Drei elementare Quadratsummen

Georg Glöckler*

1 Einführung

Im Folgenden werden uns drei charakteristische Quadratsummen beschäftigen. Es handelt sich um die folgenden:

1. Summe: $p^2 + q^2 = r$ (einfache Quadratsumme)

2. Summe: $x^2 + y^2 = z^2$ (ein pythagoräisches Tripel)

3. Summe: $u^2 + v^2 + w^2 = t^2$ (ein pythagoräisches Quadrupel)

Die drei Summen seien zunächst unabhängig voneinander gedacht. Haben dann die jeweiligen Basiswerte[1] der drei Summen keine gemeinsame Teiler, so nennen wir die Summen primitiv, in allen anderen Fällen imprimitiv (Kennzeichnung i).

In zwei Schritten bringen wir nun die drei Summen in eine solche Abhängigkeit, dass sie auseinander hervorgehen.[2]

1. Schritt: Es sei $z = r = p^2 + q^2$, dann ist $z^2 = x^2 + y^2 = (2pq)^2 + \left(q^2 - p^2\right)^2$. Man beachte: Bei einem primitiven pyth. Zahlentripel ist dann immer y die ungerade Zahl des Tripels.

2. Schritt: Es sei nun weiter

$$\begin{aligned} u &= z + y \\ v &= u + x \\ w &= v - y \end{aligned} \tag{1}$$

dann ist

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 + w^2 &= (z+y)^2 + (z+x+y)^2 + (z+x)^2 \\ u^2 + v^2 + w^2 &= (2z+x+y)^2 = t^2 \end{aligned}$$

mit $t = u + w$.[3]

Das Letztere kann leicht durch Nachrechnen bestätigt werden. Dazu ein Beispiel: Mit $p = 4$ und $q = 5$ ist alles weitere bestimmt:

*Undatierte Handschrift Nr. 107, aus dem Nachlass, übertragen von Peter Baum im Juli 2019.

[1] Das Wort „Basiswert“ bezieht sich auf die Basis der Potenzen.

[2] Im Folgenden setzt Georg Glöckler die Erzeugung primitiver pythagoräischer Tripel (x, y, z) durch die Formeln $x = 2pq$, $y = q^2 - p^2$, $z = p^2 + q^2$ mittels zweier teilerfremden natürlichen Zahlen p und q, die nicht beide ungerade sind, voraus. Übrigens werden die drei in diesem Skriptum behandelten Quadratsummen ausführlich von Harald Scheid in seinem Buch Zahlentheorie, Mannheim 1994 in den Abschnitten IV 5, IV 6 und IV 9 untersucht.

[3] Dass G. Glöckler die Formeln (1) nicht direkt durch $v = z+x+y$ und $w = z+x$ sondern v durch u und w durch v definiert hat, gründet sich nach Meinung von G.Kowol auf Glöcklers zentrales Anliegen, aus „Keimen“ alles zu entwickeln. Bei diesen Definitionen von u, v, w und t ist übrigens $u^2 + v^2 + w^2 = (u + w)^2$ äquivalent mit $v^2 = 2uw$.

$$z = 4^2 + 5^2 = 41$$
$$z^2 = 40^2 + 9^2 = 41^2$$
$$u^2 + v^2 + w^2 = 50^2 + 90^2 + 81^2 = 131^2 = t^2.$$

Damit haben wir aus einer einfachen Quadratsumme ein primitives pythagoräisches Quadrupel hervorgehen lassen. das letztere ist aber nur ein Ausschnitt aus einem viel umfassenderen Zusammenhang, dem wir uns im folgenden zuwenden wollen.

2 Ein Wechselverhältnis zwischen pyth. Tripeln und bestimmten pyth. Quadrupeln

Es sei vorweg schon das Folgende gesagt: Aus jedem pyth. Tripel lassen sich im allgemeinen vier pyth. Quadrupel eines besonderen Typus herleiten. Diese vier Quadrupel bestimmen dann wieder ihrerseits jeweils ein pyth. Zahlentripel, aus dem dann wieder jeweils vier Quadrupel hervorgehen usw. Den Beweis für diese Tatsache kann man dem folgenden Prozess entnehmen.

Gegeben sei ein primitives pyth. Zahlentripel in der Form $x^2 + y^2 = z^2$. Dann lassen sich die Basiswerte der vier Quadrupel $u_m^2 + v_m^2 + w_m^2 = t_m^2$, $(m = 1, 2, 3, 4)$ auf die folgende Art ermitteln:

m	u_m	v_m	w_m	$t_m = u_m + w_m$
1	$z+y$	$z+x+y$	$z+x$	$2z+x+y$
2	$z+y$	$z-x+y$	$z-x$	$2z-x+y$
3	$z-y$	$z+x-y$	$z+x$	$2z+x-y$
4	$z-y$	$z-x-y$	$z-x$	$2z-x-y$

$40^2 + 9^2 = 41^2$			
50	90	81	131
50	10	1	51
32	72	81	113
32	-8	1	33

Tabelle 1: Formeln II

Daraus ergeben sich die vier pyth. Tripel $x_m^2 + y_m^2 = z_m^2$ $(m = 1, 2, 3, 4)$ für das jeweils entsprechende m:

m	$x_m = u_m + v_m$	$y_m = v_m + w_m$	$z_m = u_m + v_m + w_m$
1	$2z+x+2y$	$2z+2x+y$	$3z+2x+2y$
2	$2z-x+2y$	$2z-2x+y$	$3z-2x+2y$
3	$2z+x-2y$	$2z+2x-y$	$3z+2x-2y$
4	$2z-x-2y$	$2z-2x-y$	$3z-2x-2y$

x_m	y_m	z_m
140	171	221
60	11	61
104	153	185
24	-7	25

Tabelle 2: Formeln III

Leicht zu erkennen ist die Tatsache, dass aus den jeweils ersten Zeilen der beiden Tabellen die übrigen drei Zeilen durch entsprechende Vertauschung der Vorzeichen hervorgehen. Auch ist leicht einzusehen, dass unter Voraussetzung teilerfremder x und y alle Quadrupel und Tripel primitiv sein müssen.

