TEIL II - FOLGEN UND SKALEN

1. ERGÄNZENDE BEMERKUNGEN ZU DEN BEGRIFFEN "HARMONISCHES MITTEL" UND "HARMONISCH GELEGENE PUNKTE"

1. Wenn die Strecke UU' das harmonische Mittel aus den Strecken AU' und BU' ist, so ist aus der Symmetrie der Figur VII[13] zu vermuten, daß für die Strecke AB Entsprechendes gilt. In der Tat folgt dies schon aus der 2. Bemerkung auf Seite15, indem wir die Beziehung

$$\frac{AU}{BU}=\frac{AU'}{BU'} \quad \text{in die Beziehung} \quad \frac{AU}{AU'}=\frac{BU}{BU'} \text{ umformen.}$$

Wenn wir nun die Buchstaben in den Strecken-Bezeichnungen der letzten Beziehung austauschen, erhalten wir eine Darstellung dieser Beziehung, die mit der ersten in Bezug auf strukturelle Gesichtspunkte verglichen werden kann (Streckenorientierungen von der Art $AU = -UA$ lassen wir zunächst außer acht):

$\frac{AU}{BU}=\frac{AU'}{BU'}$	bedeutet:	Die Punkte A, B werden durch die Punkte U, U' harmonisch getrennt. UU' ist das harmonische Mittel aus den Teilstrecken AU' und BU'.
$\frac{UA}{U'A}=\frac{UB}{U'B}$	bedeutet:	Die Punkte U, U' werden durch die Punkte A, B harmonisch getrennt. AB ist das harmonische Mittel aus den Teilstrecken UB und $U'B$.

Anders geschrieben: Es ist

$$\frac{AU}{BU}:\frac{AU'}{BU'}=\frac{UA}{U'A}:\frac{UB}{U'B}=-1 \quad \text{(mit Streckenorientierung)}$$

Mit den vier Punkten eines "harmonischen Wurfes" lassen sich also genau zwei verschiedene harmonische Mittel bilden, welche über die vier Punkte nicht hinausführen. Ein über diese Punkte hinausführender Prozeß wurde im ersten Teil, Abschnitt 4.2 genauer beschrieben.

Wenn wir das Ganze rein rechnerisch beweisen wollen, dann stellt sich zunächst die Frage, ob das harmonische Mittel h aus den Strecken UB und $U'B$ identisch ist mit der Strecke AB. Dies ist nun leicht zu zeigen. Der Figur VII entnehmen wir zunächst die folgenden Beziehungen:

$$AU' = BU' - AB$$
$$UU' = BU' - BU.$$

Außerdem ist aufgrund der Voraussetzung UU' harmonisches Mittel aus AU' und BU', d.h.

$$UU' = \frac{2AU' \cdot BU'}{AU' + BU'}.$$

Mit diesen Substitutionen läßt sich die obige Beziehung in eine solche für AB umformen, was im folgenden Rechengang angedeutet werden soll:

---

[13] siehe Seite 14

$$U' = BU' - BU = \frac{2(BU' - AB) \cdot BU'}{BU' - AB + BU'}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$AB(BU + BU') = 2BU' \cdot BU$$

$$AB = \frac{2BU \cdot BU'}{BU + BU'} = h \qquad q.e.d.$$

b. Die beiden harmonischen Mittel UU' und AB haben im allgmeinen nicht die gleichen Werte. Es erhebt sich die Frage, ob sie in speziellen Fällen doch gleiche Werte haben können. Die gleiche Frage stellt sich auch für die am Anfang der 2. und 3. Bemerkung auf Seite 15 beschriebenen Teilverhältnisse. Diesen Fragenkomplex wollen wir noch etwas genauer untersuchen und die Ergebnisse zusammenfassen.

An der Figur VII lesen wir zunächst die folgenden Beziehungen ab

$$AU = p \qquad BU = q \qquad AB = p + q$$

Damit ist

$$\frac{AU}{BU} = \frac{AU'}{BU'} = \frac{p}{q}.$$

Aus

$$AB = \frac{2BU \cdot BU'}{BU + BU'}$$

folgt dann weiter:

$$p + q = \frac{2q \cdot BU'}{q + BU'} \qquad \text{oder} \qquad BU' = \frac{q \cdot (p+q)}{q - p}$$

Aus $AU' = \frac{p}{q} \cdot BU'$ folgt schließlich: $AU' = \frac{p \cdot (p+q)}{q-p}$.

Damit lassen sich nun alle vier paarweise möglichen Teilverhältnisse und die beiden harmonischen Mittel hinsichtlich ihrer Werte vergleichen:

1.) $\frac{AU}{BU} = \frac{AU'}{BU'} = \frac{p}{q}$ und $\frac{AU}{AU'} = \frac{BU}{BU'} = \frac{q-p}{p+q}$ je zwei gleiche Teilverhältnisse

2.) $UU' = \frac{2pq}{q-p}$ und $AB = p+q$ zwei verschiedene harm. Mittel

Nun betrachten wir die möglichen Sonderfälle. Sie gibt es tatsächlich, und zwar, wenn $p = q \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)$ ist, was leicht nachzuprüfen ist.

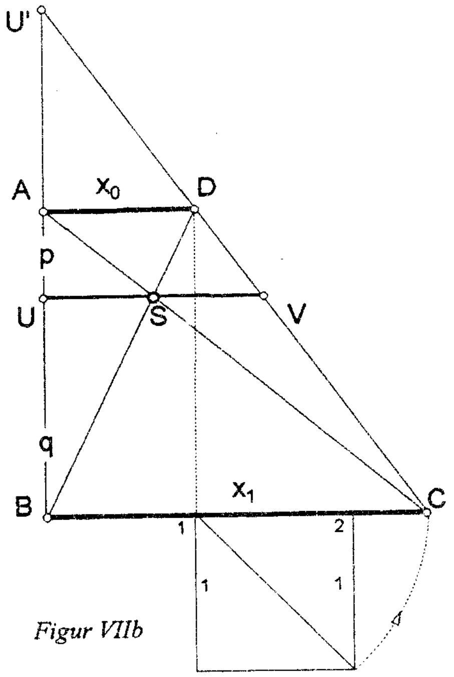
In diesen Fällen ist

$$\frac{p}{q} = \frac{q-p}{p+q} = \sqrt{2} - 1,$$

das heißt, die in Frage kommenden vier Teilverhältnisse haben alle den gleichen Wert. Demzufolge trifft dies auch für die beiden harmonischen Mittel zu, denn es ist in diesem Fall auch

$$\frac{2pq}{q-p} = p + q \qquad \text{oder } UU' = AB$$

In der folgenden Zeichnung ist das Prinzip des Sonderfalls gezeichnet bzw. konstruiert:



Figur VIIb

$$\frac{AU}{BU}=\frac{AU'}{BU'}\overset{!}{=}\frac{AU}{AU'}=\frac{BU}{BU'}=\frac{\sqrt{2}-1}{1}=\frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

$$UU'=AB$$

Konstruktionsdaten:

$$AD=x_0=1$$

$$BC=x_1=1+\sqrt{2}$$

so daß $\quad \dfrac{x_0}{x_1}=\dfrac{p}{q}=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$

Außerdem wurde $AB=p+q=2$ frei bestimmt.

Dann ist $\quad \dfrac{AU}{BU}=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}},\quad UU'=AB=p+q=2$

und $\quad UV=m_h=\dfrac{2x_0x_1}{x_0+x_1}=\sqrt{2}$.

Bemerkung die Symmetrie der Figur VIIb betreffend:

Es ist $BU=AU'$

2. Arithmetische, geometrische und harmonische Folgen und die drei sie konstituierenden klassischen Mittelbildungen

Die drei klassischen Mittelbbildungen konstituieren drei wesentliche verschiedene Folgen, für die wir zunächst einige Beispiele geben wollen (mit n = 0, 1, 2, ... für alle Folgen):

Arithmetische Folgen:

$$a_n=1+n \quad\rightarrow\quad a_n=1,2,3,4,\ldots$$

$$b_n=\frac{1}{9}+\frac{4}{45}n \quad\rightarrow\quad b_n=\frac{1}{9},\frac{1}{5},\frac{13}{45},\frac{17}{45},\frac{7}{15},\frac{5}{9},\frac{29}{45},\ldots$$

Geometrische Folgen:

$$c_n=2^n \quad\rightarrow\quad c_n=1,2,4,8,16,\ldots$$

$$d_n=\frac{8}{9}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n \quad\rightarrow\quad d_n=\frac{8}{9},\frac{3}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{9},\frac{4}{27},\frac{8}{81},\ldots$$

Harmonische Folgen

$$e_n=\frac{1}{1+n} \quad\rightarrow\quad e_n=1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\ldots$$

$$f_n=\frac{8}{8+n} \quad\rightarrow\quad f_n=1,\frac{8}{9},\frac{4}{5},\frac{8}{11},\frac{2}{3},\frac{8}{13},\frac{4}{7},\ldots$$

$$g_n=\frac{4}{1+3n} \quad\rightarrow\quad g_n=4,1,\frac{4}{7},\frac{2}{5},\frac{4}{12},\frac{1}{4},\ldots$$

$$h_n=\frac{10}{10-n} \quad\rightarrow\quad h_n=1,\frac{10}{9},\frac{5}{4},\frac{10}{7},\frac{5}{3},2,\frac{5}{2},\frac{10}{3},5,10,\overset{!}{\infty},-10,-5,\ldots$$

2. 1. Erste Charakterisierung der Folgen:

Jedes Glied einer Folge ist entsprechendes Mittel aus den spiegelbildlich zu ihm gelegenen Folgengliedern. Für das Folgende seien ganz allgemein x_n, y_n und z_n solche Mittelglieder.

