ANHANG

VON DER GEDANKENLOSIGKEIT IN DER BEHANDLUNG DER MATHEMATIK

Louis Locher-Ernst

1.

Eine Diskussion – Ende der zwanziger Jahre – nach dem Vortrag eines bekannten Mathematikers vor einem Gremium, zu dem auch die Studierenden der letzten Semester Zutritt hatten, blieb mir in lebhafter Erinnerung. Als der Vertreter älteren Schlages, den wir als Idealisten bezeichnen können, den Nominalisten in die Enge trieb, behauptete dieser, die Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ und das quadratische Reziprozitätsgesetz für die natürlichen Zahlen seien genau gleicher Natur. Der Idealist verwahrte sich entschieden dagegen und bezeichnete die erste Formel als trivial, das Reziprozitätsgesetz hingegen als eine tiefliegende Tatsache. Darauf wollte der Nominalist wissen, worin sich das Tieferliegen der einen Formel gegenüber der anderen ausdrücke; der Unterschied liege doch höchstens darin, daß die Beweisketten, durch welche die genannten Sachverhalte mit den Axiomen zusammenhängen, ungleich lang seien. Idealist und Nominalist beharrten auf ihren Standpunkten, ohne auch nur die geringste Annäherung vorzunehmen.

Wer hat recht? Von einem Gesichtspunkt aus gesehen erscheint es leicht, fast selbstverständlich, die Argumentation des Nominalisten anzuerkennen. Weshalb sollte denn ein grundsätzlicher Unterschied nur deshalb gemacht werden, weil die eine Beweiskette kurz, die andere bedeutend länger ist? Auf Grund eines anders gewählten Axiomsystems wären vielleicht die Herleitungen nicht mehr so stark verschieden lang. Andererseits lebt in jedem Idealisten – damals gehörten noch die meisten Mathematiker zu ihnen - das ihm als unbedingt sicher geltende Gefühl, der Nominalist versündige sich mit seinem Vertrivialisieren gegen den Geist der Mathematik.

Die Einstellung zu diesem Problem ist weitgehend verbunden mit der Haltung, die man gegenüber dem Wahrheitsbegriff einzunehmen vermag. Bis zum neunzehnten Jahrhundert galten die mathematischen Sachverhalte als unbedingte Wahrheiten, ja als Muster von solchen. Und bis gegen die Mitte unseres Jahrhunderts konnte man im Zusammenhang mit pädagogischen Fragen hören, der mathematische Unterricht diene zur Zucht des Denkens, das sich in der Mathematik an objektiven Tatbeständen zu üben habe.

Im Laufe des neunzehnten Jahrhunderts sah man sich veranlaßt, eine erste Relativierung des Wahrheitsbegriffes vorzunehmen. Die Axiome gelten seither nicht mehr als "Urphänomene", als wahre Sachverhalte, sondern als mehr oder weniger zweckmäßige Festsetzungen. Als wahr werden dann die Aussagen betrachtet, die aus diesen Festsetzungen durch richtiges Schließen folgen.

In unserem Jahrhundert erfolgte die zweite Relativierung, indem man es aufgab, von einem an sich richtigen Schließen zu sprechen. Auch die Regeln des Schließens sind zu Festsetzungen geworden, die man mehr oder weniger zweckmäßig treffen kann. Als wahr gelten nun noch die Aussagen, die auf Grund solcher Festsetzungen aus jenen Axiomen folgen.

Daß diese doppelte Relativierung des Wahrheitsbegriffs für den mathematischen Unterricht, insbesondere an den Gymnasien, tiefgreifende Änderungen in der Stellung der pädagogischen Bedeutung der Mathematik haben muß, ist zwar evident, wurde aber bis heute noch zu wenig durchdacht.

Über die in dieser oder jener Weise vollzogenen formalen Axiomatisierungen der Mengenlehre sagt *Bourbaki* [33]:

> "Si elles satisfont les formalistes, c'est que ces derniers refusent de prendre en considération les réactions psychologiques individuelles de chaque mathématicien; ils estiment qu'un langage formalisé a rempli sa tâche lorsqu'il peut transcrire les raisonnements mathématiques sous une forme dépourvue d'ambiguité, et servir ainsi de vehicule à la pensée mathématique; libre à chacun, diraient-ils, de penser ce qu'il voudra sur la "nature" des êtres mathématiques ou la "verite" des théorèmes qu'il utilise, pour vu que ses raisonnements puissent être transcrits dans le langage commun."

Eine elegante Lösung des angezeigten Problems wählte Herr N. *Bourbaki,* indem er sagt [34]:

> "Les mathématiciens ont toujours été persuadés qu'ils démontrent des "verités" ou des "propositions vraies"; une telle conviction ne peut évidemment être que d'ordre sentimental ou métaphysique, et ce n'est pas en se plaçant sur le terrain de la mathématique qu'on peut la justifier, ni même lui donner un sens qui n'en fasse pas une tautologie. L'histoire du concept de vérité en mathématique relève donc de l'histoire de la philosophie et non de celle des mathématiques; mais l'evolution de ce concept a eu une influence indéniable sur celle des mathématiques, et à ce titre nous ne pouvons la passer sous silence."

In einer erfreulich deutlichen Art sprach sich gelegentlich *K. Menger*[35] so aus:

> "Ich, für meinen Teil, glaube, ..., daß das, was der Mathematiker tut, nichts anderes ist, als die Herleitung von Aussagen mit Hilfe gewisser aufzuzählenden (in verschiedener Weise wählbaren) Methoden aus gewissen aufzuzählenden (in verschiedener Weise wählbaren) Aussagen – und daß alles, was Mathematik und Logik über diese, einer "Begründung" weder fähige noch bedürftige Tätigkeit des Mathematikers aussagen können, in dieser simplen Tatsachenfeststellung besteht."

