Zahlenphänomene im Umkreis pythagoräischer Dreiecke

Georg Glöckler*

1 Einführung

Pythagoräische Dreiecke sind rechtwinklige Dreiecke, deren Seiten natürliche Zahlen als Maßzahlen haben. Das bekannteste unter ihnen ist das sog. ägyptische Dreieck mit den Maßzahlen 3, 4 und 5. Der für rechtwinklige Dreiecke allgemeingültige Satz des Pythagoras findet hier seine spezielle Anwendung, und zwar in der Form

$$3^2 + 4^2 = 5^2\,.$$

Sind allgemein x, y und z natürliche Zahlen, die der Beziehung

$$x^2 + y^2 = z^2$$

genügen, so nennt man das Tripel ein pythagoräisches. Dabei unterscheidet man primitive und imprimitive Tripel. Bei den primitiven Tripeln ist der größte gemeinsame Teiler (x, y, z) der 3 Zahlen x, y und z gleich 1. Imprimitive Tripel sind z.B.

$$\begin{aligned} 6^2 + 8^2 &= 10^2 & (6, 8, 10) &= 2 \\ 63^2 + 60^2 &= 87^2 & (63, 60, 87) &= 3 \\ 49^2 + 168^2 &= 175^2 & (49, 168, 175) &= 7 \end{aligned}$$

Diese lassen sich durch kürzen auf ein primitives Basistripel zurückführen:

$$\begin{aligned} 3^2 + 4^2 &= 5^2 \\ 21^2 + 20^2 &= 29^2 \\ 7^2 + 24^2 &= 25^2 \end{aligned}$$

*Undatierte Handschrift Nr.202, übertragen von Peter Baum. 26.11.2019

2 Allgebraische Charakterisierung pythagoräischer Tripel

Hier gibt es ganz verschiedene Möglichkeiten. Im Folgenden haben wir 2 dieser Möglichkeiten erfaßt.

$$\begin{aligned} x &= p^2 - q^2 \\ y &= 2pq \\ z &= p^2 + q^2 \end{aligned} \qquad (1)$$

für alle $p > q$ mit $p = 2, 3, 4, \ldots$ und $q = 1, 2, 3, \ldots$

$$\begin{aligned} x &= x_{n\nu} = (2n-1)(2n+2\nu+1) \\ y &= y_{n\nu} = 2\nu(2n+\nu-1) \\ z &= z_{n\nu} = \nu^2 + (2n+\nu-1)^2 \end{aligned} \qquad (2)$$

für alle n und ν mit $n = 1, 2, 3, \ldots$ und $\nu = 1, 2, 3, \ldots$

Beispiele:

für $p = 3$ und $q = 2$ ist

$$5^2 + 12^2 = 13^2$$

für $n = 3$ und $\nu = 2$ ist

$$45^2 + 28^2 = 53^2$$

für $p = 3$ und $q = 1$ ist

$$8^2 + 6^2 = 10^2$$

für $n = 2$ und $\nu = 3$ ist

$$27^2 + 36^2 = 45^2$$

Auf Grund der Formeln (1) und (2) erhält man also sowohl primitive als auch imprimitive Tripel.[1] In Tabelle 1 auf Seite 12 und Tabelle 2 auf Seite 13 sind die ersten pythagoräischen Tripel gemäß den Gleichungen (2) registriert.[2]

3 Das geometrische Umfeld eines pythagoräischen Dreiecks

Aus der projektiven Geometrie ist bekannt, dass 3 Geraden in allgemeiner Lage das ebene Punktfeld in 4 voneinander getrennte Kern-Gebiete gliedern. Verlängert man die Seiten eines pythagoräischen Dreiecks zu vollständigen Geraden, so liegt der soeben beschriebene Tatbestand in spezieller Form vor. Nun hat jedes Dreieck einen Inkreis und 3 Ankreise, welche das Dreieck von außen berühren. Jeder der 4 Kreise liegt dann in einem und nur in einem der 4 beschriebenen Kern-Gebiete, diese gwissermaßen erfüllend (vgl. Zeichnung 1). Das ist im elementarsten Sinn ein schönes Wechselverhältnis zwischen den Zahlen 3 und 4.

