Wechselseitige Beziehungen zwischen pythagoräischen Tripeln und Quadrupeln

Georg Glöckler*

1 Einführung

Unter den pythagoräischen Zahlenquadrupeln gibt es solche, die in bemerkenswerter Weise zu pythagoräischen Zahlentripeln in Beziehung stehen. Wir gehen dazu von einem Beispiel aus

$$
\begin{aligned}
8^2 + 36^2 + 81^2 &= 89^2 \\
28^2 + 45^2 &= 53^2 \\
8^2 + 20^2 + 25^2 &= 33^2
\end{aligned}
$$

Hier können wir unmittelbar die vermittelnde Beziehung des Tripels zu seinen „benachbarten“ Quadrupeln erkennen. Diese Beziehung stellt sich zahlenmäßig folgendermaßen dar:

$$
\begin{gathered}
8 + 20 = 36 - 8 = 28 \\
20 + 25 = 81 - 36 = 45 \\
8 + 20 + 25 = 8 - 36 + 81 = 53
\end{gathered}
$$

Es läßt sich nun zeigen, dass jedem pythagoräischen Zahlentripel immer zwei pythagoräische Zahlenquadrupel in der oben beschriebenen Weise zugeordnet sind. Eine erste Übersicht kann die folgende Tabelle vermitteln.[1]

*Undatiertes Manuskript Nr. 189, übertragen von Peter Baum 24.11.2019

[1] Diese Tabelle fehlt im Manuskript. Möglicherweise handelt es sich um die Datei „Wechselseitige Beziehungen pyth. Tripel und Quadrupel_5.5.03.doc“ vom 02.06.2003, die ich hier einfüge (P.B.)

$$\begin{array}{rrr}
1^2+6^2+18^2=19^2 & 2^2+14^2+49^2=51^2 & 75^2+308^2=317^2 \\
5^2+12^2=13^2 & 12^2+35^2=37^2 & 9^2+66^2+242^2=251^2 \\
1^2+4^2+8^2=9^2 & 2^2+10^2+25^2=27^2 & 57^2+176^2=185^2 \\
 & 8^2+15^2=17^2 & 9^2+48^2+128^2=137^2 \\
 & 2^2+6^2+9^2=11^2 & 39^2+80^2=89^2 \\
 & & 9^2+30^2+50^2=59^2 \\
 & & 21^2+20^2=29^2 \\
 & & 9^2+12^2+8^2=17^2 \\
 & & 3^2+4^2=5^2
\end{array}$$

2 Algebraische Fassung und zugehörige Beweise

Jedes (im allgemeinen primitive) pythagoräische Zahlentripel kann durch den folgenden Ansatz erfasst werden:

$$\begin{aligned}
x &= 2\nu\,(2n+\nu-1) \\
y &= (2n-1)\,(2n+2\nu-1) \\
z &= \nu^2+(2n+\nu-1)^2
\end{aligned} \tag{1}$$

für $n=1,2,\ldots$ und $\nu=1,2,\ldots$

Für alles Folgende empfiehlt es sich, die pythagoräischen Tripel für $n=1$ gesondert zu betrachten. Es ist dann[2]

$$\begin{array}{cc}
x = 2\nu+1 & x = 2\nu\,(2n+\nu-1) \\
y = 2\nu\,(\nu+1) & y = (2n-1)\,(2n+2\nu-1) \\
z = \nu^2+(\nu+1)^2 & z = \nu^2+(2n+\nu-1)^2 \\
\textit{für } n=1 \textit{ und } \nu=1,2,\ldots & \textit{für } n=2,3,\ldots \textit{ und } \nu=1,2,\ldots
\end{array}$$

dabei gilt stets $x^2+y^2=z^2$.

Die vermittelnde Beziehung eines Tripels zu seinen benachbarten Tripeln[3] ist dann durch folgenden Ansatz gegeben:

$$\begin{aligned}
u_2^2+v_2^2+w_2^2 &= t_2^2 \\
x^2+y^2 &= z^2 \\
u_1^2+v_1^2+w_1^2 &= t_1^2
\end{aligned} \tag{2}$$

[2] Aus $x=2\nu\,(2n+\nu-1)$ und $y=(2n-1)\,(2n+2\nu-1)$ folgt für $n=1$ eigentlich $x=2\nu\,(\nu+1)$ und $y=2\nu+1$. Glöckler hat aber die Bezeichnungen hier vertauscht, damit im Folgenden stets $z-y=u$ ist.