Von einem Gedankeninhalt zu reden, der unabhängig von den in Zeichen notierten Methoden und Aussagen besteht, der fähig ist, eine Begründung für das Tun zu tragen, hat keinen Sinn mehr - sofern man sich nicht darauf beschränken will, als Begründung allein die Nützlichkeit zur Konstruktion gewisser Mechanismen anzuerkennen. Dies führt konsequent schließlich dazu, die Gedankenlosigkeit des Mathematisierens zum Prinzip zu erheben.

2.

Man spricht heute davon, daß im Laufe unseres Jahrhunderts die Mathematik immer mehr Strukturtheorie geworden sei. Diese Entwicklung begann mit der Bildung des Gruppenbegriffes und mit den Einsichten in den Umstand, daß sich gewisse Sachverhalte verschiedener mathematischer Gebiete von derselben Gruppe oder, allgemeiner gesprochen, von derselben Struktur beherrscht erwiesen. Es ist an dieser Stelle nicht nötig, an eindrückliche Beispiele zu erinnern. In der Tat ergaben sich hieraus Erkenntnisse von vorher ungeahnten Zusammenhängen. Mit Recht hatte man den Eindruck, damit in manchen mathematischen Einzeldisziplinen in die Tiefe vorgedrungen zu sein. Diesen Vorstoß in die Tiefe suchte man weiter und weiter zu treiben, bis man schließlich überhaupt nur noch die formalen Strukturen im Gesichtsfeld behielt. Es liegt mir ferne, die Fruchtbarkeit dieser Entwicklung nicht voll anzuerkennen. Wenn sich am Horizont ein neues Licht zeigt, ist es das Vorrecht der Pioniere, ihren Blick auf dieses allein zu richten. Es darf dabei im Fortgang aber nicht vergessen werden, daß auf einem solchen Wege allzu leicht auch vieles verloren geht, daß man sogar blind wird für Sachverhalte, die auch in Betracht zu ziehen sind.

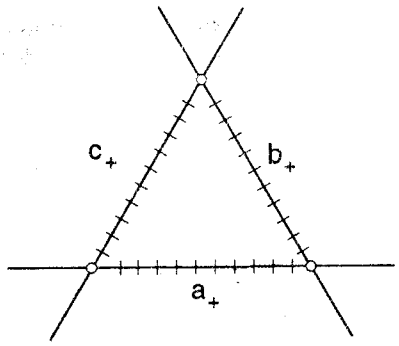
An einem einfachen Beispiel möge illustriert werden, was damit gemeint ist.

---

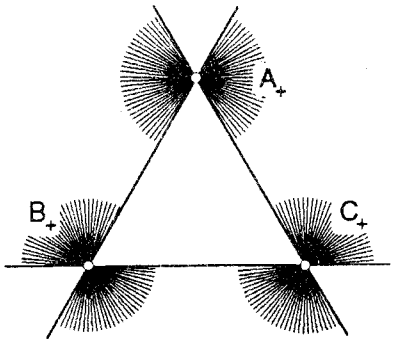
33 *N. Bourbaki:* Eléments de Mathématique. Livre I, chapitre 4: Structures , p. 105 Hermann, Paris 1957

34 Seite 81 des genannten Buches

35 Im Vorwort des Buches von *F. Waismann:* Einführung in das mathematische Denken, Gerold & Co, Wien 1936



Figur 1



Figur 2

Drei Geraden a, b, c, (Figur 1) zerlegen das Punktfeld der projektiven Ebene in vier Punktgebiete. Die Segmente, die eines dieser Gebiete begrenzen, seien mit a_+, b_+, c_+ bezeichnet, die übrigen Segmente entsprechend mit a_-, b_-, c_-. Die vier Gebiete können durch die begrenzenden Segmente gegeben werden:

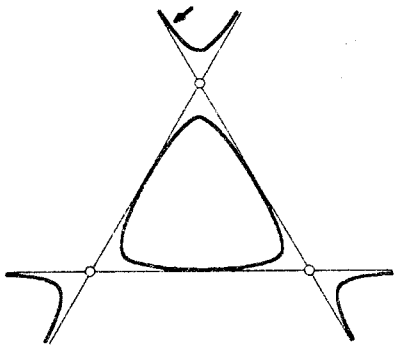
a_+, b_+, c_+, a_+, b_-, c_- b_+, c_-, a_- c_+, a_-, b_-.

Drei Punkte A, B, C, (Figur 2) gliedern das Strahlenfeld der projektiven Ebene in vier Strahlenbereiche . Die Winkelfelder, die einen dieser Bereiche begrenzen, seien mit A_+, B_+, C_+ bezeichnet, die übrigen Winkelfelder entsprechend mit A_- , B_- , C_- . Die vier Bereiche können durch die begrenzenden Winkelfelder gegeben werden:

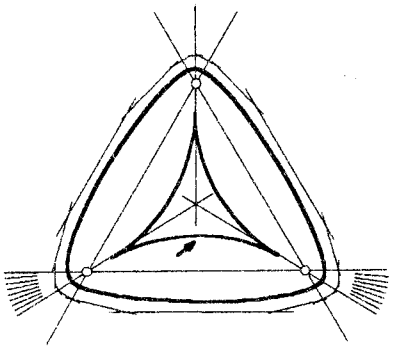
A_+, B_+, C_+, A_+, B_-, C_- B_+, C_-, A_- C_+, A_-, B_-.

Den Inbegriff der drei Geraden a, b, c betrachten wir als zerfallene Kurve dritter Ordnung. Durch stetige Umformung erhält man zwei Haupttypen der Kurven dritter Ordnung (sechster Klasse)[36], nämlich die zweiteilige Form (Figur 3), bestehend aus einem Zuge mit drei Wendestellen und einem Oval, sowie die einteilige Form (Figur 5) mit drei Wendestellen.

