Quadratsummen mit gleichen Summenwerten, die aus einem einzigen pythagoräischen Zahlentripel hervorgehen

Georg Glöckler*

1 Pythagoräische Zahlenquadrupel, die unmittelbar aus einem pythagoräischen Zahlentripel hervorgehen

Pythagoräische Zahlentripel sind drei natürliche Zahlen x, y und z, welche der Bedingung $x^2 + y^2 = z^2$ genügen. Ein solches Tripel wird primitiv genannt, wenn der größte gemeinsame Teiler von x, y und z gleich 1 ist.
Beispiele:

$$\begin{aligned} 3^2 + 4^2 &= 5^2 \\ 48^2 + 55^2 &= 73^2 \\ 696^2 + 697^2 &= 985^2 \end{aligned} \tag{1}$$

Wir betrachten zunächst die folgenden Summen

$$(z+x)^2 + (z+y)^2 + (z+x+y)^2$$

Aus den obigen Beispielen folgt dann

$$\begin{aligned} 8^2 + 9^2 + 12^2 &= 289 = 17^2 \\ 121^2 + 128^2 + 176^2 &= 62\,001 = 249^2 \\ 1681^2 + 1682^2 + 2378^2 &= 11\,309\,769 = 3363^2 \end{aligned}$$

Es ergeben sich also bemerkenswerterweise pythagoräische Zahlenquadrupel. In der Tat ist nämlich

$$(z+x)^2 + (z+y)^2 + (z+x+y)^2 = (2z+x+y)^2 \tag{2}$$

*Undatiertes Manuskript Nr. 181, übertragen von Peter Baum 23.11.2019

Ersetzt man in Formel (2) x durch $-x$ oder bzw. und y durch $-y$, so ergeben sich aus (2) drei weitere Formeln, die pythagoräische Zahlenquadrupel erfassen. Dies sei kurz an dem Beispiel $5^2 + 12^2 = 13^2$ durchgeführt:

$$\begin{aligned}
(z+x)^2 + (z+y)^2 + (z+x+y)^2 &= (2z+x+y)^2 \\
18^2 + 25^2 + 30^2 &= 43^2 \\
(z-x)^2 + (z+y)^2 + (z-x+y)^2 &= (2z-x+y)^2 && (3) \\
8^2 + 25^2 + 20^2 &= 33^2 \\
(z+x)^2 + (z-y)^2 + (z+x-y)^2 &= (2z+x-y)^2 && (4) \\
18^2 + 1^2 + 6^2 &= 19^2 \\
(z-x)^2 + (z-y)^2 + (z-x-y)^2 &= (2z-x-y)^2 && (5) \\
8^2 + 1^2 + 4^2 &= 9^2
\end{aligned}$$

Ergebnis: Aus einem pythagoräischen Tripel gehen stets 4 verschiedene pythagoräische Zahlenquadrupel hervor.

Zum Beispiel:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 18^2 + 25^2 + 30^2 = 43^2 & & \\
 & & \uparrow & & \\
8^2 + 25^2 + 20^2 = 33^2 & \leftarrow & 5^2 + 12^2 = 13^2 & \rightarrow & 18^2 + 1^2 + 6^2 = 19^2 \\
 & & \downarrow & & \\
 & & 8^2 + 1^2 + 4^2 = 9^2 & &
\end{array}$$

Kommentar (P.B.) *Wird durch das Tripel* (x, y, z) *vermöge der Gleichung* (2) *das Quadrupel*

$$\begin{aligned}
u &= x + z \\
v &= y + z \\
w &= x + y + z \\
t &= x + y + 2z
\end{aligned}$$

erzeugt, entspricht das der Abbildungsmatrix

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

Dies ist – bis auf Vertauschung der ersten beiden Zeilen – die Matrix D aus der Untersuchung „Rekursive Erzeugung der pythagoräischen Quadrupel nach Georg Glöckler“ von Albrecht Häberlein (Glöckler-Quadrupel 13-11-2019.pdf).