Für die arithmetischen Folgen gilt:

$$m_a = x_n = \frac{x_{n-m} + x_{n+m}}{2} \quad \text{mit } m \leq n;$$

im Falle $x_n = a_n$ ist z.B.

$$a_4 = 5 = \frac{a_2 + a_6}{2} = \frac{3+7}{2}.$$

Für die geometrischen Folgen gilt:

$$m_g = y_n = \sqrt{y_{n-m} \cdot y_{n+m}} \quad \text{mit } m \leq n;$$

also im Falle $x_n = d_n$ ist z.B.

$$d_3 = \frac{1}{3} = \sqrt{a_0 \cdot a_6} = \sqrt{\frac{9}{8} \cdot \frac{8}{81}}$$

Für die harmonische Folgen gilt:

$$\frac{1}{m_h} = \frac{1}{z_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z_{n-m}} + \frac{1}{z_{n+m}}\right) \qquad \text{mit } m \leq n;$$

also im Falle $x_n = g_n$ ist z.B.:

$$\frac{1}{g_3} = \frac{5}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_5}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{4}{1}\right)$$

2.2. Zweite Charakterisierung der Folgen:

Alle drei Folgen lassen sich auch durch Bedingungen beschreiben, in denen eine für sie charakteristische Konstante maßgebend ist.

Im Falle der arithmetischen Folge ist

$$x_n - x_{n-1} = \text{const} \qquad \text{für alle } n \geq 1$$

Beispiel:

$$b_n - b_{n-1} = \frac{4}{45} = \text{const.}$$

Im Falle der geometrischen Folge ist:

$$\frac{y_n}{y_{n-1}} = \text{const. für alle } n \geq 1$$

Beispiel:

$$\frac{d_n}{d_{n-1}} = \frac{2}{3} = \text{const.}$$

Im Falle der harmonischen Folge ist:

$$\frac{1}{z_n} - \frac{1}{z_{n-1}} \qquad = \text{const. für alle } n \geq 1$$

Beispiel:

$$\frac{1}{g_n} - \frac{1}{g_{n-1}} = \frac{1+3n}{4} - \frac{1+3(n-1)}{4} = \frac{3}{4} \qquad = \text{const.}$$

2.3. Dritte übergreifende Charakterisierung der drei Folgen

Die ersten beiden Charakterisierungen sind äquivalent zueinander, d.h. die eine folgt aus der anderen. Das läßt sich am zeigen, wenn wir für die drei Folgen eine Formel für das allgemeine Glied ermitteln.

Arithmetische Folgen mit allgemeinem Glied x_n.

Aufgrund der ersten Charakterisierung gilt

$$x_{n-1} = \frac{x_n + x_{n-2}}{2} \qquad \text{für alle } n \geq 2,$$

woraus sich

$x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}$ rekursiv berechnen läßt.

Damit läßt sich x_n aus den Anfangsgliedern x_0 und x_1 der Folge wie folgt ermitteln:

$$\begin{aligned}
x_0 &= x_0 \\
x_1 &= x_1 \\
x_2 &= 2x_1 - x_0 \\
x_3 &= 2x_2 - x_1 = 2(2x_1 - x_0) - x_1 \\
&= 3x_1 - 2x_0 \\
x_4 &= 4x_1 - 3x_0 \\
&\vdots \\
x_n &= nx_1 - (n-1)x_0
\end{aligned}$$

Es ist also: $\quad x_n = nx_1 - (n-1)x_0 \qquad$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$

Aus dieser Formel lassen sich die zuvor für diese Folge gegebenen Charakterisierungen leicht ableiten:

Zur ersten Charakterisierung:

Es ist $\quad x_n - x_{n-1} = x_1 - x_0 \qquad = \text{const.}$ für alle $n \geq 1$, oder allgemeiner:

$x_n - x_{n-v} = v \cdot (x_1 - x_0) \; = \text{const}$ für alle $n \geq 1$ und für ein beliebig, aber fest gewähltes v $(0 \leq v \leq n)$

Zur zweiten Charakterisierung:

Es gelten zunächst die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned}
x_{n+m} &= (n+m)x_1 - (n+m-1)x_0 \\
x_{n-m} &= (n-m)x_1 - (n-m-1)x_0 \\
x_n &= \quad n \; x_1 - \quad (n-1) \; x_0
\end{aligned}$$

Damit folgt dann weiter

$$x_{n+m} - x_n = mx_1 - mx_0$$
$$x_n - x_{n-m} = mx_1 - mx_0$$

Es ist also

$$x_{n+m} - x_n = x_n - x_{n-m} \quad \text{oder} \quad x_n = \frac{x_{n-m} + x_{n+m}}{2}$$

Im folgenden seien die charakteristischen Merkmale einer arithmetischen Folge zusammengestellt.

$$x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}$$
$$x_n = nx_1 - (n-1)x_0$$

Zwei allgemeine Bildungsgesetze, rekursiv und explizit

$$x_n - x_{n-\nu} = \nu(x_1 - x_0) = \text{const}$$

Invarianz - Gesetz

$$x_n = \frac{x_{n-m} + x_{n+m}}{2}$$

Symmetrie - Gesetz

In Bezug auf die beiden anderen Folgen können wir ganz analog vorgehen. Im folgenden sind die Ergebnisse entsprechend der obigen Gliederung angegeben (im Fall der harmonischen Folgen muß $\frac{z_0}{z_1} = \frac{n-1}{n}$ ausgeschlossen werden.):

geometrische Folgen mit allgmeinem Glied y_n

$$y_n = \frac{y_{n-1}^2}{y_{n-2}}$$
$$y_n = \frac{y_1^n}{y_0^{n-1}}$$
$$\frac{y_n}{y_{n-\nu}} = \left(\frac{y_1}{y_0}\right)^\nu = \text{const}$$
$$y_n = \sqrt{y_{n-m} \cdot y_{n+m}}$$

harmonische Folgen mit allgemeinem Glied z_n

$$z_n = \frac{z_{n-1} \cdot z_{n-2}}{2z_{n-2} - z_{n-1}}$$
$$z_n = \frac{z_0 \cdot z_1}{nz_0 - (n-1)z_1}$$
$$\frac{1}{z_n} - \frac{1}{z_{n-\nu}} = \nu\left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_0}\right) = \text{const}$$
$$\frac{1}{z_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z_{n-m}} + \frac{1}{z_{n+m}}\right)$$

Beispiel: Die Folge d_n beginnt mit den Gliedern $y_0 = \frac{9}{8}$ und $y_1 = \frac{3}{4}$.

Also ist:

$$y_n = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\left(\frac{9}{8}\right)^{n-1}} = \frac{9}{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = d_n$$

und

$$\frac{y_n}{y_{n-1}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{9}{8}} = \frac{2}{3} = \text{const}$$

Beispiel: Die Folge f_n beginnt mit den Gliedern $z_0 = 1$ und $z_1 = \frac{8}{9}$.

Also ist

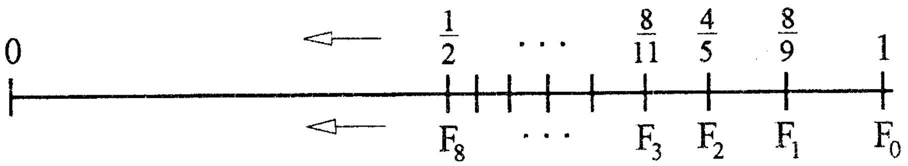
$$z_n = \frac{1 \cdot \frac{8}{9}}{n \cdot 1 - (n-1) \cdot \frac{8}{9}} = \frac{8}{8+n} = f_n$$

und

$$\frac{1}{z_n} - \frac{1}{z_{n-1}} = \left(\frac{1}{\frac{8}{9}} - 1\right) = \frac{1}{8} = \text{const}$$

3. Die den drei Folgentypen entsprechenden Skalentypen

Den drei charakterisierten Folgen lassen sich nun drei verschiedene Typen von Skalen zuordnen, wenn man den einzelnen Werten der Folge Punkte auf einer Skala zuordnet. Für die harmonische Folge f_n sieht das zum Beispiel wie folgt aus:



Entspechend den drei Folgen ergeben sich so drei Typen von Skalen:

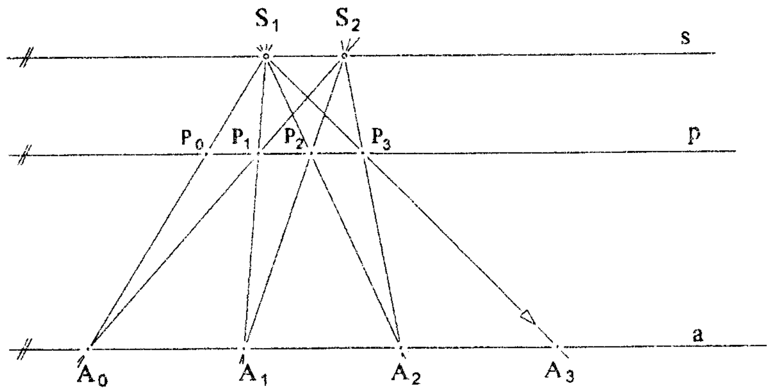
1. Die additive Skala entspricht einer arithmetischen Folge, auch Skale des *Schrittmaßes* genannt.