Die zweiteilige Form entsteht folgendermaßen: Die Punkte der Segmente a_+, b_+, c_+ werden in das Gebiet a_+, b_+, c_+ verschoben. Der durch einen Pfeil bezeichnete, von zwei Wendestellen auf der Ferngeraden begrenzte Kurvenbogen entsteht aus den "Hälften" der Segmente b_- und c_- durch Hereinrücken in das Gebiet a_+, b_-, c_-. Entsprechend die beiden übrigen Bögen.



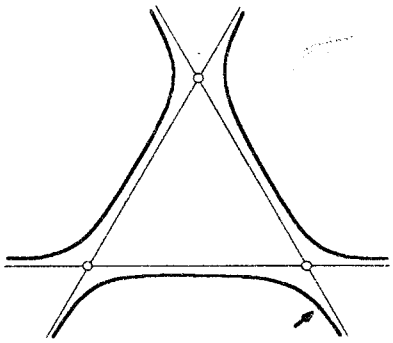
Figur 3



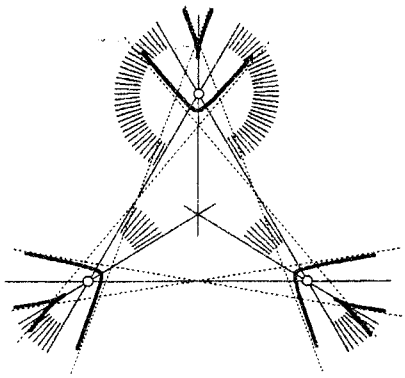
Figur 4

36 Es ist nicht nötig, bloß an algebraische Kurven zu denken. Es kann sich um allgemeinere Kurven handeln, für welche die Ordnung als die maximale Anzahl der (reelen) Schnittpunkte erklärt ist, welche die Kurve mit einer Geraden besitzt (entsprechend der Klasse). Näheres findet man in den folgenden Büchern des Verfassers : Einführung in die freie Geometrie ebener Kurven, Birkhäuser Verlag, Basel 1952 Raum und Gegenraum, Philosophisch-Anthroposophischer Verlag am Goetheanum, Dornach 1957

Der durch den Pfeil bezeichnete, auch durch zwei Wendestellen begrenzte Teilbogen der einteiligen Form (Figur 5) ergibt sich durch Verschieben der Punkte des Segmentes a_+ und der Punkte der "Hälften" der Segmente b_- und c_- in das Gebiet a_+ , b_- , c_-.



Figur 5



Figur 6

Die Figuren 4 und 6 zeigen zwei Haupttypen der Kurven dritter Klasse (sechster Ordnung), die sich durch die entsprechenden polaren stetigen Umformungen der drei Strahlenbüschel *A, B, C* ergeben.

Die zweiteilige Form (Figur 4) entsteht wie folgt: Die Strahlen der Winkelfelder A_+ , B_+ , C_+ werden in den Bereich A_+ B_+ C_+ verschoben und bilden dann ein Oval. Die "Hälften" der Winkelfelder B_- , C_- (in Figur 4 angedeutet) werden in den Bereich A_+ , B_+ , C_+ verschoben, so daß ein von Spitzen begrenzter Bogen (mit Pfeil bezeichnet) gebildet wird. Entsprechend die beiden übrigen Bögen.

Zur Bildung der einteiligen Form (Figur 6) nehmen wir als Material zunächst alle Strahlen aus A+ und je die "Hälfte" der Strahlen aus B_- und C_- (in Figur 6 angedeutet) und bilden durch leichtes Verschieben **einen** (zweimal über die Ferngerade führenden) Bogen (in Figur 6 hervorgehoben). Entsprechend die beiden anderen Teilbögen . Damit wird vollkommen überschaubar, wie die einteilige Grundform mit drei Spitzen aus den Büscheln *A, B, C* hervorgeht.

Man wird wohl zugeben, daß es ohne Übung nicht selbstverständlich erscheint, wie die beiden entsprechenden Typen der Kurven dritter Ordnung und dritter Klasse aus den zerfallenden Gebilden, nämlich den Inbegriffen von drei Punktreihen und von drei Strahlenbüscheln hervorgehen. Rein formal behandelt kann man die Vorgänge aber als gleich bezeichnen. Bleibt man bei algebraischen Gebilden, kann man von der Nullsetzung des Produktes dreier Linearformen dazu übergehen, dieses Produkt gleich einer positiven oder negativen Konstante mit "kleinem" Betrag zu setzen. Ob man unter den Variablen Punkt- und Linienkoordinaten versteht, bleibt dabei gleichgültig. Die "Struktur" der Gebilde ist dieselbe. *Die konkreten Unterschiede innerhalb des Punkt- und des Strahlenfeldes gehören aber zweifellos auch zur Geometrie.* Es ist gedankenlos, ob der Identität der Struktur die *auch der Mathematik* angehörenden Unterschiede in verschiedenen Realisierungen dieser Struktur als unwesentlich wegzulassen. Ja, die Tatsache des Bestehens derselben Struktur erscheint erst dann im rechten Lichte, wenn man sie gegen die Fülle der einzelnen Realisierungen abzuheben versteht.

3.