$z_m = u_m + v_m + w_m$ bedeutet, dass sich diese Summe immer als Summe zweier Quadratzahlen darstellen lässt (vgl. auch die Formel (3)).[4]

Der eingangs beschriebene Prozess führt mittels der Formeln II und III für ein bestimmtes m zu einer alternierenden Folge von pythagoräischen Tripeln und Quadrupeln. Als Beispiel wählen wir die Darstellung des Ausgangstripel

[4] Auch hier ist $(u+v)^2 + (v+w)^2 = (u+v+w)^2$ äquivalent mit $v^2 = 2uw$ (vgl. Fußnote 3)

$$x = 60,\ y = 91,\ z = 109.$$

Dabei sei $m = 3$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\uparrow & 168^2 & + & 775^2 & = & 793^2 & \uparrow \\
18^2 & + & 150^2 & + & 625^2 & = & 643^2 \\
 & 132^2 & + & 475^2 & = & 493^2 & \\
18^2 & + & 114^2 & + & 361^2 & = & 379^2 \\
 & 96^2 & + & 247^2 & = & 265^2 & \\
18^2 & + & 78^2 & + & 169^2 & = & 187^2 \\
\uparrow & 60^2 & + & 91^2 & = & 109^2 & \uparrow
\end{array}$$

Kommentar (P.Baum): *Fasst man die Tripel* (x, y, z) *und* (u, v, w) *als Vektoren auf, so kann man die Formeln in Matritzenform darstellen und erhält aus Tabelle 1 vier Matritzen* Q_m*,* $m = 1, 2, 3, 4$ *mit*

$$\begin{pmatrix} u_m \\ v_m \\ w_m \end{pmatrix} = Q_m \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

und aus Tabelle 2 vier Matritzen T_m *mit*

$$\begin{pmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{pmatrix} = T_m \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

und es ist

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Q_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Q_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und wegen $\begin{pmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_m \\ v_m \\ w_m \end{pmatrix}$ *erhält man* $T_m = T \cdot Q_m$ *mit* $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

und schließlich

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad T_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad T_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad T_4 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Vertauscht man in T_1 *die beiden ersten Zeilen, was lediglich die Vertauschung der beiden Katheten bedeutet, erhält man die in der Literatur*[5] *angegebene Matrix zur Erzeugung aller primitiven pythagoreischen Tripel aus* $(3, 4, 5)$.

3 Fundamentalquadrupel als Glieder einer alternierenden Folge

Aus den vorangehenden Betrachtungen folgt zunächst, dass aus jedem primitiven pyth. Zahlentripel pyth. Zahlenquadrupel hervorgehen. Es gehen aber nicht umgekehrt aus jedem pyth. Zahlenquadrupel pyth. Zahlentripel hervor. Dies zeigt schon ein einfaches Beispiel: $2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$.

[5] Gollnick / Scheid / Zöllner: Rekursive Erzeugung der primitiven pythagoreischen Tripel, Math. Semesterber. (1992) 39: 85-88, und Harald Scheid: Zahlentheorie, 2. Aufl. Mannheim 1994 S.226

Wir wollen primitive pyth. Zahlenquadrupel, aus denen gemäß den Gleichungen III in Tabelle 2 pyth. Zahlentripel hervorgehen, Fundamentalquadrupel nennen. Ihre Eigenschaften lassen sich folgendermaßen beschreiben:

Es sei

$$\begin{aligned} u_m &= u_{n\nu} = 2\nu^2 \\ v_m &= v_{n\nu} = 2\nu\,(2n-1) \\ w_m &= w_{n\nu} = (2n-1)^2 \\ t_m &= t_{n\nu} = 2\nu^2 + (2n-1)^2 \end{aligned} \tag{2}$$

Dann nämlich ist entsprechend den Gleichungen III

$$\begin{aligned} x_m &= x_{n\nu} = u_{n\nu} + v_{n\nu} = 2\nu^2 + 2\nu\,(2n-1) = 2\nu\,(\nu + 2n - 1) \\ y_m &= y_{n\nu} = v_{n\nu} + w_{n\nu} = 2\nu\,(2n-1) + (2n-1)^2 = (2n-1)\,(2n+\nu-1) \\ z_m &= z_{n\nu} = u_{n\nu} + v_{n\nu} + w_{n\nu} = \nu^2 + (2n+\nu-1)^2 \end{aligned} \tag{3}$$

ein pythagoräisches Tripel.

Kommentar (P.Baum): *Neben der Formel* (2) *steht im Manuskript folgende wohl nachträglich eingefügte Notiz:*

n, ν beliebig, d.h. man setzt $q = \nu$, $p = 2n - \nu - 1$
$\Rightarrow x = 2q \cdot p = 2\nu\,(2n - \nu - 1)$
$y = (2n-1)\,(2\nu - 2n + 1) = q^2 - p^2$
$z = \ldots \Rightarrow u_{n,\nu}, v_{n,\nu}, w_{n,\nu}, t_{n,\nu} \Rightarrow$ (3)

Damit greift Glöckler hier auf die ein primitives pyth. Tripel erzeugenden Formeln $x_m = 2q \cdot p$, $y_m = q^2 - p^2$, $z_m = q^2 + p^2$ *zurück, wobei* $ggT\,(q,p) = 1$ *und* q *und* p *nicht beide ungerade sein dürfen. Letzteres ist für* $p + q = 2n - 1$ *der Fall, vermutlich setzt daher Glöckler* $p = 2n - q - 1$, *mit* $q = \nu$ *also* $p = 2n - \nu - 1$.