2. Die multiplikative Skala entspricht einer geometrischen Folge, Skala des *Wachstumsmaßes* genannt.

3. Die harmonische Skala entspricht einer harmonischen Folge. Die obige Skala ist eine solche.

Alle drei Skalen lassen sich in Gedankengänge und Konstruktionen der projektiven Geometrie einordnen. Es ist sehr lehrreich, die entsprechende Literatur über diesen Zusammenhang zu studieren.[14] Wir übernehmen hier einige dieser Ergebnisse und konstruieren jeweils ein Beispiel für die drei Skalentypen:

Die Skala des Schrittmaßes (entsprechend einer arithmetischen Folge x_n):



Hier erkennt man unmittelbar aufgrund der ersten beiden Strahlensätze (mit $a \parallel p \parallel s$):

$$\frac{A_1A_2}{S_1S_2} = \frac{A_1P_2}{P_2S_2} \quad \text{(2. Strahlensatz; Scheitel } P_2\text{)}$$

$$\frac{A_1P_2}{P_2S_2} = \frac{A_1P_1}{P_1S_1} \quad \text{(1. Strahlensatz; Scheitel } A_1\text{)}$$

$$\frac{A_1P_1}{P_1S_1} = \frac{A_0A_1}{S_1S_2} \quad \text{(2. Strahlensatz; Scheitel } P_1\text{)}$$

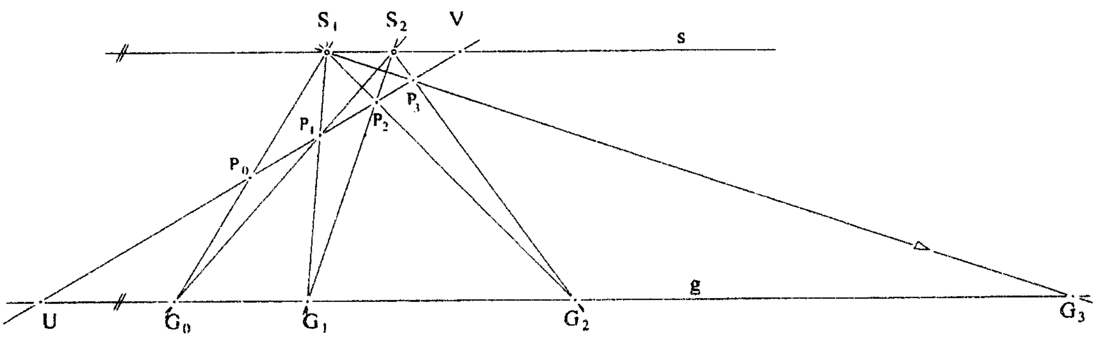
---

14 A. Bernhard; Projektive Geometrie, Stuttgart 1984, Kapitel 14 u. 18
L. Locher-Ernst; Raum und Gegenraum, Dornach 1957, 21. Kapitel (Die drei Urskalen)
R. Ziegler, Mathematik und Geisteswissenschaft, Dornach 1992, Kapitel III (Zur geom. Unendlichkeit)

Damit ist also $A_1A_2 \quad = \quad A_0A_1$

allgemein $A_{n-1}A_n \quad = \quad A_0A_1 \quad = \quad d \quad = \quad const$

Die Skala des Wachstumsmaßes (entsprechend einer geometrischen Folge):



Auch hier erkennt man unmittelbar aufgrund des dritten Strahlensatzes (mit $s \parallel g$):

$$\frac{UG_3}{UG_2} = \frac{VS_1}{VS_2} \qquad \text{(3. Strahlensatz; Scheitel } P_3\text{)}$$

$$\frac{UG_2}{UG_1} = \frac{VS_1}{VS_2} \qquad \text{(3. Strahlensatz; Scheitel } P_2\text{)}$$

Es ist also

$$\frac{UG_3}{UG_2} = \frac{UG_2}{UG_1} \, .$$

Allgemein:

$$\frac{UG_n}{UG_{n-1}} = \frac{UG_1}{UG_0} = q = const \, .$$

Die Skala des harmonischen Maßes (entsprechend einer harmonischen Folge):

Für das Folgende benützen wir als Voraussetzung die Resultate aus den Bemerkungen zu Figur VII[15] und die harmonischen Lagebeziehungen, wie sie am vollständigen Viereck (bzw. Vierseit) auftreten [16].

Wie wir gesehen haben ist eine harmonische Folge z_n durch die Anfangswerte z_0 und z_1 bestimmt.[17] Diese Werte bestimmen zusammen mit dem Wert 0 drei Punkte auf der zu konstruierenden Skala, wodurch im projektiven Sinn ein eindeutiger Durchlaufungs-Sinn auf der Skala festliegt. Dabei entspricht die Folge 0, z_0, z_1 dem einen, die Folge 0, z_1, z_0 dem anderen Durchlaufungs-Sinn. Wir beschränken uns hier zunächst auf den Fall $z_1 < z_0$, d.h. z_1 liegt zwischen 0 und z_0 (vgl. die folgende Skizze). In diesem Fall handelt es sich also um eine monoton fallende harmonische Folge. Der zur

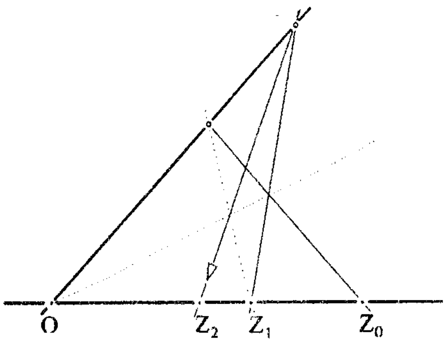
15 siehe Seite 14

16 vgl. dazu z.B. *A. Bernhard*, Projektive Geometrie, Stuttgart 1984, Kapitel 18

17 vgl. Seite 57

konstruierende vierte harmonische Punkt Z_2, der z_2 entspricht, liegt dann zwischen O und Z_1, wobei wir die den Werten z_n entsprechenden Punkte auf der Skala mit großen Buchstaben geschrieben haben und dies weiter so handhaben wollen.

Konstruktionsskizze:



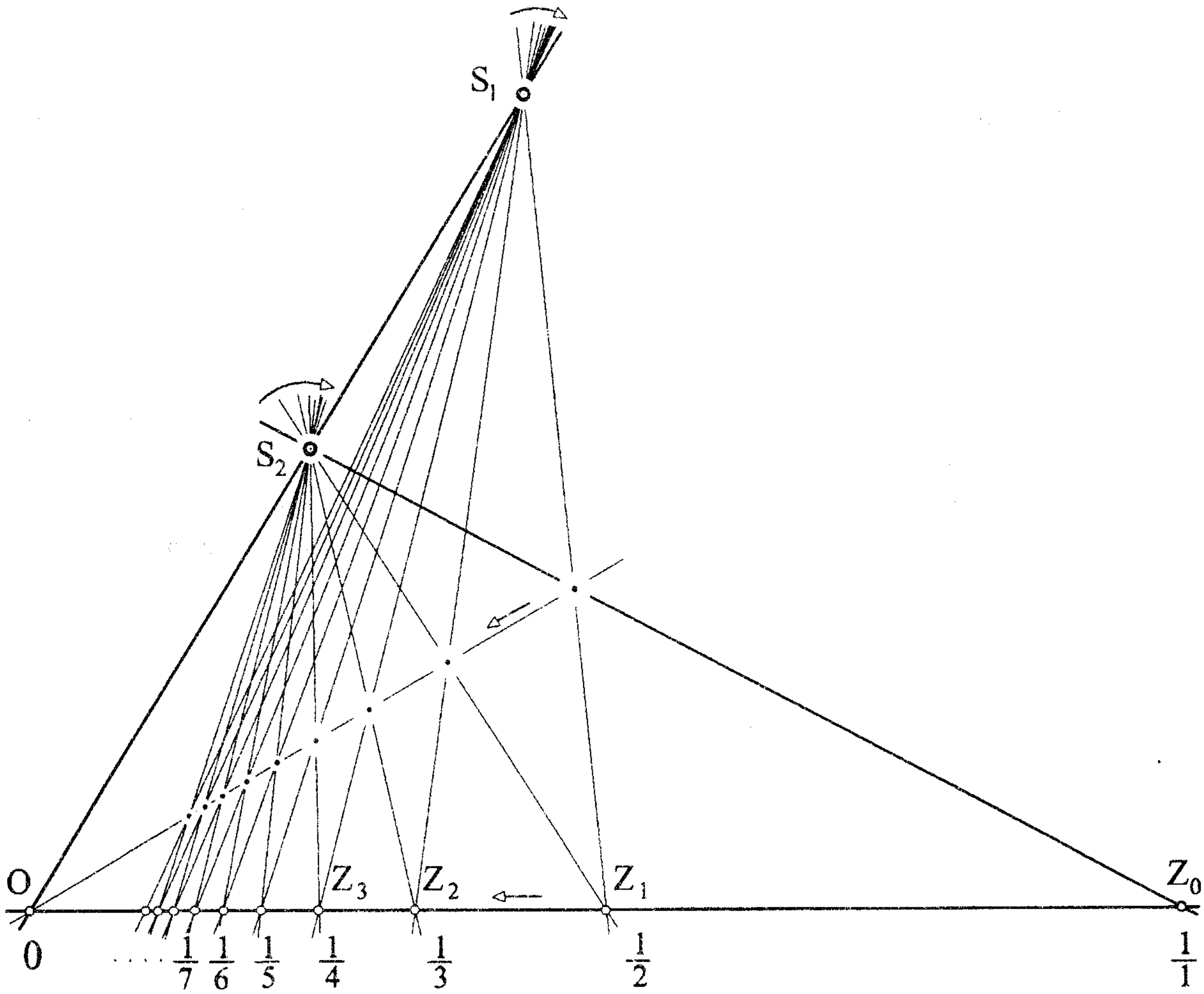
Der Punkt Z_2 wurde so konstruiert, daß

$$\frac{OZ_2}{Z_1Z_2} = (-)\frac{OZ_0}{Z_1Z_0} \text{ ist (mit Streckenorientiertheit),}$$

d.h. die Strecke $0Z_1$ wird innen und außen im gleichen Verhältnis geteilt. Außerdem ist dann OZ_1 das harmonische Mittel aus den Strecken OZ_2 und OZ_0, also

$$OZ_1 = \frac{2 \cdot OZ_0 \cdot OZ_2}{OZ_0 + OZ_2}.$$

Im folgenden wurde die der harmonischen Folge $z_n = e_n = \frac{1}{1+n}$ entsprechende Skala konstruiert. Dabei wurde das zuvor beschriebene Konstruktionsprinzip wiederholt angewandt.



Bemerkungen: Auf die Saitenlänge des Monochords bezogen handelt es sich dabei um die Skala der Obertöne. Stets gilt dann:

$$OZ_n = \frac{2 \cdot OZ_{n-1} \cdot OZ_{n+1}}{OZ_{n-1} + OZ_{n+1}} = \frac{1}{n+1} \text{ für } n = 1, 2, 3, \ldots, \text{ wobei } OZ_0 = 1$$

Bezüglich der zuvor beschriebenen Skala, welche als relative Saitenlängen auf dem Monochord interpretiert den Tönen einer Obertonreihe entspricht, ist noch folgendes bemerkenswert:

n	$z_n = e_n = \frac{1}{n+1}$	Folge harmon. Punktwürfe $0, Z_n, Z_{n+1}, Z_{n+2}$	Folge der Werte des Teilverhältnispaares $\frac{OZ_{n+2}}{Z_{n+1}Z_{n+2}} = (-)\frac{OZ_n}{Z_{n+1}Z_n}$
0	1	$0 \quad 1 \quad \frac{1}{2} \to \frac{1}{3}$	$2 = 2$
1	$\frac{1}{2}$	$0 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4}$	$3 = 3$
2	$\frac{1}{3}$	$0 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5}$	$4 = 4$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$\frac{1}{n+1}$	$0 \quad \frac{1}{n+1} \quad \frac{1}{n+2} \quad \frac{1}{n+3}$	$n+2 = n+2$

Wir entnehmen die elementare Tatsache, daß mit der *harmonischen* Progression der Obertonreihe eine Folge von Teilverhältnissen verknüpft ist, die als *arithmetische* Progression die entspr. Untertonreihe bildet.[18]

Bei der Folge $z_n = h_n = \frac{10}{10-n}$ ist $z_0 = 1$ und $z_1 = \frac{10}{9}$. Hier ist also $z_1 > z_0$. Sehr zu empfehlen ist die Konstruktion einer entsprechenden Skala auch in diesem Fall.

4. Proportionen der Dur-Ton-Intervalle

Die Saite eines Monochords werde z.B. auf den Grundton c gestimmt. Beim Zupfen der Saite schwingt sie dann mit der Frequenz 128 Hz. Bestimmt man nun rein durch genaues Hören die relativen Saitenlängen, die den einzelnen Tonintervallen einer Dur-Tonleiter entsprechen, so führt dies zu einer Dur-Tonskala auf der Saite. Diese Dur-Tonskala mit ihren relativen Saitenlängen hat in Verhältnis-Zahlen geschrieben das folgende Aussehen (reine physikalische Stimmung):

c	1 : 1	Prim
d	8 : 9	große Sekunde
e	4 : 5	große Terz
f	3 : 4	Quarte
g	2 : 3	Quinte
a	3 : 5	große Sext
h	8 : 15	große Septime
c'	1 : 2	Oktave

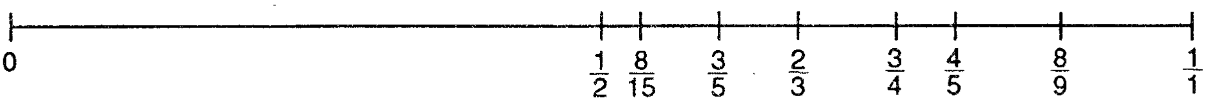
[18] vgl. dazu auch Abschnitt 8.

Nun ist 24 das kleinste gemeinsame Vielfache aus den Zählern der obigen Verhältniszahlen, weshalb wir das Ganze in einer fortlaufenden Proportion schreiben können:

$$24 : 27 : 30 : 32 : 36 : 40 : 45 : 48$$

Hier entspricht z.B. der speziellen Proportion 24 : 32 = 3 : 4 die Quart.

Die Skala der relativen Saitenlängen der Dur-Tonskala hat dann folgendes Aussehen:



5. HARMONISCHE MITTELBILDUNGEN IM ZUSAMMENHANG MIT DER DUR-TONSKALA

5.1. Rechnerische Grundlagen

Ausgehend von den drei ersten Intervallen der Dur-Tonskala stellen wir zunächst das folgende fest:

$\frac{8}{9}$ ist das harmonische Mittel von $\frac{1}{1}$ und $\frac{4}{5}$
$\frac{4}{5}$ " " $\frac{1}{1}$ und $\frac{2}{3}$
$\frac{2}{3}$ " " $\frac{1}{1}$ und $\frac{1}{2}$

Setzt man diese Reihe (genauer: Folge) im gleichen Sinne fort, dann führt dies auf eine bemerkenswerte Proportionenfolge, welche charakteristische Intervalle der Dur-Tonskala entsprechen. Natürlich ist diese Folge dann keine harmonische Folge im engeren Sinn. Ihr Bildungsgesetz wollen wir jetzt algebraisch fassen. Es sei $z_0 = 1$, z_{n-1} das schon bekannte harmonische Mittel aus z_0 und der gesuchten neuen Verhältniszahl z_n. Dann gilt:

$$z_{n-1} = \frac{2z_0 z_n}{z_0 + z_n} = \frac{2z_n}{1+z_n},$$

woraus sich z_n rekursiv berechnen läßt:

$$z_n = \frac{z_{n-1}}{2 - z_{n-1}} \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

Beispiel:
$z_{n-1} = \frac{4}{5}$

$$z_n = \frac{\frac{4}{5}}{1+\frac{4}{5}} = \frac{2}{3}$$

Es ist also:

$$z_2 = \frac{z_1}{2 - z_1}$$

$$z_3 = \frac{z_2}{2 - z_2} = \frac{z_1}{4 - 3z_1}$$

$$z_4 = \frac{z_3}{2 - z_3} = \frac{z_3}{8 - 7z_3}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$z_n = \frac{z_{n-1}}{2 - z_{n-1}} = \frac{z_1}{2^{n-1} - \left(2^{n-1} - 1\right)z_1}$$

Für allgemeine Anfangswerte z_0 und z_1 sieht die Formel wie folgt aus:

$$z_n = \frac{z_0 z_1}{2^{n-1} z_0 - \left(2^{n-1} - 1\right)z_1}$$

wobei: $\frac{z_0}{z_1} \neq \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-1}} < 1$

Mit $z_1 = \frac{8}{9}$ (und $z_0 = 1$) ist dann:

$$z_n = \frac{8}{8+2^{n-1}} = \frac{1}{1+2^{n-4}} \qquad (n = 1,2,3,\ldots)$$

Errechnet man auf diese Weise die Werte der Folge z_n ausgehend von $z_1 = \frac{8}{9}$ (und $z_0 = \frac{1}{1}$), so ergibt sich die folgende Proportionenfolge:

1 : 1	Prim	Erlebbare Intervalle der Dur-Tonskala in einem Bereich von etwas mehr als drei Oktaven. (Stimmumfang der menschlichen Stimme)
⋮		
8 : 9	große Sekunde	
4 : 5	große Terz	
2 : 3	Quinte	
1 : 2	Oktave	
1 : 3	Quinte der Oktave (Duodezime)	
1 : 5	Terz der Doppeloktave	
1 : 9	Sekunde der dreifachen Oktave	
⋮		

Als fortlaufende Proportion geschrieben, sieht dies wie folgt aus:

8 : 9 : 10 : 12 : 16 : 24 : 40 : 72

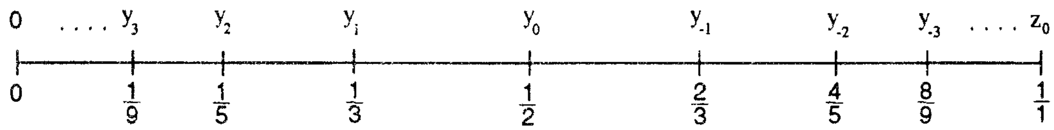
Von den "fehlenden" Intervallen treten die Mollterz, die Quart und die Sext als Unterproportionen auf, bemerkenswerterweise aber nicht die Septime:

Mollterz :	10 : 12 =	5 : 6
Quart :	9 : 12 =	12 : 16 = 3 : 4
Sext :	24 : 40 =	3 : 5

Interpretiert man wiederum die obige Proportionenfolge als relative Saitenlängen einer Skala, so erkennt man ihre Symmetrie zur Mitte (Oktave bei $z_4 = \frac{1}{2}$). Eine Indexverschiebung $v = n - 4$ bringt dies auch formelmäßig zum Ausdruck. Es ist dann

$$z_n = z_{v+4} = \frac{1}{1+2^v} = y_v \qquad \text{für } v = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

Die Skala ist also theoretisch "nach vorne" und auch "zurück" erweiterbar. Doch führt dies aus dem Bereich der unmittelbar erlebbaren Intervalle hinaus.



$\lim\limits_{v \to +\infty} \frac{1}{1+2^v} = 0$ $\qquad\qquad$ $\lim\limits_{v \to -\infty} \frac{1}{1+2^v} = \frac{1}{1}$

Entsprechend den vierfachen Charakterisierungen der Folgen auf den Seite 57ff können wir auch hier vier Gesetze für die obige Folge z_n angeben.

$$\left.\begin{aligned} z_n &= \frac{z_{n-1}}{2-z_{n-1}} && (n = 2,3,\ldots..) \\ z_n &= \frac{1}{1+2^{n-4}} && (n = 1,2,3,\ldots) \end{aligned}\right\} \text{Zwei allgemeine Bildungsgesetze, rekursiv und explizit}$$

$$\frac{1-y_\nu}{1-y_{\nu-1}} \cdot \frac{y_{\nu-1}}{y_\nu} = 2 = \text{const} \qquad \text{Invarianz - Gesetz}$$

mit $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, ..$ (und $\nu = n-4$)

$$y_0 = \frac{y_\nu + y_{-\nu}}{2} \qquad \text{Symmetrie - Gesetz}$$

(mit Index ν geschrieben)

Bemerkung:

Wenn z_{n-1} das harmonische Mittel von z_0 und z_n ist, dann ist aufgrund der Darstellungen des ersten Abschnittes in Teil II $z_0 - z_n$ harmonisches Mittel von $z_0 - z_{n-1}$ und z_0.[19] Eine Gegenüberstellung beider Folgen zeigt ihre Gegenläufigkeit:

n	$n \to -\infty$	1	2	3	4	5	6	7	8	$n \to +\infty$
z_{n-1}	1;...	$\frac{16}{17}$[20]	$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{9}$...	0
$z_0 - z_n$	0;...	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{16}{17}$...	1

Den Folgen der beiden harmonischen Mittel entsprechen die beiden Durchlaufungssinne der zugehörigen Skala.

5.2. Verschiedene Konstruktionen einer entsprechenden Skala

Solche Skalen können sehr schön mit den an der Figur VII entwickelten Konstruktionsprinzipien gezeichnet bzw. konstruiert werden. Bei den folgenden beiden Zeichnungen sind verschiedene Formen der Konstruktion des harmonischen Mittels angewandt worden.

---

19 vgl. dazu die Konstruktionsskizze zu Figur Ia auf Seite 60

20 Für n = 0 liegt insofern eine Besonderheit vor als für $n = 0$ $z_n = \frac{1}{1+2^{-4}} = \frac{16}{17} \neq 1 = OZ_o$ ist.

1. Konstruktion [21]

Gegeben:

$z_0 = 1 = BC$

$z_1 = \frac{8}{9}$

$z_2 = \frac{4}{5}$

$\vdots \quad \vdots$

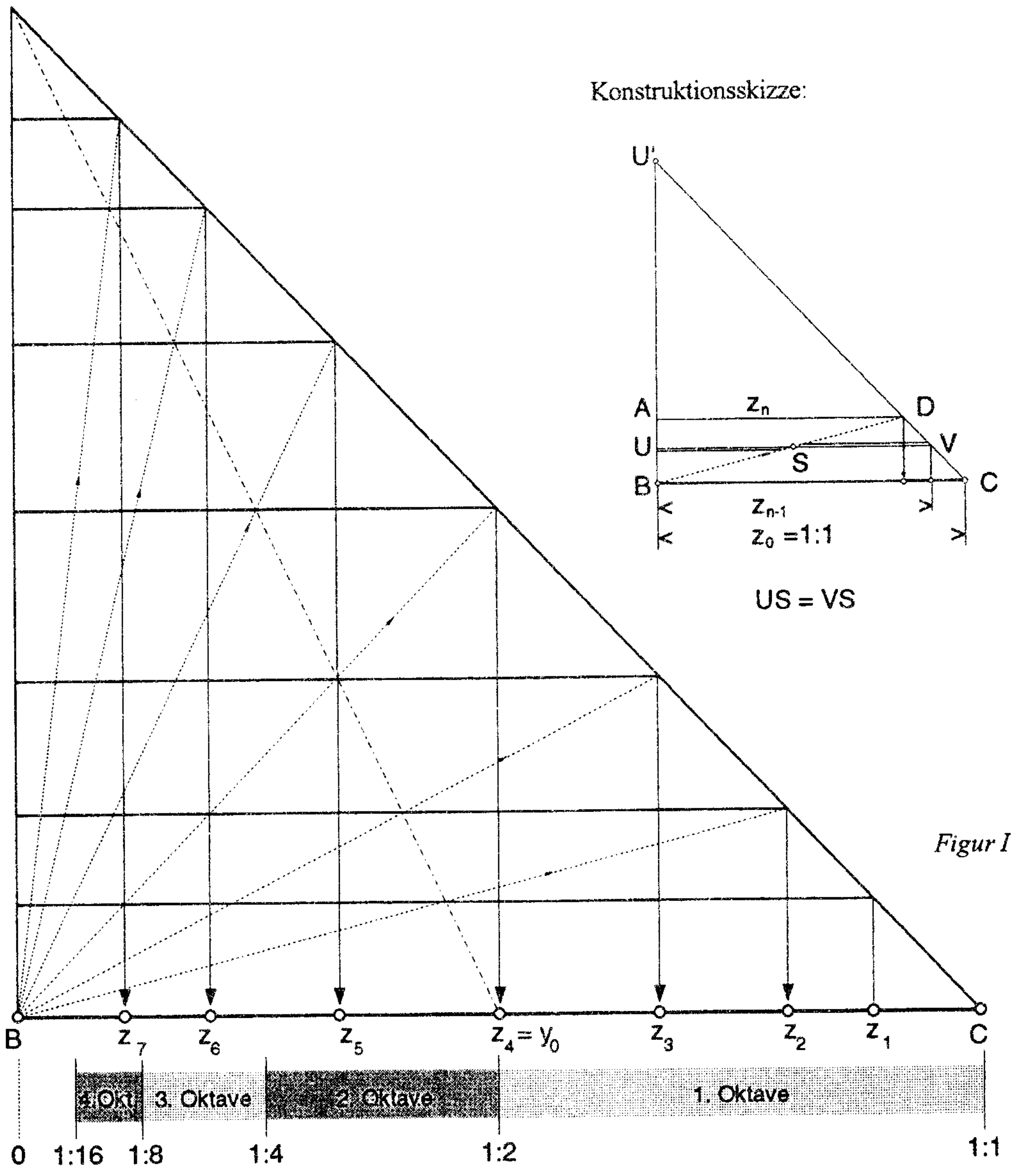
$z_{n-1} = UV$

Gesucht:

$z_n = AD$

Die folgende Konstruktionsskizze zu Figur I zeigt, wie man aus $z_0 = BC$ und $z_{n-1} = UV$ die Strecke z_n = AD so konstruieren kann, daß z_{n-1} harmonisches Mittel von z_0 und z_n ist. Mit $US = VS$ ist dann

$$z_n = \frac{z_{n-1}}{2 - z_{n-1}} \quad \text{für } n = 2, 3, 4, \ldots$$

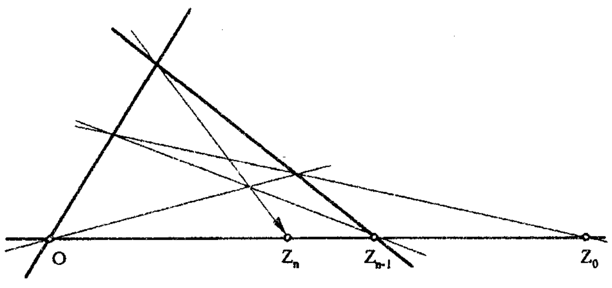


Figur I

---

21 vgl. die Charakteristik der Figur VIIa, auf Seite 14, sowie die anschließenden Bemerkungen

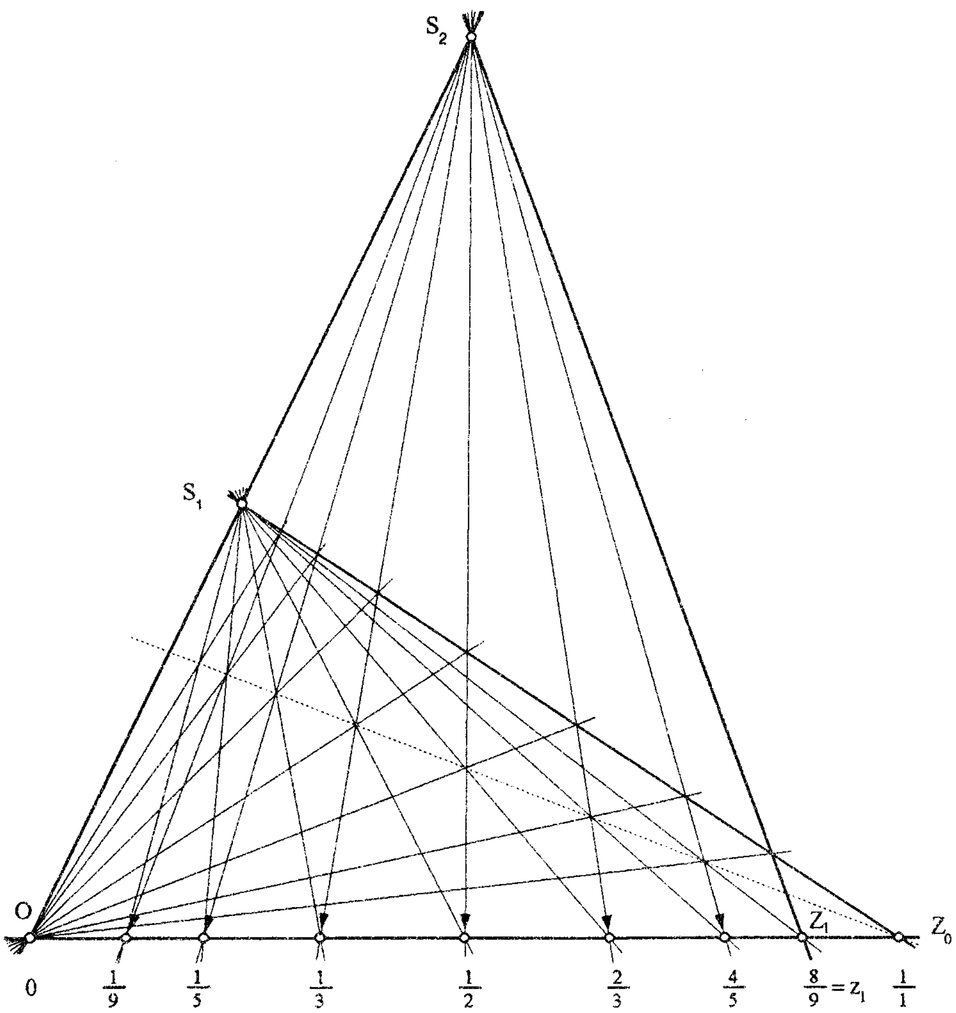
2. Konstruktion



Konstruktionsskizze zu Figur Ia:[22]

Gegeben:		Gesucht:
$z_0 =$	$1 = OZ_0$	$Z_n = OZ_n$
$z_1 =$	$\frac{8}{9}$	
$z_2 =$	$\frac{4}{5}$	
$\vdots$	$\vdots$	
$z_{n-1} =$	OZ_{n-1}	

Die nebenstehende Konstruktionsskizze zu Fig. Ia stützt sich auf die dritte Bemerkung zu Figur VII auf Seite 14 und zeigt, wie man aus $z_0 = OZ_0$ und $z_{n-1} = OZ_{n-1}$ die Strecke $z_n = OZ_n$ so konstruieren kann, daß z_n harmonisches Mittel von z_0 und z_n ist. Es ist dann für alle $n = 2, 3, 4, \ldots$ stets $z_n = \dfrac{z_{n-1}}{2 - z_{n-1}}$.



Figur Ia

Bemerkung: Man vergleiche die Konstruktion mit der Konstruktion der harmonischen Skala (Seite 60).

22 vgl. dazu das Konstruktionsprinzip für den vierten harmonischen Punkt Z_n aus den drei gegebenen Punkten O, Z_0 und Z_{n-1} auf Seite 60.

6. Einige Bemerkungen zu der Proportionenfolge $z_n = \dfrac{z_0 z_1}{2^{n-1} z_0 - \left(2^{n-1}-1\right) z_1}$.

1. Es ist aufschlußreich, die obige Proportionenfolge z_n für verschiedene Anfangswerte z_0 und z_1 zu studieren: Für alle Folgen ist *zunächst* $n = 1, 2, 3 \ldots$

a.) $z_0 = 1$ (Prim) und $z_1 = \frac{3}{4}$ (Quart) $\quad\rightarrow\quad z_n = \dfrac{3}{3+2^{n-1}}$

z_n: $1; \ldots \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \frac{3}{11}, \frac{3}{19}, \frac{3}{35}, \frac{3}{77} \ldots, 0$

b.) $z_0 = \frac{8}{9}$ (Prim) und $z_1 = \frac{4}{5}$ $\quad\rightarrow\quad z_n = \dfrac{8}{9+2^{n-1}}$

z_n: $\frac{8}{9}; \ldots \frac{4}{5}, \frac{8}{11}, \frac{8}{13}, \frac{8}{17}, \frac{8}{25}, \frac{8}{41}, \frac{8}{73}, \ldots, 0$

c.) $z_0 = 1$ (Prim) und $z_1 = \frac{5}{6}$ (Moll-Terz) $\quad\rightarrow\quad z_n = \dfrac{5}{5+2^{n-1}}$

z_n: $1; \ldots \frac{5}{6}, \frac{5}{7}, \frac{5}{9}, \frac{5}{13}, \frac{5}{21}, \frac{5}{37}, \frac{5}{79}, \ldots, 0$

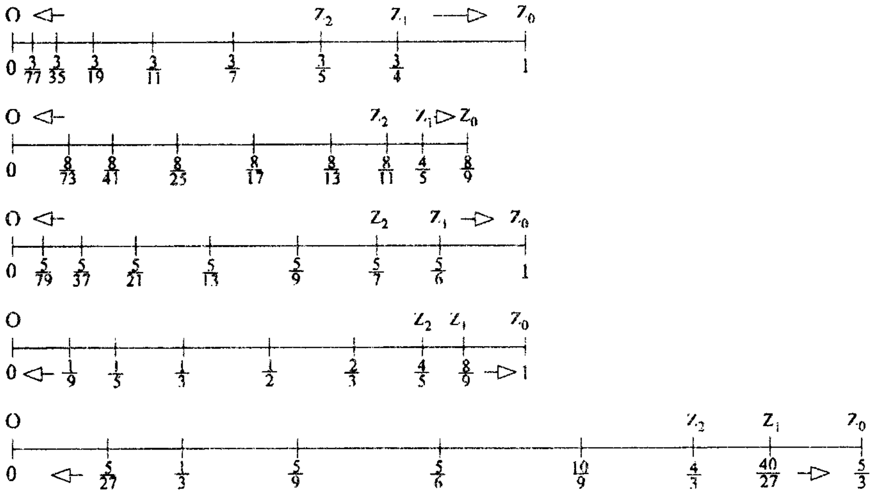
d.) $z_0 = 1$ (Prim) und $z_1 = \frac{8}{9}$ (gr. Sekunde) $\quad\rightarrow\quad z_n = \dfrac{8}{8+2^{n-1}} = \dfrac{1}{1+2^{n-4}}$

z_n: $1; \ldots \frac{8}{9}, \frac{4}{5}, \frac{2}{3}, \underline{\underline{\frac{1}{2}}}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{9}, \ldots, 0$

e.) $z_0 = \frac{5}{3}$ und $z_1 = \frac{40}{27}$ $\quad\rightarrow\quad z_n = \dfrac{40}{3\left(8+2^{n-1}\right)} = \dfrac{5}{3\left(1+2^{n-4}\right)}$

z_n: $\frac{5}{3}; \ldots \frac{40}{27}, \frac{4}{3}, \frac{10}{9}, \underline{\frac{5}{6}}, \frac{5}{9}, \frac{1}{3}, \frac{5}{27}, \ldots, 0$

Nun fassen wir einige Eigenschaften dieser Folgen – vor allem im Hinblick auf ihre zugeordneten Skalen – ins Auge. Die Skalen haben entsprechend der obigen Reihenfolge folgendes Aussehen:



Das Konstruktionsprinzip für diese Skalen wurde im vorangehenden Abschnitt 5a genau beschrieben.