Ein anderes Beispiel möge auf einen weiteren Umstand hinweisen, der viel zu wenig beachtet wird. Für das elementare Rechnen mit natürlichen Zahlen kann man dieses oder jenes Axiomsystem zugrunde

legen. Die meisten Lehrer werden mit einem gewissen Stolz vorführen, wie man mit dem betreffenden System und mit den geeignet gewählten "logischen" Regeln nunmehr die Arithmetik der natürlichen Zahlen aufbauen kann. Es wird damit der Eindruck erweckt, daß man die Sachverhalte im Reiche der natürlichen Zahlen mit jedem System und mit jenen Regeln vollkommen beherrsche. Leider wissen viele Mathematiker nicht, daß dies eine Täuschung ist. Zu den bedeutsamen Ergebnissen unseres Jahrhunderts gehört der von *Th. Skolem* [37] entdeckte Sachverhalt, daß es unmöglich ist, die natürlichen Zahlen durch ein endliches Axiomensystem eindeutig zu charakterisieren. Das heißt, wie man auch ein finites System wählen mag, es gibt stets verschiedenartige Bereiche, die Realisierungen jenes Systems darstellen. Diese Tatsache sollte jeder Darstellung von Strukturtheorien mit roten Lettern vorangestellt oder mindestens frühzeitig eingegliedert werden. Sie bringt einem den richtigen Respekt für das Gebilde der Reihe der natürlichen Zahlen bei. Ein vollkommenes Beherrschen ist nur im Gebiete gewisser abstrahierter Begriffsbildungen möglich, zum Beispiel für die Restklassen. Tatsächlich sind die natürlichen Zahlen derart individuell, daß sie durch ein finites Axiomensystem nicht im oben genannten Sinne eindeutig gekennzeichnet werden können. Daß man diesen Umstand heute zu wenig betont, rechne ich auch zu den Gedankenlosigkeiten in der Behandlung der Mathematik. Der Sachverhalt vermittelt einem die richtige Reserve gegenüber den formalen Strukturtheorien. Für die unterrichtenden Mathematiker ist es von fundamentaler Bedeutung, diese Dinge zu kennen, weil die Stimmung seines Unterrichts dadurch wesentlich beeinflußt wird.

In einem Zusammenhang möge eine Erfahrung erwähnt werden, die man immer wieder, auch mit Akademikern, ja erstaunlicherweise auch mit Ingenieuren machen kann. Wie oft hört man die naive Frage, was es denn in der Mathematik noch Neues zu entdecken gebe, nachdem man sich mehr als zweitausend Jahre mit den Zahlen usf. wissenschaftlich auseinandergesetzt habe. Daß diese Frage in weiten Kreisen, wie gesagt auch in den gebildetsten, zu treffen ist, weist deutlich auf einen Mangel in der Gedankenführung im mathematischen Unterricht hin. Die Einsicht in die Tatsache, daß die Erweiterung der Erkenntnisse auf irgendeinem Gebiet auch wesentlich eine Erweiterung des Kreises der offenen Fragen bedeutet, scheint zu wenig verbreitet zu sein.

4.

Der junge Mathematiker, der sich heute einen Einblick verschaffen möchte, was die ihm im Studium gebotene Wissenschaft zur Wahrheitsfrage zu sagen hat, findet eine ungeheure Literatur über die mathematischen Gesetze der Logik, über Logistik, Beweistheorie usw. Nimmt er mit Elan die Bekanntschaft verschiedener dieser Werke auf, so sieht er sich von einer solchen Masse von Spezialitäten aufgesogen, daß er meist bald auf irgendeinen Sonderzweig sich möglichst wohnlich einrichtet, dort an einem Zweiglein laboriert und die Grundfrage unbeantwortet versinken läßt. Sein unbefriedigtes Fragen wirkt in ihm freilich trotzdem weiter.

Es ist tief zu bedauern, daß wichtige Sachverhalte, die Aufklärung bringen, heute in den gängigen Lehrbüchern nicht vermerkt sind. Auf einen solchen Tatbestand wollen wir näher eingehen. Da in den hier vorgebrachten Bemerkungen keine detaillierten Ausführungen beabsichtigt sind, dürfen wir uns mit dem Hinweis auf das Grundsätzliche begnügen.

---

[37] *Th. Skolem*, Über die Unmöglichkeit einer vollständige Charakterisierung der Zahlenreihe mittels eines endlichen Axiomensystems. Norsk. Math. Forenings Skrifter, Ser. II.1933. Eine auch heute noch anregende Darstellung einschlägiger Fragen findet man in dem in Fußnote 2 genannten Buche.

Denken wir uns ein formales System allgemeiner Art, bestehend aus **endlich** vielen, festen, hinschreibbaren Zeichen. Gewisse Zeichenkombinationen seien als axiomatische "Sätze" angenommen, aus denen mit Hilfe *formal beschreibbarer* Regeln, deren Zeichen alle dem System angehören, andere Sätze "bewiesen" werden. Jeder auf solche Weise schon gewonnene oder noch zu gewinnende "Satz" soll *formal richtig* heißen. Wir können annehmen, daß jeder formal-richtige Satz entweder die Form A oder $\neg$ A (nicht A) hat, wobei A eine Folge von Zeichen des Systems bedeutet, zu denen auch $\neg$ und $\wedge$ (für "und") gehören sollen.

Bei der Handhabung solcher Formalismen stellen sich die folgenden hauptsächlichsten Fragen.

Erstens die Frage der *formalen Entscheidbarkeit*: Läßt sich für **jede** gegebene Zahlenkombination A, die nur Zeichen des Systems enthält, durch formalen Beweis, das heißt durch Anwenden der zugrunde gelegten formalen Regeln, entscheiden, ob eben diese Kombination von A und $\neg$ A beide formal richtige Sätze darstellen? Anders gefaßt: Besteht Gewähr dafür, daß die Kombination A $\wedge$ $\neg$ A niemals einen formal-richtigen Satz darstellt?

Weitere Fragen, diejenigen nach der *absoluten Entscheidbarkeit* und nach der *inhaltlichen Widerspruchsfreiheit*, bedürfen einer näheren Erklärung. Sie beziehen sich nur auf solche Formalismen, deren axiomatische Sätze und Regeln gemäß einer bestimmten Zuordnung (Übersetzung der Zeichen) *einen in reinen Gedanken faßbaren* Sinn aufweisen. Für einen Formalismus ist dies an sich natürlich nicht nötig; ein solcher stellt, für sich betrachtet, ein reines Zeichenspiel dar. Ob und welchen Sinn er hat, ob er in diesen oder jenen Mechanismen nützliche Anwendungen findet, muß in jedem Fall besonders abgeklärt werden.