[3] sollte wohl Quadrupel heißen (P.B)

Stets gelten dann in Bezug auf (2) die Beziehungen

$$
\begin{aligned}
x &= u_1 + v_1 = v_2 - u_2 \\
y &= v_1 + w_1 = w_2 - v_2 \\
z &= u_1 + v_1 + w_1 = w_2 - v_2 + u_2
\end{aligned}
\tag{3}
$$

1. für $n = 1$ und $\nu = 1, 2, 3$ ist

$$
\begin{aligned}
x &= (2\nu + 1) & u_1 &= 1 & u_2 &= 1 \\
y &= 2\nu\,(\nu + 1) & v_1 &= 2\nu & v_2 &= 2\,(\nu + 1) \\
z &= \nu^2 + (\nu + 1)^2 & w_1 &= 2\nu^2 & w_2 &= 2\,(\nu + 1)^2 \\
& & t_1 &= 2\nu^2 + 1 & t_2 &= 2\,(\nu + 1)^2 + 1
\end{aligned}
\tag{4}
$$

2. für $n = 2, 3, \ldots$ und $\nu = 1, 2, 3$ ist

$$
\begin{aligned}
x &= 2\nu\,(2n + \nu - 1) & u_1 &= 2\nu^2 & u_2 &= 2\nu^2 \\
y &= (2n - 1)\,(2n + 2\nu + 1) & v_1 &= 2\nu\,(2n - 1) & v_2 &= 2\nu\,(2n + 2\nu - 1) \\
z &= \nu^2 + (2n + \nu - 1)^2 & w_1 &= (2n - 1)^2 & w_2 &= (2n + 2\nu - 1)^2 \\
& & t_1 &= 2\nu^2 + (2n - 1)^2 & t_2 &= 2\nu^2 + (2n + 2\nu - 1)^2
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Wir berechnen dazu 4 verschiedene charakteristische Beispiele:

$$
\begin{array}{cc}
n = 1 \quad \nu = 3 & n = 3 \quad \nu = 1 \\
1^2 + 8^2 + 32^2 = 33^2 & 2^2 + 14^2 + 49^2 = 51^2 \\
7^2 + 24^2 = 25^2 & 12^2 + 35^2 = 37^2 \\
1^2 + 6^2 + 18^2 = 19^2 & 2^2 + 10^2 + 25^2 = 27^2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
n = 3 \quad \nu = 7 & n = 10 \quad \nu = 8 \\
98^2 + 266^2 + 361^2 = 459^2 & 128^2 + 560^2 + 1225^2 = 1353^2 \\
168^2 + 95^2 = 193^2 & 432^2 + 665^2 = 793^2 \\
98^2 + 70^2 + 25^2 = 123^2 & 128^2 + 304^2 + 361^2 = 489^2
\end{array}
$$

Kommentar (P.B.) *Bekanntlich erhält man alle primitiven pythagoreischen Tripel* (x, y, z) *durch die Formeln*

$$
\begin{aligned}
x &= 2ab \\
y &= b^2 - a^2 \\
z &= a^2 + b^2
\end{aligned}
\tag{6}
$$

wenn man für a und b natürliche teilerfremde Zahlen $a < b$ *einsetzt, die nicht beide ungerade sind. Letzteres erreicht Glöckler, indem er* $a = \nu$ *und* $b = \nu + 2n - 1$ *setzt*

mit natürlichen Zahlen ν und n. Das Ergebnis sind die Formeln (1).
Aus (3) *erhält man auch*

$$
\begin{aligned}
u_1 &= z - y & \qquad u_2 &= z - y \\
v_1 &= x + y - z & \qquad v_2 &= z + x - y \\
w_1 &= z - x & \qquad w_2 &= z + x
\end{aligned}
\tag{7}
$$