Die Formeln (2) *kann man folgendermaßen einsehen: Damit nämlich das Quadrupel* u, v, w, t *mit* $t = u + w$ *und* $u^2 + v^2 + w^2 = (u+w)^2$ *ein Fundamentalquadrupel ist und das pyth. Tripel* $x = u + v$, $y = v + w$ *und* $z = u + v + w$ *erzeugt, müssen mit zwei Erzeugenden* r *und* s *die Gleichungen* $u + v = 2rs$, $v + w = r^2 - s^2$ *und* $u + v + w = r^2 + s^2$ *erfüllt sein. Aus den beiden letzten Gleichungen folgt* $u = 2s^2$, *mit der ersten Gleichung folgt dann* $v = 2s\,(r - s)$ *und schließlich* $w = (r-s)^2$. *Nun kann man noch vereinfachend* $r - s = p$ *setzen und hat dann für beliebige Paare* (p, s) *jeweils ein Fundamentalquadrupel* $u = 2s^2$, $v = 2s \cdot p$, $w = p^2$ *mit* $v^2 = 2u \cdot w$ *und daher* $(u+v)^2 + (v+w)^2 = (u+v+w)^2$ *(vgl. Fußnote* (3)*). Das so gewonnene Tripel*

$$\begin{aligned} x &= 2s\,(s+p) \\ y &= p\,(2s+p) \\ z &= s^2 + (s+p)^2 \end{aligned}$$

ist genau dann primitiv, wenn p *ungerade ist und* s *und* p *teilerfremd sind. Mit* $p = 2n - 1$ *folgt* *dann*

$$u = 2s^2$$
$$v = 2s\,(2n-1)$$
$$w = (2n-1)^2$$

und dies sind genau die Formeln (2)*, wenn man noch* $s = \nu$ *setzt. Der Nachweis durch die Formeln* (3) *erübrigt sich dann.*
Albrecht Häberlein bemerkt:

> *In Glöcklers Dokument „Das Spektrum erjenigen pythagoräischen Zahlenquadrupel, aus denen pythagoräische Zahlentripel hervorgehen" sind Folgen solcher Quadrupel dargestellt, die aus den Gleichungen* (2) *hervorgehen, wenn man* $\mu := 2n-1$ *setzt. Dass dabei gelegentlich auch imprimitive Quadrupel entstehen, liegt daran, dass die Teilerfremdheit von p und q (siehe Fußnote 1) nicht in die Umformung mit eingeflossen ist.*

Mit den Gleichungen (2) und (3) haben wir zweierlei erreicht:

1. Fundamentalquadrupel sind in gleicher Weise wie pyth. Zahlentripel Basisglieder einer alternierenden Folge.
2. Die Gesamtheit aller pythagoräischer Tripel und Fundamentalquadrupel kann durch eine jeweils zweiparametrige Darstellung erfaßt werden. Die Tabellen (1) und (2) sind ein anfänglicher Ausschnitt aus dem Spektrum dieser Darstellungen.

4 Zahlenphänomene im Bereich alternierender Folgen

Im Prinzip könnte man sich zufrieden geben mit dem bisher Behandelten. Untersucht man aber die verschiedenen möglichen alternierenden Folgen, etwa ausgehend von einem konkreten primitiven pyth. Zahlentripel, so stößt man auf bemerkenswerte individuelle Phänomene. Bei der folgenden Untersuchung wählen wir als Ausgangstripel
$x = 12$, $y = 35$, $z = 37$.

Dabei fassen wir noch das Folgende in Auge:

1. Die Folgen können nach vorwärts und nach rückwärts verfolgt werden. Das letztere führt dann auch zu negativen Basiswerten. Außerdem geht dann die Folge durch eine Art Nullpunkt hindurch. Dieser Nullpunkt manifestiert sich durch ein pyth. Tripel mit kleinstem Summenwert. Dabei können die Basiszahlen durchaus negative Werte annehmen.
2. Von Interesse sind auch die Summen $y_\mu + x_\mu$ bzw. die Differenzen $y_\mu - x_\mu$ der in der alternierenden Folge auftretenden pyth. Tripel.[6]

Entsprechend den Gleichungen (1) und (2) ergeben sich nun aus unserem Ausgangstripel $(12, 35, 37)$ für $m = 1, 2, 3, 4$ vier Folgen, die wir nach vorwärts und rückwärts verfolgen werden:

Unmittelbar erkennbare Invarianten in Tab.3: $|y_\mu - x_\mu| = 23$ für alle μ

Unmittelbar erkennbare Invarianten in Tab.4: $y_{\mu+1} - x_{\mu+1} = -\left(y_\mu + x_\mu\right)$ für alle μ

Unmittelbar erkennbare Invarianten in Tab.5: $y_{\mu+1} - x_{\mu+1} = y_\mu + x_\mu$ für alle μ

[6] Im Manuskript verwendet G. Göckler hier den Index m anstatt μ, meint aber offenbar nicht das $m = 1, 2, 3, 4$, sondern die Zeilen in den folgenden Tabellen, so wie er es in Tabelle 7 notiert hat.

y - x	u = z+y	x^2	v = z+x+y	y^2	w = z+x	z^2	t = u+w	y + x
23	$\uparrow$	832^2	$+$	855^2	$=$	1193^2	$\uparrow$	$7 \cdot 241$
	338^2	$+$	494^2	$+$	361^2	$=$	699^2	
-23		156^2	$+$	133^2	$=$	205^2		17^2
	72^2	$+$	84^2	$+$	49^2	$=$	121^2	
23		12^2	$+$	35^2	$=$	37^2		47
	2^2	$+$	10^2	$+$	25^2	$=$	27^2	
-23		8^2	$+$	$(-15)^2$	$=$	17^2		-7
	32^2	$+$	$(-24)^2$	$+$	9^2	$=$	81^2	
23		$(-56)^2$	$+$	$(-33)^2$	$=$	65^2		-89
	98^2	$+$	$(-154)^2$	$+$	121^2	$=$	219^2	
-23		$(-252)^2$	$+$	$(-275)^2$	$=$	373^2		$17 \cdot 38$
			$\downarrow$		$\downarrow$			