Auf die Fragen, was unter einem "Gedanken", was unter der Aussage "einen gedanklichen Sinn haben" zu verstehen sei, treten wir vorerst nicht ein. Wir nehmen an, daß ein vernünftiger Mensch - dessen Definition wir uns auch sparen - wisse, was mit jenen Worten bezeichnet wird. Für einen solchen stellt sich dann die gewichtige Frage, ob ein Satz (eine Kombination von Zeichen des Formalismus), von dem feststehen möge, daß er *formal* nicht entscheidbar ist, *inhaltlich* – gemäß dem ihm zugeordneten gedanklichen Sinne – vielleicht noch entscheidbar ist. In diesem Falle sagen wir, der betreffende Satz sei formal nicht entscheidbar, hingegen **absolut** entscheidbar. Ähnlich ist die Frage zu untersuchen, ob es vorkommen könnte, daß ein Formalismus zwar *formal* widerspruchsfrei ist, aber *inhaltlich* doch Widersprüche aufweist.

Von vornherein ist festzuhalten, daß es in jedem vorgelegten Formalismus *nur abzählbar viele formal-richtige* Sätze gibt, da für die "Beweise" nur endlich viele Zeichen in endlich vielen Kombinationen zur Verfügung stehen.

Dasselbe kann man freilich auch vom nicht in festen Zeichen aufgeschriebenen, rein gedanklichen Schließen sagen, da das "diskursive Denken" einen an eine Zeitdauer gebundenen Ablauf nimmt, so daß nur abzählbar viele Beweisführungen im Bewußtsein, das dem diskursiven Denken eigen ist, auftreten können.

Trotzdem besteht ein tiefgreifender Unterschied: Das inhaltliche Schließen ist in jeder Phase offen, das heißt stets in der Lage, **neue** Begriffe zu verwenden, die in einem von vornherein gewählten formalen System sich der formalen Darstellung in eben diesem System entziehen. Es kann immerhin möglich sein, durch geeignete Änderung oder Erweiterung des Formalismus den neuen Gedanken auch wiederum zu formalisieren.

Ein gegebener Formalismus kann grundsätzlich stets als mechanisches oder elektronisches Gerät technisch realisiert werden. Grundsätzlich ist mit den heutigen technischen Mitteln auch folgendes

Vorgehen möglich: Man läßt das Gerät erstens alle formal-richtigen Sätze X hintereinander nach der Anzahl der verwendeten Zeichen bilden und zweitens den Vergleich mit einer *gegebenen* Zeichenkombination A anstellen und drittens die Maschine automatisch zum Stop bringen, wenn Übereinstimmung zwischen einem erzeugten formal richtigen Satz X und A eintritt. Dasselbe läßt sich, bei festem A, mit der Kombination $A \wedge \neg A$ durchführen. Das Gerät mag noch so schnell laufen, das geschilderte Verfahren genügt noch nicht, die Frage der formalen Entscheidbarkeit und diejenige der formalen Widerspruchsfreiheit *prinzipiell* zu lösen. Es sind damit höchstens Wahrscheinlichkeitsaussagen möglich.

Den technischen Problemen, die vorstehend kurz angedeutet sind, werden heute da und dort intensive Studien gewidmet. Es ist selbstverständlich, daß damit außerordentliche, technisch-nützliche Fortschritte erzielt werden können. Es ist deshalb sachgemäß, wenn im mathematischen Unterricht im richtigen Zeitpunkt auch diese Dinge ihrer grundsätzlichen Natur nach zur Behandlung kommen, an Stelle von veraltetem Stoff, der bloß infolge des bekannten Trägheitsprinzips noch immer mitgeschleppt wird. Im richtigen Zeitpunkt: das heißt nicht zu früh. Verfrüht gegebene Kost kann sich nämlich wie Gift mit unheilbaren Folgen auswirken.

Die historische Entwicklung gibt auch die Hinweise, was in dieser Richtung den 17jährigen zu zeigen ist, nämlich Boolsche Verbände und ihre wichtigsten Modelle in der Mengenlehre, in der elementaren Zahlentheorie und in der formalen Logik.

Die Vermittlung einer Einsicht in das technische Funktionieren eines gegebenen Formalismus läßt dann erst recht aufleuchten, was es bedeute, daß ein solcher eben niemals eine *Intuition* haben kann. Bildlich, aber gewiß allgemein verständlich ausgedrückt: Ein fest gegebener Formalismus spielt sich im Finstern unter der Erdoberfläche ab, während das – formal nicht von vornherein festgelegte - inhaltliche Denken den offenen Himmel über sich hat und damit stets bereit ist, sich neu befruchten zu lassen.

Der folgende Abschnitt bringt einige Bemerkungen zu den aufgeworfenen Fragen.

5.

Während die im letzten Abschnitt erwähnten Untersuchungen betreffend die Probleme der formalen Entscheidbarkeit und der formalen Widerspruchsfreiheit im üblichen Wissenschaftsbetrieb einen anerkannten Bestand darstellen, findet man gegenüber den Fragen der absoluten Entscheidbarkeit und der absoluten Widerspruchslosigkeit weit herum – bildlich gesprochen – ein bloßes Achselzucken. Einen Grund dafür bildet eine gewisse Ohnmacht in der Behandlung der Antinomien.

Nehmen wir die bekannte Frage:

"Welches ist die kleinste natürliche Zahl, die nicht mit weniger als hundert Silben in deutscher Sprache definiert werden kann?"

