt 6.2).

Aufgrund der Substitutionen XIX ergibt sich nun die Darstellung des Grenzwertes R_1 als Funktion der Ausgangsgrößen ρ_1 und r_1 (mit $\rho_1 > r_1$), was zu zeigen war.

$$R_1 = \frac{v_1}{\ln u_1} = \frac{\sqrt{\rho_1^2 - r_1^2}}{\ln \dfrac{\rho_1 + \sqrt{\rho_1^2 - r_1^2}}{r_1}}$$

Bemerkung: Vergleicht man die für $\rho_1 < r_1$ und $\rho_1 > r_1$ ermittelten Grenzwerte R, R_1 so ergibt sich mit

$$R = \frac{\sqrt{r_1^2 - \rho_1^2}}{\arccos \dfrac{\rho_1}{r_1}} = i \cdot \frac{\sqrt{\rho_1^2 - r_1^2}}{\arccos \dfrac{\rho_1}{r_1}}$$

zunächst

$$\frac{R}{R_1} = i \cdot \frac{\ln \dfrac{\rho_1 + \sqrt{\rho_1^2 - r_1^2}}{r_1}}{\arccos \dfrac{\rho_1}{r_1}}.$$

Setzt man nun $R = R_1$, so erhält man eine in der Funktionentheorie bekannte Beziehung, nämlich:

$$\boxed{\arccos \frac{\rho_1}{r_1} = i \cdot \ln \frac{\rho_1 + \sqrt{\rho_1^2 - r_1^2}}{r_1}} \qquad \text{XXIV}$$