Tabelle 3: Alternierende Folgen von Tripeln und Quadrupel mit $m = 1$

y - x	u = z+y	x^2	v = z-x+y	y^2	w = z-x	z^2	t = u+w	y + x
	512^2	$+$	160^2	$+$	25^2	$=$	537^2	
$7 \cdot 31$		352^2	$+$	135^2	$=$	377^2		487
	242^2	$+$	110^2	$+$	25^2	$=$	267^2	
-47		132^2	$+$	85^2	$=$	157^2		$7 \cdot 31$
	72^2	$+$	60^2	$+$	25^2	$=$	97^2	
23		12^2	$+$	35^2	$=$	37^2		47
	2^2	$+$	10^2	$+$	25^2	$=$	27^2	
-7		$(-8)^2$	$+$	$(-15)^2$	$=$	17^2		-23
	32^2	$+$	$(-40)^2$	$+$	25^2	$=$	57^2	
-137		72^2	$+$	$(-65)^2$	$=$	97^2		7
	162^2	$+$	$(-90)^2$	$+$	25^2	$=$	187^2	
-367	$\downarrow$	252^2	$+$	$(-115)^2$	$=$	277^2	$\downarrow$	137

Tabelle 4: Alternierende Folgen von Tripeln und Quadrupel mit $m = 2$

y - x	u = z-y	x^2	v = z-y-x	y^2	w = z-x	z^2	t = u+w	y + x
23		12^2	$+$	35^2	$=$	37^2		47
	2^2	$+$	10^2	$+$	25^2	$=$	27^2	
23		$(-8)^2$	$+$	15^2	$=$	17^2		7
	2^2	$+$	$(-10)^2$	$+$	25^2	$=$	27^2	
23		12^2	$+$	35^2	$=$	37^2		47
	2^2	$+$	10^2	$+$	25^2	$=$	27^2	
23		$(-8)^2$	$+$	15^2	$=$	17^2		7
	2^2	$+$	$(-10)^2$	$+$	25^2	$=$	27^2	
23		12^2	$+$	35^2	$=$	37^2		47

Tabelle 6: Alternierende Folgen von Tripeln und Quadrupel mit $m = 4$

y - x	u = z-y	x^2	v = z+x-y	y^2	w = z+x	z^2	t = u+w	y+x
	2^2	$+$	22^2	$+$	121^2	$=$	123^2	
49		20^2	$+$	99^2	$=$	101^2		$7 \cdot 17$
	2^2	$+$	18^2	$+$	81^2	$=$	83^2	
47		16^2	$+$	63^2	$=$	65^2		79
	2^2	$+$	14^2	$+$	49^2	$=$	51^2	
23		12^2	$+$	35^2	$=$	37^2		47
	2^2	$+$	10^2	$+$	25^2	$=$	27^2	
7		8^2	$+$	15^2	$=$	17^2		23
	2^2	$+$	6^2	$+$	9^2	$=$	11^2	
-1		4^2	$+$	3^2	$=$	5^2		7
	2^2	$+$	2^2	$+$	1^2	$=$	3^2	
-1		0^2	$+$	$(-1)^2$	$=$	1^2		-1
	2^2	$+$	$(-2)^2$	$+$	1^2	$=$	3^2	
7		$(-4)^2$	$+$	3^2	$=$	5^2		-1
	2^2	$+$	$(-6)^2$	$+$	9^2	$=$	11^2	
23		$(-8)^2$	$+$	15^2	$=$	17^2		7

Tabelle 5: Alternierende Folgen von Tripeln und Quadrupel mit $m = 3$

In Tabelle 6 handelt es sich um eine zyklische Folge.

Kommentar (A. Häberlein): *Zur Invariante in Tabelle 3: Mit den Bezeichnungen von P. Baum gilt* $\begin{pmatrix} x_{\mu+1} \\ y_{\mu+1} \\ z_{\mu+1} \end{pmatrix} = T_1 \cdot \begin{pmatrix} x_\mu \\ y_\mu \\ z_\mu \end{pmatrix}$ *mit* $T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, *also*

$$y_{\mu+1} = 2x_\mu + y_\mu + 2z_\mu$$
$$x_{\mu+1} = x_\mu + 2y_\mu + 2z_\mu$$

sodass $y_{\mu+1} - x_{\mu+1} = x_\mu - y_\mu$ *und* $|y_{\mu+1} - x_{\mu+1}| = \ldots = |35 - 12| = 23.$

Zur Invariante in Tabelle 4: Mit $T_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ *folgt*

$$y_{\mu+1} = -2x_\mu + y_\mu + 2z_\mu$$
$$x_{\mu+1} = -x_\mu + 2y_\mu + 2z_\mu$$

sodass $y_{\mu+1} - x_{\mu+1} = -(x_\mu + y_\mu).$

Zur Invariante in Tabelle 5: Mit $T_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ *folgt*

$$y_{\mu+1} = 2x_\mu - y_\mu + 2z_\mu$$
$$x_{\mu+1} = x_\mu - 2y_\mu + 2z_\mu$$

sodass $y_{\mu+1} - x_{\mu+1} = x_\mu + y_\mu$

Zur Folge in Tabelle 6: Für die Matrix $T_4 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ *gilt* $T_4^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *sodass*

$$\begin{aligned} x_{\mu+2} &= x_\mu \\ y_{\mu+2} &= y_\mu \\ z_{\mu+2} &= z_\mu \end{aligned}$$

5 Invarianten von alternierenden Folgen

Invarianten erfassen im Bereich von Veränderungen das Gleichbleibende. Sie sind so gesehen immer ein Merkmal eines übergeordneten Ganzen. Genau dies charakterisiert auch unsere alternierenden Folgen. Zunächst wollen wir die Invarianten der zuvor an Beispielen besprochenen Folgen ins Auge fassen. Die offensichtlich direkt erkennbaren Invarianten wurden dort schon angegeben. Weniger offensichtlich sind dabei gewisse Determinanten als Invarianten. Dabei sind bemerkenswerter Weise die direkt erkennbaren Invarianten Faktoren dieser Determinanten.