Man schließt einerseits, daß es nur endlich viele natürliche Zahlen gibt, die mit weniger als hundert Silben definiert werden können, daß es also noch andere natürliche Zahlen gibt, unter denen die kleinste die gesuchte Zahl darstelle. Anderseits folgert man, daß eine solche allenfalls existierende, durch den obigen Satz bestimmte Zahl im Widerspruch zu jenem doch weniger als hundert Silben definiert wäre.

Über solche "Antinomien" wird ernsthaft diskutiert. Ich vermute, daß man schon in naher Zukunft sich darüber wundern wird, wie man ehemals sich durch solche Primitivitäten beirren lassen konnte. Der *Inhalt* der obigen Frage ist nämlich grundsätzlich derselbe wie in der folgenden : Welches ist die kleinste gerade Zahl, die ungerade ist?

Wenn man in der Fragestellung etwas sich Widersprechendes *fordert*, braucht man nicht erstaunt darüber zu sein, daß sich Widersprüche ergeben.

Was an diesem Beispiel leicht zu sehen ist, stellt auch den Kern der vielen bekannten Antinomien der Mengenlehre dar. Nur ist dieser Kern mehr oder weniger verkleidet. An einem grundlegenden Beispiel sei dies erläutert.

Das Wort Menge wird als Bezeichnung eines Begriffes verwendet, der mit einem anderen Begriff, mit demjenigen des Elementes, in einer gewissen Verbindung steht, die gewissen formalen Regeln genügt: Die Menge enthält ein Element oder enthält es nicht. Die Beziehung des Enthaltens sei mit ß bezeichnet.

Nun seien (mindestens zwei) verschiedene Dinge a, b, c, ... gegeben. Wir bilden aus ihnen, soweit es möglich ist, Mengen. Das heißt, wir denken die Begriffe, die die Beziehung ß zu einem oder zu mehreren der gegeben Dinge haben. Auch dies Mengen vereinigen wir, soweit es möglich ist, zu weiteren Mengen. Damit ist eine Vorschrift erklärt, beginnend mit gegebenen Dingen fortlaufend Mengen zu bilden. Nichts hindert uns, von der Gesamtheit der Mengen zu sprechen, sofern wir damit bloß eine abkürzende Bezeichnung meinen.

Es kommen dabei sicher Mengen vor, die sich nicht selbst enthalten. Der Beweis [38] hierfür läuft wie folgt: Es seien a und b zwei verschiedene Dinge. Wir bilden die Menge A, deren einziges Element a ist, die Menge B, deren einziges Element b ist, und die Menge C, deren Elemente a und b sind. Nehmen wir nun an, es würde gleichzeitig gelten $A ß A$, $B ß B$ und $C ß C$, so müßte $A \equiv a$, $B \equiv b$ und $C \equiv a$ oder $C \equiv b$ sein, also $C \equiv A$ oder $C \equiv B$ während C doch von A und B verschieden ist.

Wir können somit aus der vorangehend erklärten Gesamtheit von Mengen diejenigen ins Auge fassen, die sich nicht selbst enthalten. Wir sprechen vom System S dieser Menge U, V, W,.... . Wenn S eine Menge ist, wenn also der Begriff S genau zu den Mengen U, V, W, ... des Systems die Beziehung ß besitzt, so können wir prüfen, ob entweder $S ß S$ oder S nicht $ß S$ gilt.

Wäre $S ß S$, so würde also S eine Menge des Systems darstellen. Dieses besteht aber aus Mengen, die sich nicht selbst enthalten. Somit gilt S nicht $ß S$.

Wäre aber S nicht $ß S$, so würde S eine Menge des Systems darstellen, somit müßte $S ß S$ gelten.

Der selbstverständliche Schluß, der daraus zu ziehen ist, lautet sehr einfach: *Das System S ist keine Menge*. Es zeigt sich eben, daß man zwischen dem bloßen *Nomen* "Gesamtheit" oder "System" und dem wirklichen Begriff Menge streng zu unterscheiden hat. Es ist keineswegs am Platze, sich darüber zu wundern. Wer jenes System doch als eine wirkliche Menge betrachten will, verlangt grundsätzlich dasselbe wie derjenige, der die kleinste gerade Zahl, die ungerade ist, als wirkliche Zahl werten möchte.

Wir könnten so der Reihe nach die bekannten Antinomien der Mengenlehre durchnehmen. Es geht stets darum, daß man nur dann zu solchen kommt, wenn man im Fortgang der Gedankenbildung sich selbst widerspricht. Es ist das der kaum hoch genug einzuschätzende Verdienst des Schweizer Mathematikers *Paul Finsler*, diese Sachlage längst aufgeklärt zu haben[39].

Für den Unterricht mag es interessant sein, ein einfaches Beispiel einer Menge vorzuführen, die sich selbst enthält. Auf die linke Tafel schreibe man:

---

[38] Nach *P. Finsler*: Über die Grundlegung der Mengenlehre , Math.Zeitschrift. 25 (1926), P. 686

[39] *P.Finsler:* Gibt es Widersprüche in der Mathematik? Jahresbericht der Deutschen Math.-Ver. 34 (1925), sowie die in Fußnote [6] angegebene Abhandlung.

A sei die Menge mit den Elementen 1 und 2. *B* sei die Menge mit den Elementen 2 und 3. *C* sei die Menge, deren Elemente alle hier erklärte Mengen sind. Dann gilt *CßA*, *CßB*, *CßC*.

Würde man hingegen auf die linke Tafel schreiben: *A* sei die Menge mit den Elementen 1 und 2, *B* sei die Menge mit den Elementen 2 und 3; und auf die rechte Tafel: *C* sei die Menge, deren Elemente die dort erklärten Mengen sind, so gilt *CßA*, *CßB* und *C* nicht ß*C*.