2. Betrachtet man die obigen Folgen nicht nur für $n = 1, 2, 3, \ldots,$ – wie dies gewöhnlich geschieht – sondern für alle $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots,$ dann liegen die zugeordneten Punkte der Skala alle zwischen den "Grenzpunkten" O und Z_0 der endlichen Strecke OZ_0, wobei sich die Folge der Skalenpunkte gegen die Grenzpunkte hin unbegrenzt verdichtet. Eine solche Skala nennen wir "vollständig".

3. Den Grenzpunkten O und Z_0 entsprechen die Grenzwerte der Folge z_n für $n \to \pm\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{z_0 z_1}{2^{n-1}(z_0 - z_1) + z_1} = 0$$

$$\lim_{n\to-\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{z_0 z_1}{\frac{z_0 - z_1}{2^{n-1}} + z_1} = \frac{z_0 z_1}{z_1} = z_0$$

Es ist dabei zu beachten, daß z_n für $n = 0$ den Skalenwert $\frac{2z_0z_1}{z_0+z_1}$ ergibt und nicht etwa z_0 selbst.

4. Unter den fünf angeführten Folgen gibt es solche mit symmetrischem Charakter, d.h. solche, bei denen für irgend ein $n = m \geq 2$ $z_m = \frac{z_0}{2}$ und deshalb auch $z_{m-n'} - z_m = z_m - z_{m+n'}$ (für $n' = 1, 2. .., m-1$) ist, was leicht zu zeigen wäre. Die Folgen d) und e) haben diese Eigenschaft.

5. Alle überhaupt möglichen symmetrischen Skalen, welche der Ausgangsformel entsprechen, haben die Eigenschaft, daß sie durch proportionale Streckung oder Stauchung auseinander hervorgehen. Es läßt sich zeigen, daß die Folgen, die diesen Skalen zugrunde liegen, das allgemeine Bildungsgesetz

$$z_n = \frac{2^{m-1}}{2^{n-1} + 2^{m-1}} z_0 = \frac{1}{1+2^{m-n}} z_0 \quad \text{mit } z_m = \frac{z_0}{2} \quad \text{haben.}$$

z_0 tritt dabei als Proportionalitätsfaktor auf.

6. Führt man in dem letztgenannten Bildungsgesetz eine Indexverschiebung von der Form $\nu = m - n$ durch, so ergibt sich die Nomalform dieser Folgen:

$$z_n = z_{m-\nu} = \frac{z_0}{1+2^\nu} = y_\nu \qquad \text{für } \nu = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

So gesehen lassen sich die zugeordneten Skalen von der Mitte her (für $\nu = 0$ oder $n = m$) aufbauen.

7. Unter 5.2 haben wir die Skala der Folge $y_\nu = \frac{1}{1+2^\nu}$ bzw $z_\nu = \frac{1}{1+2^{n-2}}$, auf verschiedene Weise konstruiert. Es ist bemerkenswert, daß alle übrigen möglichen symmetrischen Skalen aus dieser "musikalischen Urskala" maßstäblich hervorgehen.

8. Zum Abschluß vergleichen wir noch die Folgen von d) und e):

Folge d)

$$z_n: \; 1; \ldots \frac{8}{9}, \frac{4}{5}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{9}, \ldots 0$$

$$\text{oder } \frac{8}{8}; \ldots \frac{8}{9}, \frac{8}{10}, \frac{8}{12}, \frac{8}{16}, \frac{8}{24}, \frac{8}{40}, \frac{8}{72}, \ldots 0$$

Folge e)

$$z_n: \; 1; \ldots \frac{40}{27}, \frac{4}{3}, \frac{10}{9}, \frac{5}{6}, \frac{5}{9}, \frac{1}{3}, \frac{5}{27}, \ldots 0$$

$$\text{oder } \frac{27}{27}; \ldots \frac{40}{27}, \frac{40}{30}, \frac{40}{36}, \frac{40}{48}, \frac{40}{72}, \frac{40}{120}, \frac{40}{216}, \ldots 0$$

Die daraus resultierenden fortlaufenden Proportionen sind dann für beide Folgen – abgesehen vom Proportionalitätsfaktor 3 – die gleichen:

$$8 : 9 : 10 : 12 : 16 : 24 : 40 : 72 = 24 : 27 : 36 : 48 : 72 : 120 : 216$$

Auch erkennt man unmittelbar, daß die Folge e) – abgesehen vom ersten Glied aus – derjenigen von d) durch Multiplikation mit dem Proportionalitätsfaktor $z_0 = \frac{5}{3}$ hervorgeht.

7. Arithmetische Mittebildung und die Titius-Bode-Reihe

7.1. Rechnerische Grundlagen

Aus dem Bereich der Astronomie kennen wir die sogenannte Titius-Bode-Reihe in der Form $x_n = 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 2^n$ die für folgende Werte von n gilt: $-\infty$, 0, 1, 2, ..., 8. Diese Reihe gibt im heliozentrischen Weltbild die mittleren Planetenabstände von der Sonne in Astronomischen Einheiten (1AE = mittl.Entfernung Erde-Sonne ~ 149.Mill. km) an. Welche Gesetzmäßigkeiten liegen dieser Formel arithmetisch zugrunde? Um dieser Frage näher zukommen, bilden wir eine vergleichbar ähnliche Proportionenfolge wie unter 5.[23], aber jetzt mittels arithmetischer Mittelbildungen: Es sei x_0 und x_1 gegeben ($0 < x_0 < x_1$), x_{n-1} sei das schon bekannte arithmetische Mittel aus x_0 und dem gesuchten x_n. Es ist also

$$x_{n-1} = \frac{x_0 + x_n}{2},$$

woraus sich $x_n = 2x_{n-1} - x_0$ (für n = 2, 3, 4, ..) rekursiv berechnen läßt.

Daraus ergibt sich dann weiter die Folge:

$$\begin{aligned} x_0 &= x_0 \\ x_1 &= x_1 \\ x_2 &= 2x_1 - x_0 \\ x_3 &= 2x_2 - x_0 = 4x_1 - 3x_0 \\ &\vdots \qquad \vdots \\ x_n &= 2x_{n-1} - x_0 = 2^{n-1}x_1 - \left(2^{n-1} - 1\right)x_0 \end{aligned}$$

Es ist also

$$x_n = 2^{n-1}\left(x_1 - x_0\right) + x_0 \qquad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Bezogen auf die konkreten planetarischen Gegebenheiten ist dann x_0 = 0,4 (Entfernung Sonne–Merkur) und x_1 = 0,7 (Entfernung Sonne–Venus), so daß sich daraus die Titius-Bode-Folge $x_n = 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 2^{n-1}$ für n = 1, 2, 3, ..., 9 ergibt, wobei x_0 = 0,4 der Grenzwert der Folge x_n für $n \to -\infty$ ist.

Wir bemerken noch ausdrücklich, daß die Folge x_n zwar aus arithmetischen Mittelbildungen hervorgeht, aber als solche keine eigentliche arithmetische Folge ist.

Setzt man für die Planetenläufe um die Sonne Kreisbahnen voraus, dann ergibt sich für die mittleren (kürzesten) Abstände benachbarter Planeten auf ihren Bahnen der jeweilige Abstand zu

$$x_n - x_{n-1} = 0{,}3 \cdot 2^{n-2} \qquad \text{für } n = 2, 3, \ldots, 9 .$$

Daraus folgt weiter:

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}} = 2:1 \qquad \text{für } n = 3, 4, \ldots, 9.$$

Es ist bemerkenswert, daß die Titius-Bode Reihe aus einer Folge von solchen speziellen arithmetischen Mittelbildungen hervorgeht. Auch hier lassen sich wieder wie in Abschnitt 5.1 vier charakteristische Merkmale der Folge angeben.

---

23 siehe Abschnitt 5.1.

$$x_n = 2x_{n-1} - x_0$$
$$x_n = 2^{n-1}(x_1 - x_0) + x_0$$

Zwei allgemeine Bildungsgesetze, rekursiv und explizit

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}} = 2 = \text{const}$$ für n =3, 4, ...,9 Invarianz - Gesetz

$$x_{n-1} = \frac{x_0 + x_n}{2}$$ für n = 1, 2, ...,9 Symmetrie - Gesetz

Die letzten beiden Gesetze sind hinsichtlich ihrer Reichweite auf die konkreten planetarischen Gegebenheiten bezogen.