Um den konkreten Bezug dieser Determinanten zu den entsprechenden alternierenden Folgen herstellen zu könne, wählen wir für diese eine vereinfachte Darstellung. Diese sieht wie folgt aus:

$$\begin{array}{ccccccccc} & x_{\mu+1}^2 & + & y_{\mu+1}^2 & = & z_{\mu+1}^2 & \\ u_{\mu+1}^2 & + & v_{\mu+1}^2 & + & w_{\mu+1}^2 & = & t_{\mu+1}^2 \\ & x_{\mu}^2 & + & y_{\mu}^2 & = & z_{\mu}^2 & \\ u_{\mu}^2 & + & v_{\mu}^2 & + & w_{\mu}^2 & = & t_{\mu}^2 \\ & x_{\mu-1}^2 & + & y_{\mu-1}^2 & = & z_{\mu-1}^2 & \\ u_{\mu-1}^2 & + & v_{\mu-1}^2 & + & w_{\mu-1}^2 & = & t_{\mu-1}^2 \end{array}$$

Tabelle 7: Determinanten

$$\begin{vmatrix} x_{\mu+1} & y_{\mu+1} & z_{\mu+1} \\ x_\mu & y_\mu & z_\mu \\ x_{\mu-1} & y_{\mu-1} & z_{\mu-1} \end{vmatrix} = |y_\mu| \qquad \begin{vmatrix} u_{\mu+1} & v_{\mu+1} & w_{\mu+1} \\ u_\mu & v_\mu & w_\mu \\ u_{\mu-1} & v_{\mu-1} & w_{\mu-1} \end{vmatrix} = |v_\mu|$$

Dann ist ganz allgemein

$$|y_\mu| = |v_\mu|$$

und zwar ist für $m = 1$

$$|y_\mu| = |v_\mu| = [2\,(y_\mu - x_\mu)]^3 \tag{4}$$

Beispiele (immer bezogen auf die vorangehenden alternierenden Folgen):

$$\begin{aligned} |133| &= |84| = [2\,(133 - 156)]^3 = -\,[2 \cdot 23]^3 \\ |133| &= -\,|35| = -\,[2\,(3 - 12)]^3 = -\,[2 \cdot 23]^3 \end{aligned}$$

Für $m = 2$ ist

$$\begin{aligned} |y_\mu| = |v_\mu| &= [2\,(z_\mu - x_\mu)]^3 \\ &= [2\,(2n - 1)]^3 \\ &= const \end{aligned} \tag{5}$$

für alle μ weil $n = const.$

Beispiele:

$$|85| = |110| = \left[2 \cdot 5^2\right]^3 = 50^3$$
$$|85| = |-15| = \left[2 \cdot 5^2\right]^3 = 50^3$$

Für $m = 3$ ist

$$\begin{aligned} |y_\mu| = |v_\mu| &= \left[2\left(z_\mu - y_\mu\right)\right]^3 \\ &= -\left(4\nu\right)^3 \\ &= const \end{aligned} \tag{6}$$

für alle μ weil $\nu = const.$

Beispiel:

$$|-1| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \\ -4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = |-2| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -6 & 9 \end{vmatrix}$$
$$= -\left(4 \cdot 1\right)^3 = -4^3$$

Kommentar (A. Häberlein): *Will man für $m = 1$ die Determinante $|y_\mu|$ ausrechnen, so hat man wegen $T_1^2 = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 12 \\ 8 & 9 & 12 \\ 12 & 12 & 17 \end{pmatrix}$ mit den Abkürzungen $a := x_{\mu-1}$, $b := y_{\mu-1}$, $c := z_{\mu-1}$ die Determinante folgender Matrix zu berechnen: $M_1 = \begin{pmatrix} 9a+8b+12c & 8a+9b+12c & 12a+12b+17c \\ a+2b+2c & 2a+b+2c & 2a+2b+3c \\ a & b & c \end{pmatrix}$. Man erhält zuerst $|y_\mu| = det\left(M_1\right) = -8a^3 - 8a^2b + 8ab^2 + 8b^3 + 16c^2\left(a-b\right)$. Ersetzt man nun c^2 durch $a^2 + b^2$, so geht der Term über in $8\left(a-b\right)^3$, also in $\left[2\left(x_{\mu-1} - y_{\mu-1}\right)^3\right]$, sodass $|y_\mu| = 8\left(a-b\right)^3 = \left[2\left(x_{\mu-1} - y_{\mu-1}\right)^3\right] = \left[2\left(x_\mu - y_\mu\right)^3\right]$ (siehe vorigen Kommentar zur Invariante in Tabelle 3).*

Die entsprechenden Rechnungen für $m = 2$ und $m = 3$ benötigen erstaunlicherweise diese „Pythagoras-Eigenschaft“ nicht, die Determinante $-|y_\mu|$ und $|v_\mu|$ stimmt also auch für solche Folgen überein, die von einem beliebigen Tripel starten.

Bei der Determinante $|v_\mu|$ lässt sich Rechenarbeit sparen, wenn man verwendet, dass $\begin{pmatrix} x_\mu & y_\mu & z_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_\mu & v_\mu & w_\mu \end{pmatrix} \cdot T^t$, dabei muss also $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ transponiert und von rechts multipliziert werden, wenn die Vektoren zeilenweise notiert sind. Ist dann (y_μ) die zu $|y_\mu|$ gehörige Matrix, entsprechend für (v_μ) die zu $|v_\mu|$ gehörige, dann gilt $(y_\mu) = (v_\mu) \cdot T^t$.

Beispiel: $\begin{pmatrix} 156 & 133 & 205 \\ 12 & 35 & 37 \\ 8 & -15 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72 & 84 & 49 \\ 2 & 10 & 25 \\ 32 & -24 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. *Mit $det\left(T^t\right) = 1$ erhält man dann die Formel* (4).