Solange sich der Mathematiker des inhaltlichen diskursiven Schließens bedient, gilt der Satz, das ein *einziger* Widerspruch die *ganze* Begriffsbildung zu Fall bringt. Wer nun am eigenen Denken in mathematischen Begriffen zu zweifeln beginnt und meint, vielleicht seien Widersprüche doch nicht zu vermeiden, muß aus dieser Ohnmacht *notwendig* auf das Geleise des bloßen Formalismus gedrängt werden. Selbstverständlich lassen sich formale mehrwertige Logiken entwickeln, die als Mechanismen zu diesem oder jenem Zwecke brauchbar sind. Dann ist aber die Mathematik zur bloßen Automatik degradiert.

Nach diesen Hinweisen erinnern wir nun an die zwar wenig bekannte, überragend wichtige, oft verschwiegene, aber - soweit uns bekannt ist - niemals widerlegte Tatsache, die *Finsler* [40] entdeckte. Sie gilt für hinreichend allgemeine formale Systeme, deren Grundsätzen und Regeln (s. Ab. 4) auch ein inhaltlicher Sinn zukommt: *Es lassen sich stets Sätze, also Zeichenkombinationen angeben, die sicher formal widerspruchsfrei sind, aber inhaltlich doch einen angebbaren Widerspruch enthalten.*

Der Beweis hierfür ist keineswegs allzu schwer. Immerhin wäre es wünschenswert, wenn er von verschiedenen Fachleuten neu durchgearbeitet und vielleicht sogar noch vereinfacht werden könnte, damit die Einsicht in diese fundamentale Tatsache, die grundsätzlich über die berühmt gewordene Gödelsche Bemerkung weit hinausgeht, möglichst bekannt würde, in erst Linie in Kreisen der Mathematiklehrer.

Neue Gestaltungen in der Behandlung der Mathematik

In vorangehenden Artikeln wurden einige Probleme gestreift, vor die sich der Mathematiklehrer aller Stufen durch die Wege, die seit einiger Zeit in der Mathematik eingeschlagen worden sind, heute gestellt findet. Der wesentliche Kern dieser Probleme besteht darin, daß die Gedankenlosigkeit geradezu zum Prinzip erhoben worden ist, indem man nämlich die Frage nach dem wirklichen Gedankeninhalt mathematischer Beziehungen verdrängte und die bloß formale Struktur in den Vordergrund rückte. Damit ist nichts gegen die offensichtliche Nützlichkeit der Verwendung von bloß formalen Strukturen gesagt. Es gilt sogar, daß beim Hinblick auf die bloße Nützlichkeit der Mathematik für alle technisch gearteten Anwendungen tatsächlich *der reinen Struktur die maßgebliche Rolle* (hervorg. vom Hrsg.) zukommt.

Im Untergrund der heutigen Entwicklung spielt sich in neuer Form der alte Kampf zwischen Realisten (im scholastischen Sinne) und Nominalisten ab, wobei die letzteren heute vorläufig als Sieger auftreten. Für die technischen Anwendungen der Mathematik mag dies zunächst belanglos erscheinen. Wenn es nur auf diese ankäme, könnte man ruhig abwarten, was die Philosophen über das Problem noch auszumachen vermögen. Heute marschieren diese mehrheitlich in der Gefolgschaft der Nominalisten, wobei sich in der Erkenntnistheorie eine bedauerliche Primitivität eingebürgert hat.

Nicht belanglos ist dies Lage für den Unterricht auf allen Stufen, da es hier um junge Menschen geht.

Das National Council of Teachers of Mathematics (USA)[41] gab Ende 1961 eine Schrift heraus mit dem Titel: The Revolution in School Mathematics, a Challenge for Administrators and Teachers.

---

40 *P. Finsler:* Formale Beweise und die Entscheidbarkeit. Math. Zeitschrift 25

41 National Council of Teachers of Mathematics. 1201 Sixteenth Street, N.S., Washington 6, D.C.

Man ist dankbar für diese Orientierung, da sie in klarer Form die Gründe, praktische Vorschläge und erste Erfahrungen für eine Neugestaltung des mathematischen Unterrichts darlegt und viele Hinweise auf neue Lehrbücher und über einschlägige Organisationen bietet. Als Ausgangssituation wird erklärt, die Entwicklung der Mathematik sei gegenwärtig derart intensiv und folgenschwer, daß sie nur als Revolution beschrieben werden könne. Es werden drei Gründe für diese Lage aufgeführt. Erstens die außerordentliche Ausdehnung der Forschungstätigkeit:

"The twentieth century has been the golden age of mathematics, since more mathematics, and more profound mathematics, has been created in this period than during all the rest of history." Der Jahrgang 1960 der *Mathematical Review* enthalte 1652 große, zweikolonnige Seiten, derjenige des Jahrgangs 1961 wohl mehr als 2400 solcher Seiten. Es wird auf abstrakte Algebra, die Topologie, die Maßtheorie, die allgemeine Funktionalanalysis und Integrationstheorie, die Statistik und die Spieltheorie hingewiesen, die in unserem Jahrhundert entwickelt worden sind.

In der Tat hat eine enorme Entwicklung in die Breite stattgefunden. Prüft man das "goldene Zeitalter" genauer, so stellt man allerdings fest, daß die wesentlichen Ideen fast alle bereits im 19. Jahrhundert konzipiert, wenn auch noch nicht zu ausladenden Theorien ausgearbeitet worden sind.

Als zweiter Grund für die Revolution wird die Automation genannt, die zur Ausführung gewisser technischer Objekte nötig ist. Als Beispiel wird der neue Flugzeugtyp B-70 angeführt: "Its range will be 7000 miles, and it will fly 2000 miles per hour at an altitiude of 70 000 feet. It will be capable of carrying in its thirty-foot bays enough nuclear bombs to blow a small nation off the map."