Anmerkung:

Setzt man in der Formel $x_n = 2^{n-1}(x_1 - x_0) + x_0$ für x_0 und x_1 die folgenden Werte ein:

$x_0 = 1 = 1 : 1$ Frequenzverhältnis der Prim

$x_1 = \frac{9}{8} = 9 : 8$ Frequenzverhältnis des Intervalls der gr. Sekunde

so ergibt sich zunächst: $x_n = 1 + 2^{n-4}$ für n = 1, 2, 3, ... und damit eine spezielle uns schon bekannte Intervallfolge der Dur-Ton-Leiter (*als Freqeunz-Verhältnis-Folge*).

x_0	=	1
$\vdots$		$\vdots$
x_1	=	9 : 8
x_2	=	5 : 4
x_3	=	3 : 2
x_4	=	2 : 1
x_5	=	3 : 1
x_6	=	5 : 1
x_7	=	9 : 1
$\vdots$		$\vdots$

Als Ergebnis erkennen wir zweierlei:

1. Die Werte der Freqenzverhältnsfolge sind die Kehrwerte der in Abschnitt 5.1 beschriebenen Folge.
2. Das Bildungsgesetz der Titius-Bode-Folge ist das gleiche wie dasjenige der obigen Folge.

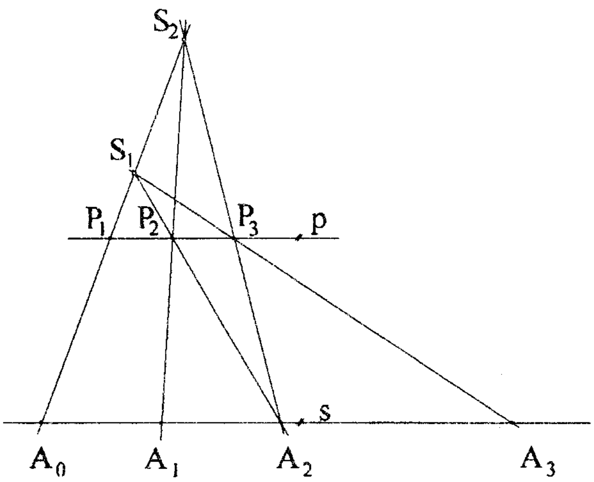
7.2. Tabellarische Vergleiche von Planetenabständen

In der folgenden Tabelle sind in zwei Spalten die *berechneten* Abstände der Planeten von der Sonne im heliozentrischen Weltbild tabelliert, und zwar in Astronomischen Einheiten. Die eine Spalte wurde aufgrund von x_n, die entsprechende andere Spalte aufgrund von $x_n' = g^2 + g \cdot 2^{n-1}$ berechnet, wobei g die Zahl des Goldenen Schnitts ist, die sich aus $g = \frac{1}{1+g}$ berechnen läßt. Zum Vergleich finden sich in einer dritten Spalte die wirklichen mittleren Abstände der Planeten von der Sonne.

n	Planeten-folge	Entfernungen zur Sonne in AE nach Titius-Bode gemäß $x_n = 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 2^n$	Differenzen der Entfernungen	Mod. Werte der Entfernung (mittl. Halbachsen)	Entfernung gemäß der Folge $x'_n = g^2 + g \cdot 2^{n-1}$		Entfernungs-differenzen
$-\infty$	☿	0,4		0,387	$g^2 = 1 - g$	0,39	
			0,3				$g/2$
0	♀	0,7		0,723	$1 - \frac{g}{2}$	0,69	
			0,3				$g/2$
1	♁	1		1	1	1	
			0,6				g
2	♂	1,6		1,524	1+g	1,61	
			1,2				2g
3	Plane-toiden	2,8		2,2 – 3,2	1+3g	2,85	
			2,4				4g
4	♃	5,2		5,203	1+7g	5,33	
			4,8				8g
5	♄	10		9,539	1+15g	10,27	
			9,6				16g
6	♅	19,6		19,191	1+31g	20,16	
			19,2				32g
7	♆	38,8		30,061	1+63g	39,94	
			38,4				64g
8	♇	77,2		39,529	1+127g	79,49	

7.3. Konstruktion der Planetenabstände im Heliozentrischen Weltbild gemäß der Titius-Bode Folge

Das Konstruktionsprinzip gründet sich auf den beschriebenen Rechenprozeß mittels arithmetischer Mittelbildungen, der zur Titius-Bode Folge $x_n = 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 2^n$ führt:



Konstruktiosprinzip mit Skizze:

Voraussetzungen:

$$A_0A_1 = A_1A_2 \quad \text{und} \quad p \| s$$

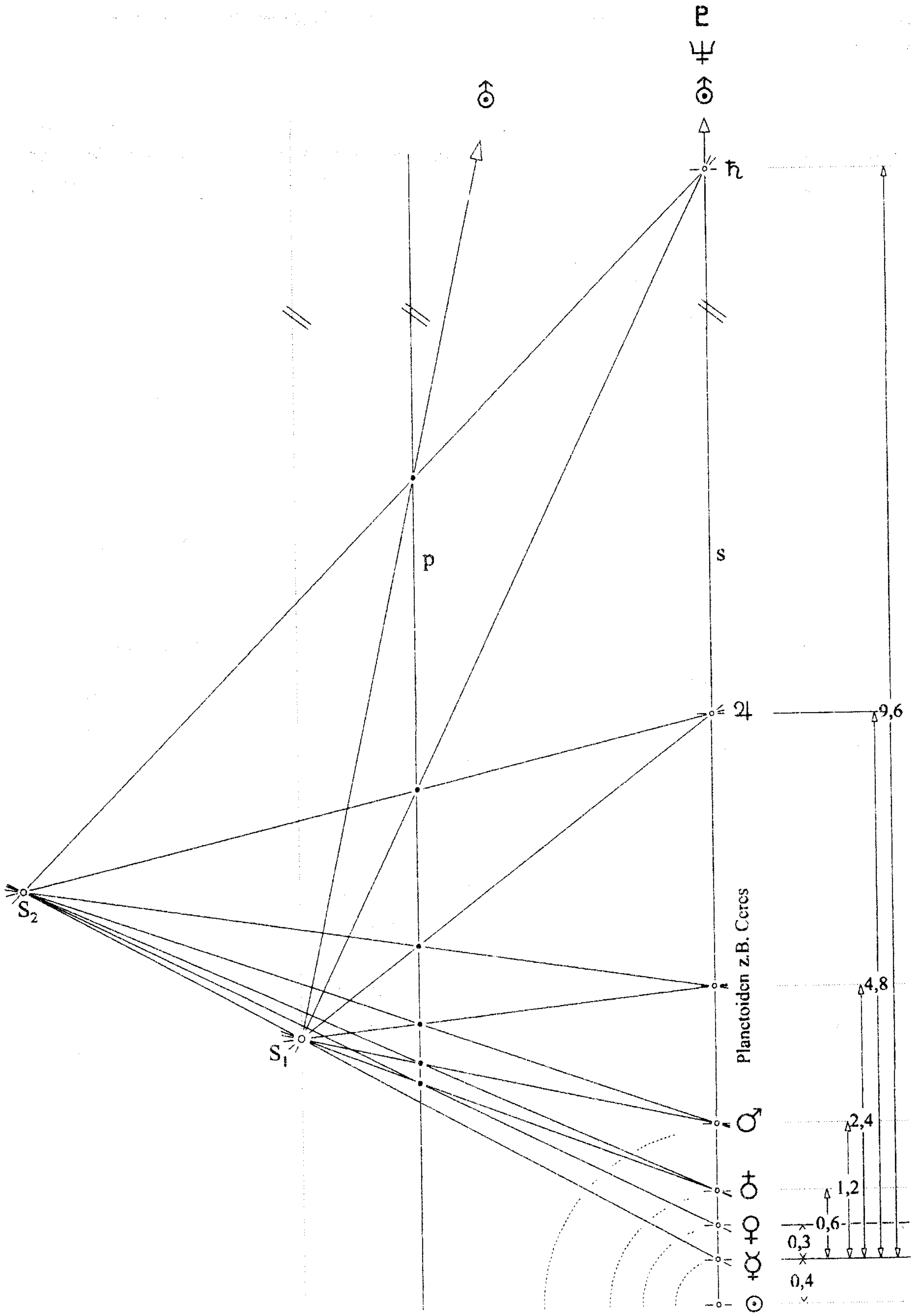
Damit ist

$$\frac{A_0A_1}{A_1A_2} = \frac{P_1P_2}{P_2P_3} \quad \text{(3. Strahlensatz, Scheitel } S_2\text{)}$$

$$\frac{P_1P_2}{P_2P_3} = \frac{A_0A_2}{A_2A_4} \quad \text{(3. Strahlensatz, Scheitel } S_1\text{)}$$

woraus

$$A_0A_2 = A_3A_4 \quad \text{etc. folgt.}$$


p
s
S2
S1
Planetoiden z.B. Ceres
9,6
4,8
2,4
1,2
0,6
0,3
0,4