Folgen von pythagoräischen Quadrupeln

Einführung:

Gilt für zunächst irgendwelche natürlichen Zahlen x_n , y_n, z_n, t_n, die Beziehung

$$x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 = t_n^2$$

so nennen wir x_n, y_n, z_n, t_n ein pythagoräisches Zahlenquadrupel oder kurz Quadrupel. Ist überdies der grösste gemeinsame Teiler aller 4 natürlichen Zahlen gleich 1, so nennen wir das Quadrupel primitiv in allen anderen Fällen imprimitiv.

Sind irgend 3 natürliche Zahlen p, q, r gegeben, dann lässt sich daraus aufgrund der folgenden 4 Beziehungsgleichungen ein pythagroäisches Zahlenquadrupel bestimmen:

$$\mathrm{I} \qquad \begin{aligned} x &= 2qr \\ y &= 2pq \\ z &= p^2 + r^2 - q^2 \\ t &= p^2 + r^2 + q^2 \end{aligned} \qquad \text{mit} \qquad x^2 + y^2 + z^2 = t^2$$

Diese Beziehungsgleichungen lassen sich - einmal gefunden - leicht durch ausrechnen beweisen. Man erhält so primitive als auch imprimitive Quadrupel. Aus den letzteren erhält man aber stets primitive Basis-Quadrupel indem man durch den grössten gemeinsamen Teiler dividiert. Dies zeigt folgendes Beispiel:

$$\begin{aligned} 12^2 + 18^2 + 36^2 &= 42^2 \\ 2^2 + 3^2 + 6^2 &= 7^2 \end{aligned} \qquad \text{g.g.T.} = 6$$

Ist in den Gleichungen I speziell r = 0, so ergeben sich pythagoräische Zahlentripel, für die x = 0 ist.
Zur einführenden Erklärung zwei Beispiele:

1.) für p = 3, 1 = 5 und r = 9 ist

$$\begin{aligned} x &= 2qr &&= 90 \\ y &= 2pq &&= 30 \\ z &= p^2 + r^2 - q^2 &&= \\ &= 9 + 81 - 25 &&= 65 \\ t &= p^2 + r^2 + q^2 &&= \\ &= 9 + 81 + 25 &&= 115 \\ & 90^2 + 30^2 + 65^2 &&= 115^2 \end{aligned}$$

Dieses Quadrupel ist imprimitiv mit dem grössten gemeinsamen Teiler 5, woraus das primitive Quadrupel

$$18^2 + 6^2 + 13^2 = 23^2$$

folgt.

2.) für p = 1, q = 3 und r = 5 ist

$$\begin{aligned} x &= 2qr &&= 30 \\ y &= 2pq &&= 6 \\ z &= p^2 + r^2 - q^2 &&= 17 \\ t &= p^2 + r^2 + q^2 &&= 35 \\ & 30^2 + 6^2 + 17^2 &&= 35^2 \end{aligned}$$

Dieses Quadrupel ist primitiv, weil der grösste gemeinsame Teiler gleich 1 ist.

Spezielle Folgen von pythagoräischen Quadrupeln

Solche Folgen ergeben sich dadurch, dass die Zahlen p, q, und r Funktionen von n sind. Wir untersuchen im Folgenden verschiedene solcher Folgen indem wir ihren Anfang für n = 0, 1, 2 ⋯ in einer Art Schema rubrizieren:

Es sei $p = 2n^2$ $q = 2n$ $r = 2n - 1$

Dann ist

	n =		0	1	2	3	4	5	6
	x_n =	$4n(2n-1)$	0	4	24	60	112	180	264
	y_n =	$8n^3$	0	8	64	216	512	1000	1728
(1)	z_n =	$4n^4 - 4n + 1$	1	1	57	313	1009	2481	5161
	t_n =	$4n^4 + 8n^2 - 4n + 1$	1	9	89	385	1137	2681	5449

Hier sind alle Folgenglieder primitive Quadrupel.