und somit

$$
\begin{aligned}
t_1^2 &= (z-y)^2 + (x+y-z)^2 + (z-x)^2 & \quad t_2^2 &= (z-y)^2 + (z+x-y)^2 + (z+x)^2 \\
t_1^2 &= (2z-x-y)^2 & \quad t_2^2 &= (2z+x-y)^2
\end{aligned}
$$

also ist (u, v, w, t) *in der Tat jeweils ein pythagoreisches Quadrupel, und die Gleichung* (2) *kann man auch so darstellen:*

$$
\begin{aligned}
(z-y)^2 + (z+x-y)^2 + (z+x)^2 &= (2z+x-y)^2 \\
x^2 + y^2 &= z^2 \\
(z-y)^2 + (x+y-z)^2 + (z-x)^2 &= (2z-x-y)
\end{aligned}
$$

Das Quadrupel (u_1, v_1, w_1, t_1) *wird dann durch die Matrix*

$$
A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}
$$

und das Quadrupel (u_2, v_2, w_2, t_2) *durch die Matrix*

$$
A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}
$$

aus dem Quadrupel $(0, x, y, z)$ *erzeugt. Dabei könnte jeweils die erste Spalte der beiden Matritzen entfallen, wenn man an Stelle des Quadrupel* $(0, x, y, z)$ *das Tripel* (x, y, z) *verwendet. Die quadratische Matrix hat allerdings den Vorteil, dass sie auch auf Quadrupel anwendbar ist. Versieht man nach einem Hinweis von Albrecht Häberlein*[4] *die erste Spalte mit den obigen Werten, so ist – mit den Bezeichnungen von Häberlein –* $A_2 = D_3 E_1 E_3$ *und* $A_1 = A_2^{-1}$. *Ausgehend von dem pythagoräischen Quadrupel* $Q_1 = (0, 3, 4, 5)$ *erhält man durch* $Q_{n+1} = A_2 \cdot Q_n$ *die Folge*

[4] *Siehe A. Häberlein: Rekursive Erzeugung der Pythagoräischen Quadrupel nach Georg Glöckler. Dort wird das Thema dieser Handschrift, fußend auf mehreren Papieren von Glöckler umfassend behandelt.*

n	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
u_n	0	1	0	1	0	1	0	1	$\cdots$
v_n	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
w_n	4	8	12	18	24	32	40	50	$\cdots$
t_n	5	9	13	19	25	33	41	51	$\cdots$

Dabei hängt das Ergebnis stets von der Reihenfolge der Basiswerte ab. Das aus dem gleichen Tripel, aber mit verstauschten Basiswerten resultierende Quadrupel $(0,4,3,5)$ *liefert mit der gleichen Matrix* A_2 *eine andere Folge von Quadrupeln:*

n	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
u_n	0	2	0	2	0	2	0	2	$\cdots$
v_n	4	6	8	10	12	14	16	18	$\cdots$
w_n	3	9	15	25	35	49	63	81	$\cdots$
t_n	5	11	17	27	37	51	65	83	$\cdots$

3 Alternierende Folgen

Auch hier gehen wir wieder von einem Beispiel aus.

$$
\begin{array}{rcr}
\uparrow & \qquad & \uparrow \\
 & & 2^2+18^2+81^2=83^2 \\
n_1 = 3+1 \quad \nu = 1 & & 16^2+63^2=65^2 \\
 & & 2^2+14^2+49^2=51^2 \\
n = 3 \quad \nu = 1 & & 12^2+35^2=37^2 \\
 & & 2^2+10^2+25^2=27^2 \\
n_{-1} = 3-1 \quad \nu = 1 & & 8^2+15^2=17^2 \\
 & & 2^2+6^2+9^2=11^2 \\
\downarrow & & \downarrow
\end{array}
$$