6 Eine Viergliederung im Bereich der Primzahlen und ihre Beziehung zu alternierenden Folgen

Dass wir uns in diesem Zusammenhang mit Primzahlen beschäftigen wollen, hat seinen Grund in dem Charakter gewisser Terme, die bei alternierenden Folgen auftreten. Diese Terme sind die folgenden:

$$z_{n\nu} = \nu^2 + (2n + \nu - 1)^2 \tag{7}$$

$$t_{n\nu} = 2\nu^2 + (2n - 1)^2 \tag{8}$$

$$\begin{aligned} s_{n\nu} &= x_{n\nu} + y_{n\nu} \\ &= 2\nu\,(\nu + 2n - 1) + (2n - 1)\,(2\nu + 2n - 1) \\ &= (2\nu + 2n - 1)^2 - 2\nu^2 \end{aligned} \tag{9}$$

In denTabellen (3)a, (3)b und (3)c sind diese Terme als Spektren aufgelistet.[7] Besonders bemerkenswert sind dort die jeweils zugehörigen Invarianten in Form von Determinanten.

n	$8n-3$	$8n-1$	$8n+1$	$8n+3$		n	$8n-3$	$8n-1$	$8n+1$	$8n+3$
0	-	-	-	3		13	101	103	-	107
1	5	7	-	11		14	109	-	113	-
2	13	-	17	19		15	-	-	-	-
3	-	23	-	-		16	-	127	-	131
4	29	31	-	-		17	-	-	137	139
5	37	-	41	43		18	-	-	-	–
6	-	47	-	-		19	149	151	-	-
7	53	-	-	59		20	157	-	-	163
8	61	-	-	67		21	-	167	-	-
9	-	71	73	-		22	173	-	-	179
10	-	79	-	83		23	181	-	-	-
11	-	-	89	-		24	-	191	193	-
12	-	-	97	-		25	197	199	-	-

Tabelle 9: Primzahlen

Zuvor wollen wir uns aber erst einer möglichen Viergliederung im Bereich der Primzahlen vergewissern. Die Gesamtheit der ungeraden Primzahlen läßt sich nämlich in 4 sich gegenseitig ausschließende Primzahlbereiche gliedern. Die Bildungsgesetze dieser 4 Typen sind die folgenden:

$$a_n = 8n - 3 \qquad b_n = 8n - 1 \qquad c_n = 8n + 1 \qquad d_n = 8n + 3$$

Gewöhnlich fasst man die Typen a_n und c_n in dem Typus $e_n = 4n + 1$ zusammen. Der Grund der hier getroffenen Unterscheidung liegt in den folgenden Ausführungen. Eine anfängliche Tabelle (siehe Tabelle 9) kann uns den Charakter dieser spezifischen Primzahlen näherbringen.

Vergleicht man nun diese Primzahltypen mit den in den eingangs eingeführten Termen auftretenden wesentlich zu konstituierenden Primzahlen (dort fett gedruckt), so erkennt man Folgendes:

[7] Diese Tabellen fehlen in der Handschrift.

Für $z_{n\nu}$ sind die Primzahlen der Typen $8n-3$ und $8n+1$ wesentlich konstituierend.
Für $t_{n\nu}$ sind es die Primzahlen der Typen $8n+3$ und $8n+1$.
Für $s_{n\nu}$ sind es die Primzahlen der Typen $8n-1$ und $8n+1$.

Die Primzahlen der Form $8n+1$ wie 17, 41, 73, 89 etc. treten in allen 3 Spektren als konstituierende Primzahlen auf. Wir wollen sie deshalb universelle Primzahlen nennen. Die jeweils nicht konstituierenden Primzahlen treten zwar auch in den Spektren auf. Sie sind aber in dem jeweiligen Spektrum „begleitende Fremdlinge“ und treten stets nur in geraden Potenzen auf (in den Spektren jeweils klein geschrieben).

Bemerkenswert ist in diesem Zusammenhang, dass die ersten 3 ungeraden Primzahlen 3, 5 und 7 bereits die 3 nicht universellen Primzahltypen repräsentieren.

Um den ganzen Zusammenhang, in dem diese Betrachtung steht, noch einmal vor Augen zu haben, seien die ersten 12 Terme mit reinen Primzahlen samt der zugehörigen Quadratsummen der Reihe nach aufgelistet.

$x_{n\nu}^2+y_{n\nu}^2=z_{n\nu}^2$	$s_{n\nu}$	$u_{n\nu}^2+v_{n\nu}^2+w_{n\nu}^2=t_{n\nu}^2$	$x_{n\nu}^2+y_{n\nu}^2=z_{n\nu}^2$	$s_{n\nu}$
$4^2+3^2=5^2$	7	$2^2+2^2+1^2=3^2$	$4^2+3^2=5^2$	7
$12^2+5^2=13^2$	17	$2^2+6^2+9^2=11^2$	$12^2+5^2=13^2$	17
$8^2+15^2=17^2$	23	$8^2+12^2+9^2=17^2$	$8^2+15^2=17^2$	23
$20^2+21^2=29^2$	41	$18^2+6^2+1^2=19^2$	$24^2+7^2=25^2$	31
$12^2+35^2=37^2$	47	$32^2+24^2+9^2=41^2$	$20^2+21^2=29^2$	41
$40^2+9^2=41^2$	49	$18^2+30^2+25^2=43^2$	$12^2+35^2=37^2$	47
$28^2+45^2=53^2$	73	$50^2+30^2+9^2=59^2$	$60^2+11^2=61^2$	71
$60^2+11^2=61^2$	71	$18^2+42^2+49^2=67^2$	$28^2+45^2=53^2$	73
$48^2+55^2=73^2$	103	$72^2+12^2+1^2=73^2$	$16^2+63^2=65^2$	79
$80^2+39^2=89^2$	119	$2^2+18^2+81^2=88^2$	$56^2+33^2=65^2$	89
$72^2+65^2=97^2$	137	$8^2+36^2+81^2=89^2$	$84^2+13^2=85^2$	97
$20^2+99^2=101^2$	119	$72^2+60^2+25^2=97^2$	$48^2+55^2=73^2$	103