Es sei $p = 2n^2 - 1$ $q = 2n - 1$ $r = 2n^2 + 1$

Dann ist

	n =		0	1	2	3	4	5	6
	x_n =	$2(2n-1)(2n^2+1)$	- 2	6	54	190	462	918	1606
	y_n =	$2(2n-1)(2n^2-1)$	2	2	42	170	434	882	1562
(2)	z_n =	$8n^4 - 4n^2 + 4n + 1$	1	9	121	625	2001	4921	10248
	t_n =	$8n^4 + 4n^2 - 4n + 3$	3	11	139	675	2099	5083	10491

Bei dieser Folge ist nur das Quadrupel der 4. Spalte imprimitiv mit dem grössten gemeinsamen Teiler 5, d.h. aus dem imprimitiven Quadrupel

$$190^2 + 170^2 + 625^2 = 675^2$$

folgt das primitive Quadrupel

$$38^2 + 34^2 + 125^2 = 135^2$$

Es sei $p = n$ $q = 2n^2 - 1$ $r = 2n - 1$

Dann ist

	n =		0	1	2	3	4	5
	x_n =	$2(2n-1)(2n^2-1)$	2	2	42	170	434	882
	y_n =	$2n(2n^2-1)$	0	2	28	102	248	490
(3)	z_n =	$4n^4 + 9n^2 - 4n$	0	1	36	-255	-896	-2295
	t_n =	$4n^4 + n^2 - 4n + 2$	2	3	62	323	1026	2507

Bei dieser Folge wechseln in den Spalten imprimitive und primitive Quadrupel. Aus den imprimitiven Quadrupeln mit dem grössten gemeinsamen Teiler 2 ergeben sich die primitiven Quadrupel wie folgt:

$$2^2 + 0^2 + 0^2 = 2^2 \quad \xrightarrow{2} \quad 1^2 + 0^2 + 0^2 = 1^2$$

$$42^2 + 28^2 + (-36)^2 = 62^2 \quad \xrightarrow{2} \quad 21^2 + 14^2 + 18^2 = 31^2$$

$$434^2 + 248^2 + (-896)^2 = 1026^2 \quad \xrightarrow{2} \quad 217^2 + 124^2 + 448^2 = 513^2$$

etc.

Es sei $p = n$ $q = n^2 - 1$ $r = 2n$

Dann ist

(4)

n =		0	1	2	3	4	5
x_n =	$4n^3$	0	4	32	108	256	500
y_n =	$2n^3$	0	2	16	54	128	250
z_n =	$5n^2 - n^4$	0	4	4	-36	-176	-500
t_n =	$5n^2 + n^4$	0	6	36	126	336	750

Die Folgenglieder dieser Quadrupelfolge sind alle imprimitiv und zwar mit verschiedenen grössten gemeinsamen Teilern:

$$4^2 + 2^2 + 4^2 = 6^2 \xrightarrow{2} 2^2 + 1^2 + 2^2 = 3^2$$

$$32^2 + 16^2 + 4^2 = 36^2 \xrightarrow{4} 8^2 + 4^2 + 1^2 = 9^2$$

$$108^2 + 54^2 + (-36)^2 = 126^2 \xrightarrow{18} 6^2 + 3^2 + \quad = 7^2$$

$$256^2 + 128^2 + (-176)^2 = 336^2 \xrightarrow{16} 16^2 + 8^2 + 11^2 = 21^2$$

$$500^2 + 250^2 + (-500)^2 = 750^2 \xrightarrow{250} 2^2 + 1^2 + 2^2 = 3^2$$

etc.

Es sei $p = n$ $q = 1$ $r = 2$

Dann ist

(5)

n =		0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_n =	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
y_n =	$2n$	0	2	4	6	8	10	12	14	16
z_n =	$n^2 + 3$	3	4	7	12	19	28	39	52	67
t_n =	$n^2 + 5$	5	6	9	14	21	30	41	54	69

Bei dieser Folge wechseln wieder primitive und imprimitive Quadrupel in den einzelnen Spalten. Dabei ergibt sich wie oben.

$$4^2 + 2^2 + 4^2 = 6^2 \xrightarrow{2} 2^2 + 1^2 + 2^2 = 3^2$$

$$4^2 + 6^2 + 12^2 = 14^2 \xrightarrow{2} 2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$$

$$4^2 + 10^2 + 28^2 = 30^2 \xrightarrow{2} 2^2 + 5^2 + 14^2 = 15^2$$

$$4^2 + 14^2 + 52^2 = 54^2 \xrightarrow{2} 27^2 + 7^2 + 26^2 = 27^2$$

etc.