Die Matritzen, die aus den Gleichungen (3), (4) *und* (5) *resultieren, sind der Reihe* *nach*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2 Gleichheit einfacher Quadratsummen

Wir berechnen zunächst den folgenden Term

$$(z+x)^2 + (z+y)^2 - (z+x+y)^2$$

aufgrund der Beispiele (1):

$$8^2 + 9^2 - 12^2 = 1 = 1^2$$
$$121^2 + 128^2 - 176^2 = 49 = 7^2$$
$$1681^2 + 1682^2 - 2378^2 = 1 = 1^2$$

Das Ergebnis ist in allen drei Fällen eine Quadratzahl. Es gilt ganz allgemein:

$$(z+x)^2 + (z+y)^2 = (x-y)^2 + (z+x+y)^2 \tag{6}$$

Wie im vorangehenden Fall ergeben sich auch hier wieder drei weitere Beziehungen, die wir wieder an einem Beispiel verifizieren wollen.
Es sei

$$x^2 + y^2 = 15^2 + 8^2 = 17^2 = z^2$$

Dann gilt:

$$(z+x)^2 + (z+y)^2 = (x-y)^2 + (z+x+y)^2 \tag{7}$$
$$32^2 + 25^2 = 7^2 + 40^2 = 1649$$
$$(z-x)^2 + (z+y)^2 = (x+y)^2 + (z-x+y)^2 \tag{8}$$
$$2^2 + 25^2 = 23^2 + 10^2 = 629$$
$$(z+x)^2 + (z-y)^2 = (x+y)^2 + (z+x-y)^2 \tag{9}$$
$$32^2 + 9^2 = 23^2 + 24^2 = 1105$$
$$(z-x)^2 + (z-y)^2 = (y-x)^2 + (z-x-y)^2 \tag{10}$$
$$2^2 + 9^2 = 7^2 + 6^2 = 85$$

Aus einem pythagoräischem Tripel gehen also jeweils 4 Quadratsummen-Gleichheiten hervor, z.B.

$$\begin{array}{ccccc} & & 7^2 + 40^2 = 25^2 + 32^2 & & \\ & & \uparrow & & \\ 2^2 + 25^2 = 10^2 + 23^2 & \leftarrow & 15^2 + 8^2 = 17^2 & \rightarrow & 9^2 + 32^2 = 23^2 + 24^2 \\ & & \Downarrow & & \\ & & 2^2 + 9^2 = 6^2 + 7^2 & & \end{array}$$

3 Gleichheit der Summenwerte zweier verschiedener Tripelsummen

Aus den Gleichungen (3) bis (5) lassen sich weitere Beziehungen ableiten. Aus (4) und (5) folgt zunächst

$$(z-x)^2 + (z+y)^2 + (z-x+y)^2 + (2z-x-y)^2 = (z-x)^2 + (z-y)^2 + (z-x-y)^2 + (2z-x+y)^2$$

$$(z+y)^2 + (z-x+y)^2 + (2z-x-y)^2 = (z-y)^2 + (z-x-y)^2 + (2z-x+y)^2 \tag{11}$$

Entsprechende Kombinationen unter den Gleichungen (3) bis (5) ergeben 3 weitere solche Gleichheiten:

$$(z+x)^2 + (z+x+y)^2 + (2z-x+y)^2 = (z-x)^2 + (z-x+y)^2 + (2z+x+y)^2 \tag{12}$$

$$(z+y)^2 + (z+x+y)^2 + (2z+x-y)^2 = (z-y)^2 + (z+x-y)^2 + (2z+x+y)^2 \tag{13}$$

$$(z+x)^2 + (z+x-y)^2 + (2z-x-y)^2 = (z-x)^2 + (z-x-y)^2 + (2z+x-y)^2 \tag{14}$$

Ausgehend von dem Tripel $15^2 + 8^2 = 17^2$ ergeben sich also 4 Gleichheiten von Tripelsummen:

$$25^2 + 10^2 + 11^2 = 9^2 + 6^2 + 27^2 = 846$$
$$32^2 + 40^2 + 27^2 = 2^2 + 10^2 + 57^2 = 3353$$
$$25^2 + 40^2 + 41^2 = 9^2 + 24^2 + 57^2 = 3906$$
$$32^2 + 24^2 + 11^2 = 2^2 + 6^2 + 41^2 = 1721$$