Zahlenphänomene und Gesetze im Bereich von Quadratsummen

Georg Glöckler*

1 Einführung

Wenn im Folgenden von Quadratsummen die Rede sein wird, dann soll es sich stets um Summen von Quadraten aus natürlichen Zahlen handeln. Solche Quadratsummen können in mannigfaltiger Art zueinander in Beziehung treten, am einfachsten dadurch, dass wir solche Quadratsummen ins Auge fassen, die den gleichen Summenwert haben. Die folgenden Beispiele können einen ersten Überblick geben:

$$
\begin{aligned}
2^2 + 9^2 &= 6^2 + 7^2 && = 85 && (1)\\
7^2 + 24^2 &= 15^2 + 20^2 && = 25^2 && (2)\\
15^2 + 21^2 &= 3^2 + 9^2 + 24^2 && = 666 && (3)\\
2^2 + 9^2 + 28^2 &= 16^2 + 17^2 + 18^2 && = 869 && (4)\\
3^2 + 7^2 + 8^2 &= 4^2 + 5^2 + 9^2 && = 122 && (5)\\
1^2 + 5^2 + 7^2 + 11^2 &= 4^2 + 6^2 + 12^2 && = 14^2 && (6)\\
1^2 + 5^2 + 8^2 + 14^2 &= 4^2 + 7^2 + 10^2 + 11^2 && = 286 && (7)\\
1^2 + 6^2 + 9^2 + 12^2 &= 2^2 + 5^2 + 8^2 + 13^2 && = 262 && (8)\\
&\vdots && \vdots
\end{aligned}
$$

Zunächst erscheint es selbstverständlich, dass man solche Beziehungen aufstellen kann. Unter diesen Beziehungen gibt es aber solche, die unsere Aufmerksamkeit erwecken können. Es sind dies die Beziehungen (3), (5) und (8). Was ist an ihnen bemerkenswert? Wir wählen als Beispiel die Beziehung (8) und entdecken das folgende Zahlenphänomen:

$$
\begin{aligned}
1^2 + 6^2 + 9^2 + 12^2 &= 2^2 + 5^2 + 8^2 + 13^2 && = 262\\
1 + 6 + 9 + 12 &= 2 + 5 + 8 + 13 && = 28
\end{aligned}
$$

*undatierte Handschrift Nr.164, übertragen von Peter Baum

Neben der Gleichheit der Quadratsummen sind auch die Basissummen einander gleich. Algebraisch formuliert liegt also folgender Sachverhalt vor:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + g^2 + h^2 \tag{1}$$

$$a + b + c + d = e + f + g + h \tag{2}$$

Daraus folgt aber auch

$$(a + b + c + d)^2 = (e + f + g + h)^2 \tag{3}$$

und deshalb auch

$$a \cdot b + b \cdot c + c \cdot d + a \cdot d = e \cdot f + f \cdot g + g \cdot h + e \cdot h \tag{4}$$

was durch Ausrechnen sofort folgt. In der Tat gilt für unser obiges Beispiel

$$1 \cdot 6 + 6 \cdot 9 + 9 \cdot 12 + 1 \cdot 12 = 2 \cdot 5 + 5 \cdot 8 + 8 \cdot 13 + 2 \cdot 13 = 180$$

Wenn Quadratsummen in dieser Weise miteinander verknüpft sind, wollen wir für alles Folgende von einer Fundamentalbeziehung (F.B.) sprechen. Damit sind auch die Beziehungen (3) und (5) solche Fundamentalbeziehungen.
Aus (1) und (2) folgt weiter

$$(a + \lambda)^2 + (b + \lambda)^2 + (c + \lambda)^2 + (d + \lambda)^2 = (e + \lambda)^2 + (f + \lambda)^2 + (g + \lambda)^2 + (h + \lambda)^2 \tag{5}$$

und auch

$$(\mu \cdot a + \lambda)^2 + (\mu \cdot b + \lambda)^2 + (\mu \cdot c + \lambda)^2 + (\mu \cdot d + \lambda)^2 = (\mu \cdot e + \lambda)^2 + (\mu \cdot f + \lambda)^2 + (\mu \cdot g + \lambda)^2 + (\mu \cdot h + \lambda)^2 \tag{6}$$

für $\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ und $\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
In unserem Beispiel folgt daraus für $\mu = 2$ und $\lambda = 1$

$$\begin{aligned} 3^2 + 13^2 + 19^2 + 25^2 &= 5^2 + 11^2 + 17^2 + 27^2 && = 1064 \\ 3 + 13 + 19 + 25 &= 5 + 11 + 17 + 27 && = 60 \end{aligned}$$

Bemerkung 1. Aus Quadratsummen, die durch eine Fundamentalbeziehung verknüpft sind, lassen sich ganze Folgen von Fundamentalbeziehungen entwickeln. Jede Fundamentalbeziehung ist wie ein Keim für eine ganze Folge. Die aufeinanderfolgenden Summenwerte bilden eine arithmetische Folge 2. Ordnung. Dieses können wir an unserem Beispiel demonstrieren:

$$\begin{aligned} 1^2 + 6^2 + 9^2 + 12^2 &= 2^2 + 5^2 + 8^2 + 13^2 \\ n^2 + (n + 5)^2 + (n + 8)^2 + (n + 11)^2 &= (n + 1)^2 + (n + 4)^2 + (n + 7)^2 + (n + 12)^2 \\ &= 4n^2 + 48n + 210 \\ &= 2\left(2n^2 + 24n + 205\right) = S_n \end{aligned}$$

Eine kleine Tabelle ist hier aufschlussreich.

n	-3		-2		-1		0		1		2		3		4		5		6
S_n	102		130		166		210		262		322		390		466		550		642
$\triangle$		28		36		44		52		60		68		76		84		90	
$\triangle\triangle$			8		8		8		8		8		8		8		8		

Kommentar (P.B.) *Hier bricht die Darstellung ab. Die Handschrift enthält noch weitere Ansätze, dieses Thema zu formulieren. Glöckler greift auch hier wie in ähnlichen Zusammenhängen den Gedanken eines Keimes auf, aus dem weitere Folgen entstehen.*

Dass die Gleichungen (5)*und* (6) *ebenfalls eine F.B. darstellen, zeigt sich beim Ausmultiplizieren der Klammern. Denn mit $S_Q = a^2+b^2+c^2+d^2$ und $S = a+b+c+d$ haben beide Seiten von* (6) *den Wert $\mu^2 \cdot S_Q + 2\lambda\mu \cdot S + 4\lambda^2$.*

Und da bei einer Folge (Q_n) von Quadrupeln die Summen S_{Qn} stets eine Funktion 2. Grades von n darstellen, müssen ihre Differenzen eine arithmetische Reihe 2. Ordnung bilden.