Die Dreiheit, die durch die Formel (2) bestimmt ist, läßt sich also in eine miteinander verkettete Folge von Dreiheiten entwickeln. Die Berechnungsgrundlagen sind dabei durch die Formeln (4) und (5) bestimmt. Die zugehörigen n- und ν- Werte ergeben sich dabei aus dem folgenden Schema:

$$
\begin{array}{cr}
\uparrow & \\
 & u_{21}^2 + v_{21}^2 + w_{21}^2 = t_{21}^2 \\
n_1 = n + \nu \quad \nu_1 = \nu & x_1^2 + y_1 = z_1^2 \\
 & u_{20}^2 + v_{20}^2 + w_{20}^2 = t_{20}^2 \\
n_0 = n \quad \nu_0 = \nu & x_0^2 + y_0^2 = z_0^2 \\
 & u_{10}^2 + v_{10}^2 + w_{10}^2 = t_{10}^2 \\
n_- = n - \nu \quad \nu_{-1} = \nu & x_{-1}^2 + y_{-1}^2 = z_{-1}^2 \\
 & u_{1-1}^2 + v_{1-1}^2 + w_{1-1}^2 = t_{1-1}^2 \\
\downarrow & \downarrow
\end{array}
$$

Im obigen Beispiel ergibt sich für $n_2 = n+2\nu = 5$ und $\nu_2 = 1$ die nach oben anschließende Dreiheit

$$
\begin{aligned}
2^2 + 22^2 + 121^2 &= 123^2 \\
20^2 + 99^2 &= 101^2 \\
2^2 + 18^2 + 81^2 &= 83^2
\end{aligned}
$$

Bemerkung 1. Da $u_{10} = u_{20} = 2\nu^2$ konstant ist, lassen sich die beschriebenen Folgen viel leichter direkt berechnen, wenn man nur die Beziehungen (3) heranzieht.[5]

4 Quadrupelfolgen mit gleichen Basisdifferenzen

Gegeben sei eine Quadrupelfolge durch den folgenden Ansatz:

$$u_n^2 + v_n^2 + w_n^2 = t_n^2 \qquad\qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Wir stellen nun die Frage, ob es Quadrupelfolgen gibt mit der Eigenschaft

$$
\begin{aligned}
v_n - u_n &= const \\
w_n - v_n &= const
\end{aligned}
$$

woraus natürlich auch

$$w_n - u_n = const$$

folgt.

Als Beispiel wählen wir das folgende pyth. Zahlenquadrupel:

$$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$$

[5] Und die Formeln (7)! (P.B.)

In der Tat hat die folgende Quadrupelfolge die oben angegebenen Eigenschaften:

n	$u_n^2 + v_n^2 + w_n^2 = t_n^2$	
1	$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$	
2	$8^2 + 9^2 + 12^2 = 17^2$	
3	$52^2 + 53^2 + 56^2 = 93^2$	$v_n - u_n = 1$
4	$134^2 + 135^2 + 138^2 = 235^2$	$w_n - v_n = 3$
5	$746^2 + 747^2 + 750^2 = 1295^2$	$w_n - u_n = 4$
6	$1888^2 + 1889^2 + 1892^2 = 3273^2$	
7	$10\,412^2 + 10\,413^2 + 10\,416^2 = 18\,037^2$	
8	$26\,318^2 + 26\,319^2 + 26\,322^2 = 45\,567^2$	
	$\downarrow$	

Die Berechnung der Basiswerte u_n, v_n, w_n und t_n führt auf die Lösungen der Diophantischen Gleichung

$$3t_n^2 - p_n^2 = 26$$

und zwar durch den folgenden Ansatz:

$$u_n = x \qquad v_n = x + 1 \qquad w_n = x + 4$$

Dann ist

$$\begin{aligned} x_n^2 + (x_n + 1)^2 + (x_n + 4)^2 &= t_n^2 \\ 3x_n^2 + 10x_n &= t_n^2 - 17 \end{aligned}$$

und weiter

$$3t_n^2 - (3x_n + 5)^2 = 26 \tag{8}$$

mit $p_n = 3x_n + 5$. Die Lösungen ergeben sich dann aus der Tabelle 2.

Damit sind die Werte der angegebenen Quadrupelfolge unmittelbar verständlich. Für die Berechnung der Tabellenwerte wurde die Beziehung

$$t_n = 2p_{n-2} + t_{n-4}$$

für $n > 4$ herangezogen, was die praktische Berechnung wesentlich erleichtert.