Kommentar (P.Baum): *Die drei Terme $z_{n,\nu}$, $t_{n,\nu}$ und $s_{n,\nu}$ sind alle ungerade und gehören daher zu den ungeraden Restklassen mod 8. Im Einzelnen gilt folgendes:*
Die Hypotenuse $z=x^2+y^2$ eines primitiven Tripels hat immer die Gestalt $z=4k+1$, also entweder $8n+1$ oder $8n-3$. Denn wegen $x=2i$ und $y=2k+1$ ist

$$z = 4i^2+4k^2+4k+1$$
$$z = 4\left(i^2+k^2+k\right)+1$$

Wegen $n\,(n-1)=2q$ und

$$\begin{aligned} t_{n,\nu} &= 2\nu^2+(2n-1)^2 \\ &= 2\nu^2+4n\,(n-1)+1 \\ &= 2\nu^2+8q+1 \end{aligned}$$

ist im Fall $\nu = 2m$ *in der Tat* $t_{n,\nu} = 8k+1$ *und im Fall* $\nu = 2m+1$ *offenbar*

$$\begin{aligned} t_{n,\nu} &= 8m\,(m+1) + 2 + 8q + 1 \\ t_{n,\nu} &= 8k + 3 \end{aligned}$$

Analog folgt mit $s_{n,\nu} = (2\nu + 2n - 1)^2 - 2\nu^2$*, dass* $s_{n,v} \equiv 1$ *mod 8 für* $\nu = 2m$ *und* $s_{n,v} \equiv -1$ *mod 8 für* $\nu = 2m+1$*.*

7 Von der Drei-Einheit der Terme $z_{n\nu}$, $s_{n\nu}$ und $t_{n\nu}$

In den Spektren dieser Terme kommen gewisse Werte mehrfach vor. So im Spektrum für $z_{n\nu}$ die Werte 65, im Spektrum für $s_{n\nu}$ die Werte 119 und im Spektrum für $t_{n\nu}$ die Werte 33. In allen diesen Fällen treten die entsprechenden Werte 2-fach auf. Dies führt zu der Vermutung, die sich dann bestätigt, dass es in all den Fällen, in denen die Terme ein Primpotenzprodukt aus den sie jeweils konstituierenden Primzahlen sind, mehrere „Lösungen“ gibt. Maßgebend für die Anzahl der Lösungen sind dabei die entsprechenden Terme, bzw. deren algebraische Struktur. In den obigen Fällen ist diese Struktur jeweils ein einfaches Primzahlprodukt $p_1 p_2$. Daraus ergeben sich entsprechende Lösungen wie folgt:

$$z_{n\nu} = \nu^2 + (2n + \nu - 1)^2 = 65 = 5 \cdot 13 \tag{10}$$
$$\quad f\ddot{u}r\ \ (n,\nu) = (4,1)\ \ und\ \ (n,\nu) = (2,4)$$
$$s_{n\nu} = (2\nu + 2n - 1)^2 - 2\nu^2 = 119 = 7 \cdot 17 \tag{11}$$
$$\quad f\ddot{u}r\ \ (n,\nu) = (5,1)\ \ und\ \ (n,\nu) = (2,5)$$
$$t_{n\nu} = 2\nu^2 + (2n-1)^2 = 33 = 3 \cdot 11 \tag{12}$$
$$\quad f\ddot{u}r\ \ (n,\nu) = (1,4)\ \ und\ \ (n,\nu) = (3,2)$$

Anmerkung: Die Gleichung (11) ist im Prinzip eine sog. Pell'sche Gleichung, für die es in diesem Fall unbegrenzt viele Lösungen gibt. Bei allen weiteren Lösungen ist aber $n < 0$. Die beiden folgenden Lösungen sind z.B. $(n,\nu) = (-1,11)$ und $(-4,19)$.

Dass die drei Terme zusammengehören drückt sich zunächst in den folgenden beiden Beziehungsgleichungen aus:

$$\begin{aligned} 2z_{n\nu} &= s_{n\nu} + t_{n\nu} \\ z_{n\nu} + t_{n\nu} &= s_{n\nu} + z_{n-\nu,\nu} \end{aligned}$$

und daraus folgt auch

$$2t_{n\nu} = z_{n\nu} + z_{n-\nu,\nu}$$

Dies folgt unmittelbar aus den obigen Gleichungen. Die Drei-Einheit der drei Terme zeigt sich nun in Folgendem: Haben die drei Terme die gleiche algebraische Struktur hinsichtlich ihrer Primpotenzprodukte aus den sie konstituierenden Primzahlen, dann sind Anzahl und Charakter der zugehörigen Lösungen gleich bzw. gleichartig.

Wie dies im einzelnen aussieht, soll an einigen Beispielen gezeigt werden. Zuvor wollen wir aber noch die in Betracht kommenden Beziehungen kurz zusammenstellen:

$$\begin{array}{lll}
z_{n\nu} = \nu^2 + (2n+\nu-1)^2 & \text{mit} & z_{n\nu} = x_{n\nu}^2 + y_{n\nu}^2 \\
s_{n\nu} = (2\nu+2n-1)^2 - 2\nu^2 & \text{mit} & s_{n\nu} = x_{n\nu} + y_{n\nu} \\
t_{n\nu} = 2\nu^2 + (2n-1)^2 & \text{mit} & t_{n\nu}^2 = u_{n\nu}^2 + v_{n\nu}^2 + w_{n\nu}^2 \\
 & & \\
\text{Dabei ist} & & u_{n\nu} = 2\nu^2 \\
x_{n\nu} = 2\nu(\nu+2n-1) & \text{und} & v_{n\nu} = 2\nu(2n-1) \\
y_{n\nu} = (2n-1)(2\nu+2n-1) & & w_{n\nu} = (2n-1)^2
\end{array}$$

Tabelle 10: Zusammenstellung

1. Beispiel: Primzahlstruktur $p_1^2 \cdot p_2$

$z_{n\nu} = 5^2 \cdot 13 = 325$ $\quad$ $s_{n\nu} = 7^2 \cdot 17 = 833$ $\quad$ $t_{n\nu} = 3^2 \cdot 11 = 99$

$$\begin{array}{lll}
325 = 1^2 + 18^2 & 108^2 + 725^2 = 733^2 & 99^2 = 18^2 + 54^2 + 81^2 \; i \\
325 = 6^2 + 17^2 & 368^2 + 465^2 = 593^2 & 99^2 = 50^2 + 70^2 + 49^2 \\
325 = 10^2 + 15^2 \; i & 588^2 + 245^2 = 637^2 & 99^2 = 98^2 + 14^2 + 1^2
\end{array}$$

(jeweils 2 primitive Lösungen und eine imprimitive!)