Als dritter Grund gilt der Umstand, daß heute die elektronischen Rechenanlagen zur Verfügung stehen. Während *W. Shanks* zur Berechnung von π auf 707 Dezimalstellen viele Jahre brauchte, lieferte die *ENIAC* in 70 Stunden mehr als 2000 Dezimalstellen, wobei ein Fehler von *Shanks* Rechnung in der 528. Stelle zum Vorschein kam. Schon 1949 konnten mehr als 3000 Stellen in 13 Minuten bestimmt werden. Um 1960 wurden mehrfach 10 000 Stellen berechnet. Als typisches Beispiel für die heute sich darbietenden Probleme wird die Kontrolle der Bahn eines automatisch gelenkten Geschosses erwähnt.

Die genannten Gründe sollen es notwendig machen, nicht nur viel mehr Mathematiker auszubilden und allgemein die mathematischen Kenntnisse in weiteren Kreisen zu forcieren, sondern den Unterricht auf allen Stufen tiefgreifend umzuwandeln.

Wo bleibt die Kardinalfrage jedes Unterrichtens: nämlich die Entwicklung zur Menschenwürde?

Würden die heute vornehmlich und mit Vehemenz propagierten Methoden durchgängig eingeführt, *ohne gleichzeitig einen Ausgleich in anderer Richtung zu schaffen*, so wäre das Ergebnis eine Katastrophe in zwanzig Jahren. Die einseitige Inanspruchnahme des bloßen Intellekts im Kinde würde als Folge nicht eine wahre Stärkung der Intellektualität, sondern im allgemeinen eine Schwächung und durchgreifende Verflachung ergeben. Man vergißt völlig, daß der gesunde, starkmütige Intellekt eine Blüte ist, zu deren Leben eine vorgängige Entwicklung anderer Fähigkeiten nötig ist.

Wirft man dagegen ein, daß auch die modernen Befunde und Methoden der Psychologie herangezogen werden, daß die raffiniert ausgeklügelten Wege heute es erlauben, den Intellekt schon bei Zehn- bis Zwölfjährigen in Aktion zu setzen, so ist darauf aufmerksam zu machen, daß der derart künstlich aufgeschaukelte Intellekt eine Scheinblüte ist, die den Menschen in ein automatenhaft funktionierendes intellektuelles Bewußtsein hineintreibt, in welchem die Menschenwürde keinen Anker findet.

Ich bin mir bewußt, daß mit diesen Bemerkungen allein recht wenig geholfen ist. Es erscheint mir aber als eine Pflicht, daß gegenüber dem überhandnehmenden strohenen Verabstrahieren auch eine dezidiert andersklingende Stimme zu Wort kommt.

Im folgenden seien einige Vorschläge genannt, die mir für den mathematischen Unterricht mittlerer Stufe als notwendig erscheinen.

Arithmetik und Algebra

1. Mehr Gewicht legen auf das rekursive Rechnen.
2. In die Welt der Eigenschaften der natürlichen Zahlen einführen, was erfahrungsgemäß in der schönsten Weise geschehen kann, und im jungen Menschen die gesunde Kraft des Staunens mit dem noch zarten Intellekt verbindet.
3. Im Aufbauen des Stoffes den Gesamtorganismus der sieben, bzw vier Grundoperationen im Auge behalten, so daß am Schluß dieser Organismus jedem Schüler sichtbar und sogar erlebbar wird.
4. Einführung in die Boolesche Algebra in ihren Elementen und in ihre verschiedenen Anwendungen in der Mengenlehre, Zahlentheorie und formalen Logik. Hieraus in elementarster Form in das Wesen ein facher Formalismen eintreten.
5. In oberen Jahrgängen die Prinzipien der elektronischen Rechenmaschinen erläutern aufgrund der unter Punkt 4 genannten Kenntnisse.

Geometrie

1. In rein zeichnender Geometrie die Fülle der Formenwelt kennenlernen, vor allem auch viele Kurvengestalten.
2. Rein konstruierend die ebene (später auch in den Elementen die räumliche) projektive Geometrie unter steter Beachtung des Dualitätsgesetzes entwickeln. Vor allem die wichtigsten projektiven Transformationen (zentrale Kolineation und andere) zeichnerisch an verschiedenen Figuren darstellen – ohne besondere Theorie - und ihre Sonderformen in der affinen und metrischen Geometrie zeigen.
3. Beweisführungen zunächst ruhig durch vernünftige Inanspruchnahme der Evidenz andeuten, dabei aber nicht so tun, als ob die wissenschaftlich strenge Form erreicht sei. (Je mehr der Lehrer ausgebildeter Mathematiker ist, desto besser weiß er, daß es Unsinn ist, mit Axiomatik anzufangen. Die Axiomatik kommt an den Schluß, als letztes Schema, nachdem man die Fülle wirklich gekostet hat.)

Als historisch und sachlich gegebenes Beispiel dafür, wie das moderne Denken funktioniert, wird man das *lineare Kontinuum*, seine Merkwürdigkeiten und seine begriffliche Bestimmung erläutern, was Anlaß zu fast dramatisch spannenden Schilderungen bietet.

In den *Anwendungen* ist natürlich eine Einführung in die Statistik zu vermitteln. Ferner ist die mathematische Geographie unter besonderer Berücksichtigung des Flugverkehrs zu behandeln.

Die Geometrie ermöglicht es, gegenüber dem abstrakten Element einen künstlerischen Zug als Ausgleich in die Mathematik als Unterrichtsstoff hineinzubringen. In fördernder Weise kann diese allerdings nur demjenigen Lehrer gelingen , der selbst über eine hinreichende Fülle geometrischer Anschauungen verfügt, die heute keineswegs leicht zu erlangen ist.

Im Unterrichten hat freilich das "*Wie*" den Vorrang gegenüber dem "*Was*", so daß mit bloßen Stoffandeutungen noch wenig gesagt ist.