5 Komplementäre Folgen

Ausgehend von der Tabelle 2 für t_n und p_n des letzten Abschnittes bemerken wir, dass nicht alle p_n zur Lösung der Gleichung (8) beigetragen haben.

n	t_n	p_n			
1	3	1			
2	5	7			
3	7	11	$= 3x_3 + 5$		$x_3 = 2$
4	17	29	$= 3x_4 + 5$		$x_4 = 8$
5	25	43			
6	63	109			
7	93	161	$= 3x_7 + 5$		$x_7 = 52$
8	235	407	$= 3x_8 + 5$		$x_8 = 134$
9	347	601			
10	877	1519			
11	1295	2243	$= 3x_{11} + 5$		$x_{11} = 746$
12	3273	5669	$= 3x_{12} + 5$		$x_{12} = 1888$
13	4833	8371			
14	12215	21157			
15	18037	31241	$= 3x_{15} + 5$		$x_{15} = 10\,412$
16	45587	78959	$= 3x_{16} + 5$		$x_{16} = 26\,318$

Tabelle 2: Diophantische Gleichung

Betrachten wir dazu die folgende Quadrupelfolge:

$$
\begin{array}{ll}
n & u_n'^2 + v_n'^2 + w_n'^2 = t_n'^2 \\
1 & 12^2 + 15^2 + 16^2 = 25^2 \\
2 & 34^2 + 37^2 + 38^2 = 63^2 \\
3 & 198^2 + 201^2 + 202^2 = 347^2 \\
4 & 504^2 + 507^2 + 508^2 = 877^2 \\
5 & 2788^2 + 2791^2 + 2792^2 = 4833^2 \\
6 & 7050^2 + 7053^2 + 7054^2 = 12\,215^2 \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\downarrow
\end{array}
$$

Wir erkennen dabei unmittelbar

1.

$$\begin{aligned} w_n' - v_n' &= v_n - u_n = 1 \\ v_n' - u_n' &= w_n - v_n = 3 \\ w_n' - u_n' &= w_n - u_n = 4 \end{aligned}$$

2. Für die Berechnung ist mit $u_n' = y_n$ und $v_n' = y_n + 3$ und $w_n' = y_n + 4$

$$y_n^2 + (y_n + 3)^2 + (y_n + 4)^2 = t_n^2$$

was auf die Gleichung

$$3t_n^2 - (3y_n + 7)^2 = 26$$

führt.

Damit werden die zunächst nicht brauchbaren Lösungen der Gleichung (8) für die Ermittlung der Basiswerte der zweiten Folge brauchbar. Wir wollen die zweite Folge als die zur ersten Folge komplementäre Folge ansehen.

Allgemein können wir die beiden Quadrupelfolgen

$$\begin{aligned} x_n^2 + (x_n + a)^2 + (x_n + b)^2 &= t_n^2 \\ y_n^2 + (y_n + b - a)^2 + (y_n + b)^2 &= T_n^2 \end{aligned}$$

als zueinander konplementär ansehen. Ihre Berechnung führt auf ein und dieselbe Diophantische Gleichung

$$3t^2 - p^2 = 2\left(a^2 + b^2 - ab\right) \tag{9}$$

wobei $t = t_n$ und $p = p_n = (3x_n + a + b)$ ist, wenn die Lösungen für die x_n gesucht werden.

Ist $t = T_m$ und $p = p_m = (3y_m + 2b - a)$, so erhält man die Werte für y_m.

Bemerkung 2. Es ist immer

$$\begin{aligned} p_n &= u_n + v_n + w_n \\ p_m &= u_n' + v_n' + w_n' \end{aligned}$$

6 Komplementäre Quadrupelfolgen mit gleicher Quadratsumme

Wir stellen zunächst erst einmal fest, dass es solche Quadrupelfolgen überhaupt gibt:

$$4^2 + 13^2 + 16^2 = 6^2 + 9^2 + 18^2 = 21^2$$

Dass in diesen Fällen die Basissummen p_n und p_m gleich sind, ist eine logische Konsequenz der Bemerkung 2 im letzten Abschnitt. Die zugehörige Rechnung für das gewählte Beispiel sieht dann wie folgt aus:

$$x_n^2 + (x_n + 9)^2 + (x_n + 12)^2 = y_n^2 + (y_n + 3)^2 + (y_n + 12)^2 = t_n^2$$