2. Beispiel: Primzahlstruktur $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$

$z_{n\nu} = 5 \cdot 13 \cdot 17 = 1105$ $\quad$ $s_{n\nu} = 7 \cdot 17 \cdot 23 = 2737$ $\quad$ $t_{n\nu} = 3 \cdot 11 \cdot 17 = 561$

$$\begin{array}{lll}
1105 = 4^2 + 33^2 & 564^2 + 2173^2 = 2245^2 & 561^2 = 32^2 + 184^2 + 529^2 \\
1105 = 9^2 + 32^2 & 1032^2 + 1705^2 = 1993^2 & 561^2 = 200^2 + 380^2 + 361^2 \\
1105 = 12^2 + 31^2 & 1312^2 + 1425^2 = 1937^2 & 561^2 = 392^2 + 364^2 + 169^2 \\
1105 = 23^2 + 24^2 & 2604^2 + 73^2 = 2665^2 & 561^2 = 512^2 + 224^2 + 49^2
\end{array}$$

(jeweils 4 primitive Lösungen)

3. Beispiel: Primzahlstruktur $p_1^2 \cdot p_2^2$

$$\begin{array}{lll}
z_{n\nu} = 5^2 \cdot 13^2 = 65^2 & s_{n\nu} = 7^2 \cdot 17^2 = 119^2 & t_{n\nu} = 3^2 \cdot 11^2 = 33^2 \\
\quad = 4225 & \quad = 14161 & \quad = 1089
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
65^2 = 16^2 + 63^2 & 4444^2 + 9717^2 = 10685^2 & 33^2 = 128^2 + 496^2 + 961^2 \\
65^2 = 25^2 + 60^2 \; i & 7644^2 + 6517^2 = 10045^2 \; i & 33^2 = 648^2 + 756^2 + 441^2 \; i \\
65^2 = 33^2 + 56^2 & 8544^2 + 5617^2 = 10225^2 & 33^2 = 800^2 + 680^2 + 289^2 \\
65^2 = 39^2 + 52^2 \; i & 11560^2 + 2601^2 = 11849^2 \; i & 33^2 = 968^2 + 484^2 + 121^2 \; i
\end{array}$$

(jeweils 2 primitive und 2 imprimitive Lösungen)

Kommentar (P. Baum): Im Nachlass von Georg Glöckler gibt es eine gedruckte Abhandlung mit dem Titel

$n = a^2 + b^2$
Welche natürlichen Zahlen sind durch eine Quadratsumme darstellbar?
herausgegeben von der Mathematisch-Astronomischen Sektion der Freien Hochschule für Geisteswissenschaft am Goetheanum, Dornach (Schweiz). 30. Mai 2000
Skript: Vivian Kilchherr, Basel
Satz und Layout: Michael Bader, Mathematisch-Astronomische Sektion, Donach
Druck: Kurt Peter, Druckerei am Goetheanum, Dornach

in einer korrigierten Version vom 05.06.2000. Ob sie jemals veröffentlicht wurde, ist mir nicht bekannt. In dieser Abhandlung geht Glöckler von einer Tabelle mit den Quadratsummen $a^2 + b^2 = n$ der ersten natürlichen Zahlen $a = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ und $b = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.11$ bis $3^2 + 11^2 = 130$ aus und schreibt:

Ein erster Blick in diese Tabelle vermittelt schon eine Reihe von bemerkenswerten Einsichten, die als solche natürlich allgemein bewiesen werden müssen.
Im Folgenden versuchen wir mit ganz elementaren Mitteln einen Zugang zu den hier obwaltenden Gesetzen zu finden. Die erste Tabelle weist schon auf folgende tatsachen hin:
1. Ist n eine Primzahl, so ist sie eine solche von der Form $p = 1 + 4m$, d.h. sie lässt bei Division durch 4 den Rest 1.
2. Alle Vielfachen von p der Form $2^n \cdot p$ lassen sich als Summe zweier Quadratzahlen darstellen.
3. Alle Zahlen n, die in ihrer kanonischen Darstellung nicht mindestens einen Faktor der Form $p = 1 + 4m$ haben, sind nicht als Quadratsummen darstellbar.

In einer Fußnote verweist Glöckler auf Hardy - Wright: Einführung in die Zahlentheorie (1958 R.Oldenbourg, München: S. 340 ff.) mit dem Satz:

Diese Beweise setzen allerdings einige Grundkenntnisse im Bereich der elementaren Zalentheorie voraus.

Der folgende Satz 52 aus Scholz / SchoeneberG: Einführung in die Zahlentheorie, Sammlung Göschen Bd. 1131 S. 70 gibt den Sachverhalt, den Glöckler, hier mit den Primzahlstrukturen anfänglich untersucht und wahrscheinlich noch weiterführen wollte, umfassend wieder:

Die natürliche Zahl m mit der Primpotenzzerlegung $m = 2^e p_1^{e_1} \cdots p_s^{e_s}$ besitzt keine eigentliche Darstellung $m = x^2 + y^2$, wenn $e \geqq 2$ oder ein $p_i \equiv 3 \bmod 4$ ist. Sie besitzt 2^{s-1} verschiedene eigentliche Darstellungen, wenn $e = 0$ oder $e = 1$ ist und alle $p_i \equiv 1 \bmod 4$ sind.