Bemerkenswert bei dieser Folge ist das konstante Glied $x_n = 4$ und die konstante Differenz $t_n - z_n = 2$

Es sei $p = n$ $q = n + 1$ $r = n\,(n + 1)$

sodass gilt $p^2 + q^2 + r^2 = [n\,(n + 1) + 1]^2$

Dann ist

				0	1	2	3	4	5
	n	=		0	1	2	3	4	5
	x_n	=	$2n\,(n+1)^2$	0	8	36	96	200	360
(6)	y_n	=	$2n\,(n+1)$	0	4	12	24	40	60
	z_n	=	$n^4 + 2n^3 + n^2 - 2n + 1$	1	1	31	137	391	889
	t_n	=	$[n\,(n+1)+1]^2$	1	3^2	7^2	13^2	21^2	31^2

Hier stehen in allen Spalten bemerkenswerte primitive Quadrupel:

$$1^4 = 0^2 + 0^2 + 1^2$$
$$3^4 = 8^2 + 4^2 + 1^2$$
$$7^4 = 36^2 + 12^2 + 31^2$$
$$13^4 = 96^2 + 24^2 + 137^2$$

Es sei $p = 1$ $\qquad q = 2n$ $\qquad r = 2n^2$

sodass gilt $p^2 + q^2 + r^2 = (2n^2 + 1)^2$

Dann ist

	n	=		0	1	2	3	4	5	⋯	8
	x_n	=	$8n^3$	0	8	64	216	512	1000	⋯	8^4
(7)	y_n	=	$4n$	0	4	8	12	16	20	⋯	32
	z_n	=	$(2n^2 - 1)^2$	1	1^2	7^2	17^2	31^2	49^2	⋯	127^2
	t_n	=	$(2n^2 + 1)^2$	1	3^2	9^2	19^2	33^2	51^2	⋯	129^2

In den Spalten stehen jeweils primitive Quadrupel. Bemerkenswert sind die Spalten 5 und 8:

$$33^4 = 31^4 + 2^4 + 2\cdot 2^4$$
$$129^4 = 127^4 + 2\cdot 2^4 + 8^4$$

Mit diesen Beispielen wollen wir es hier bewenden lassen und nur noch auf weitere Möglichkeiten aufmerksam machen:

<u>1. Bemerkung:</u> für $r = 0$ ergeben sich im allgemeinen Folgen von pythagoräischen Tripeln.

Es sei z.B. $p = n$ $\qquad q = 2n^2$

Dann ist

	n	=		0	1	2	3	4	5
	x_n	=	0	0	0	0	0	0	0
(7)	y_n	=	$4n^3$	0	4	32	108	256	500
	z_n	=	$n^2 - 4n^4$	0	-3	-60	-315	-1008	-2475
	t_n	=	$n^2 + 4n^4$	0	5	68	333	1040	2525

Abgesehen von den ersten beiden Spalten ergeben sich stets imprimitive pythagoräische Zahlentripel, deren primitive Basistripel aber leicht erkennbar sind:

$$32^2 + 60^2 = 68^2 \quad \xrightarrow{4} \quad 8^2 + 15^2 = 17^2$$

$$108^2 + 315^2 = 333^2 \quad \xrightarrow{9} \quad 12^2 + 35^2 = 37^2$$

$256^2 + 1008^2 = 1040^2 \xrightarrow{16} 16^2 + 63^2 = 65^2$

$500^2 + 2475^2 = 2525^2 \xrightarrow{25} 20^2 + 99^2 = 101^2$

etc.

allgemein: $(4n)^2 + (4n^2 - 1)^2 = (4n^2 + 1)^2$

für $n = 1, 2, 3 \cdots$

2. Bemerkung:

Sind p, q und r irgendwelche zunächst positive rationale Zahlen, so führt eine entsprechende Rechnung auf das Folgende:

Wir wählen ein Beispiel: $p = 1$ $q = \frac{1}{2}$ $r = \frac{2}{3}$

Dann ist

$$x = \frac{2}{3}$$

$$y = 1$$

$$z = 1 + \frac{4}{9} - \frac{1}{4} = \frac{43}{36}$$

$$t = 1 + \frac{4}{9} + \frac{1}{4} = \frac{61}{36}$$

und weiter

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{4}{9} + 1 + \frac{43^2}{36^2}$$

$$= \frac{24^2 + 36^2 + 43^2}{36^2} = \frac{61^2}{36^2}$$

Wir erhalten also auch für rationale p, q und r pythagoräische Zahlenquadrupel. In diesem Fall auf mehr indirektem Weg das Quadrupel

$$24^2 + 36^2 + 43^2 = 61^2$$

Natürlich kann man mit dieser Methode auch Quadrupelfolgen bilden, z.B. für

$p = \frac{1}{n}$ $q = n^2$ $r = \frac{1}{n^2 - 1}$ $(n \neq 1)$

Die zugehörige Rechnung gestaltet sich aber für diesen Fall recht kompliziert.