Daraus folgt

$$3t_n^2 - (3x_n + 21)^2 = 3t_n^2 - (3y_n + 15)^2 = 234$$

oder

$$t_n^2 - 3\,(x_n + 7)^2 = t_n^2 - 3\,(y_n + 5)^2$$

und mit $x_n + 7 = y_n + 5 = p_n$ ergibt sich dann die Diophantische Gleichung

$$t_n^2 - 3p_n^2 = 78$$

n	$u_n^2 + v_n^2 + w_n^2 = t_n^2$	t_n	p_n	$u_n'^2 + v_n'^2 + w_n'^2 = t_n^2$	BS
1	$(-6)^2 + 3^2 + 6^2 = 9^2$	9	1	$(-4)^2 + (-1)^2 + 8^2 = 9^2$	3
2	$0^2 + 9^2 + 12^2 = 15^2$	15	7	$2^2 + 5^2 + 14^2 = 15^2$	21
3	$4^2 + 13^2 + 16^2 = 21^2$	21	11	$6^2 + 9^2 + 18^2 = 21^2$	33
4	$22^2 + 31^2 + 34^2 = 51^2$	51	29	$24^2 + 27^2 + 36^2 = 51^2$	87
5	$36^2 + 45^2 + 48^2 = 75^2$	75	43	$38^2 + 41^2 + 50^2 = 75^2$	129
6	$102^2 + 111^2 + 114^2 = 189^2$	189	109	$104^2 + 107^2 + 116^2 = 189^2$	327
7	$154^2 + 163^2 + 166^2 = 279^2$	279	161	$156^2 + 159^2 + 168^2 = 279^2$	483
8	$400^2 + 409^2 + 412^2 = 705^2$	705	407	$402^2 + 405^2 + 414^2 = 705^2$	1221
9	$594^2 + 603^2 + 606^2 = 1041^2$	1041	601	$596^2 + 599^2 + 608^2 = 1041^2$	1803
10	$1512^2 + 1521^2 + 1524^2 = 2631^2$	2631	1519	$1514^2 + 1517^2 + 1526^2 = 2631^2$	4557
11	$2236^2 + 2245^2 + 2248^2 = 3885^2$	3885	2243	$2238^2 + 2241^2 + 2250^2 = 3885^2$	6729
12	$5662^2 + 5671^2 + 5674^2 = 9819^2$	9819	5669	$5664^2 + 5667^2 + 5676^2 = 9819^2$	17007
13	$8364^2 + 8373^2 + 8376^2 = 14\,499^2$	14499	8371	$8366^2 + 8369^2 + 8378^2 = 14\,499^2$	25119

Tabelle 3: Quadrupelfolgen mit gleicher Quadratsumme

Es ist stets $p_n = 2t_{n-2} + p_{n-4}$.

7 Anhang[6]

Aus einem pythagoräischen Tripel gehen 8 verschiedene alternierende Tripel- und Quadrupelfolgen hervor. Diese können durch die folgenden Rekursionsformeln vermittelt werden.

[6] Die in diesem Anhang aufgeführten Blätter befanden sich ebenfalls im Manuskript Nr. 189 und behandeln ein ähnliches Thema, sind aber auch nicht vollständig.

Es gelte

$$x_{n-1}^2 + y_{n-1}^2 + z_{n-1}^2 = t_{n-1} \tag{10}$$

Wenn dann

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} - y_{n-1} + t_{n-1} \\ y_n &= x_{n-1} - z_{n-1} + t_{n-1} \\ z_n &= -y_{n-1} - z_{n-1} + t_{n-1} \\ t_n &= x_{n-1} - y_{n-1} - z_{n-1} + 2t_{n-1} \end{aligned} \tag{11}$$

ist, dann folgt daraus

$$x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 = t_n^2 \tag{12}$$

Diese Tatsache lässt sich leicht durch Nachrechnen beweisen. Ist A_n das Gleichungssystem (11), so ergibt sich für A_{n+1} folgerichtig

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_{n-1} - 2y_{n-1} + 2t_{n-1} \\ y_{n+1} &= 2x_{n-1} - y_{n-1} + 2t_{n-1} \\ z_{n+1} &= z_{n-1} \\ t_{n+1} &= 2x_{n-1} - 2y_{n-1} + 3t_{n-1} \end{aligned} \tag{13}$$

mit

$$x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 + z_{n+1}^2 = t_{n+1}^2 \tag{14}$$

Ist nun speziell $z_{n-1} = 0$, so entsteht aus dem Quadrupel (10) ein Tripel. Aber (12) ist wieder ein Quadrupel, (14) ist wieder ein Tripel usw.

Im Folgenden geben wir ein Beispiel für solche alternierenden Folgen:

$$\begin{aligned} x_{n-1} &= 20 \\ y_{n-1} &= 21 \\ z_{n-1} &= 0 \\ t_{n-1} &= 29 \end{aligned}$$

$n-1$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
x_n	20	28	36	44	52	60	68	76	84	92	100	108	116	124	
y_n	21	49	77	121	165	225	285	361	437	529	521	729	837	961	$\rightarrow$
z_n	0	8	0	8	0	8	0	8	0	8	0	8	0	8	
t_n	29	57	85	129	173	233	293	369	445	537	629	737	845	969	

Nun lassen sich rein kombinatorisch aus dem gegebenen Ausgangstripel durch Vertauschungen und Vorzeichenänderungen 8 verschiedene Tripel mit gleicher Summe bilden:

$$20^2 + 21^2 = 29^2 \qquad 21^2 + 20^2 = 29^2 \qquad 21^2 + (-20)^2 = 29^2 \qquad 20^2 + (-21)^2 = 29^2$$

$$(-29)^2 + 21^2 = 29^2 \quad (-21)^2 + 20^2 = 29^2 \quad (-21)^2 + \left(-20^2\right) = 29^2 \quad \left(-20^2\right) + (-21)^2 = 29^2$$

Im Folgenden notieren wir in Tabellen die Basiswerte der entsprechenden alternierenden Folgen.

1.

20	28	36	44	52	60	68	76	84	
21	49	77	121	165	225	285	361	437	→
0	8	0	8	0	8	0	8	0	
29	57	85	129	173	233	293	369	445	

2.

-20	-12	-4	4	12	20	28	36	44	
21	9	-3	1	5	25	45	81	117	→
0	8	0	8	0	8	0	8	0	
29	17	5	9	13	33	53	69	125	

3.

21	30	39	48	57	66	75	84	93	
20	50	80	128	176	242	308	342	476	→
0	9	0	9	0	9	0	9	0	
29	59	89	137	185	251	317	401	485	

4.

-21	-12	-3	6	15	24	33	42	51	
20	8	-4	2	8	32	56	98	140	→
0	9	0	9	0	9	0	9	0	
29	17	5	11	17	41	65	107	149	

5.

21	70	119	168	217	266	315	364	413	
-20	50	120	288	456	722	988	1352	1716	→
0	49	0	49	0	49	0	49	0	
29	99	169	337	505	771	1037	1401	1765	

6.

-21	28	77	126	175	224	273	322	371	
-20	8	36	162	288	512	736	1058	1380	→
0	49	0	49	0	49	0	49	0	
29	57	85	211	337	561	785	1107	1429	

7.

20	70	120	170	220	270	320	370	420	
-21	49	119	289	459	729	999	1369	1739	→
0	50	0	50	0	50	0	50	0	
29	99	169	339	509	779	1049	1419	1789	

8.

-20	30	80	130	180	230	280	330	380	
-21	9	39	169	299	529	759	1089	1419	$\rightarrow$
0	50	0	50	0	50	0	50	0	
29	59	89	219	349	579	809	1139	1469	

Kommentar (P.B.) *In Matritzenform lautet das Gleichungssystem* (11)

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \\ t_{n-1} \end{pmatrix}$$

mit

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

und die Matrix A_{n+1} *des Gleichungssystems* (13) *ergibt sich zu*

$$A_{n+1} = A_n^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$