[1] Setzt man in Formel (1) $p = 2n + \nu - 1$ und $q = \nu$, erhält man wegen $p^2 - q^2 = (p-q)(p+q) = (2n-1)(2n+2\nu-1)$ die Formel (2) (P.B.).

[2] Im Manuskript fehlen Tabellen. Die hier eingefügten Tabellen stammen aus Glöcklers Nachlass in der Mathematisch-Astronomischen Sektion (P.B.)

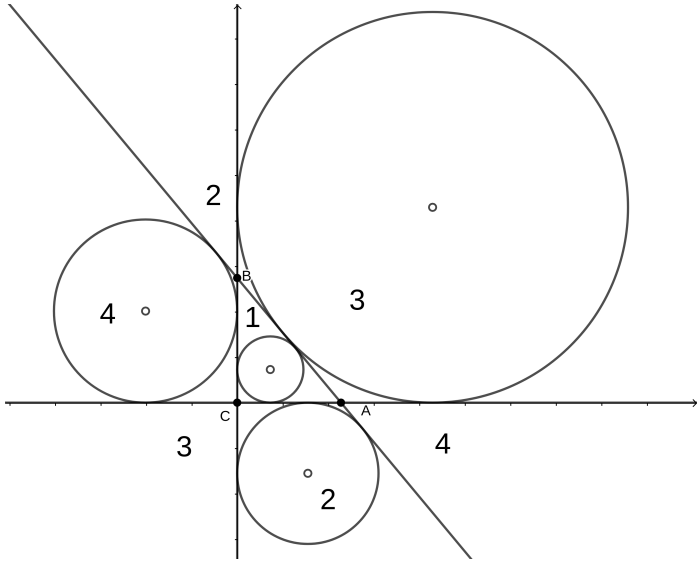

Abbildung 1: Kern-Gebiete und Ankreise

4 Die Radien der vier Berührkreise

Die Radien lassen sich auf verschiedene Weise berechnen. Am bekanntesten ist zunächst die sogenannte Heron'sche Formel[3] für die Berechnung des Inkreises eines beliebigen Dreiecks: Sind a, b und c die Seiten eines beliebigen Dreiecks und $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ der halbe Umfang, dann lässt sich der Radius des Inkreises nach folgender Formel berechnen:

$$r_i = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \tag{3}$$

Für das ägyptische Dreieck ergeben sich dann folgende Werte:

$$\begin{aligned} s &= \frac{3+4+5}{2} = 6 \\ s-a &= 6-3 = 3 \\ s-b &= 6-4 = 2 \\ s-c &= 6-5 = 1 \end{aligned}$$

also

$$r_i = \sqrt{\frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{6}} = 1$$

Das ägyptische Dreieck ist das einzige mit diesem Inkreisradius. Das ist nicht das allein Bemerkenswerte. Betrachten wir irgendein anderes beliebiges pythagoräisches Dreieck,

[3] Heron von Alexandria um 150 v.Chr.

z.B. $7^2 + 24^2 = 25^2$; hier ist

$$\begin{aligned} s &= \frac{7+24+25}{2} = 28 \\ s-a &= 28-7 = 21 \\ s-b &= 28-24 = 4 \\ s-c &= 28-25 = 3 \end{aligned}$$

Dann gilt

$$r_i = \sqrt{\frac{21 \cdot 4 \cdot 3}{28}} = 3$$

Das Erstaunliche scheint dabei zu sein, dass alle pythagoräischen Dreiecke einen Inkreisradius haben, der eine natürliche Zahl ist. Die Frage dabei ist, ob dies auch in gleicher Weise auf die Ankreis-Radien zutrifft. Dazu bedarf es einer eingehenden Untersuchung.

4.1 Erste Berechnung der Radien der vier Berührkreise

Zunächst berechnen wir r_i mit der Heron'schen Formel (3). Dann ist mit $x^2 + y^2 = z^2$

$$s = \frac{x+y+z}{2}$$

und deshalb

$$\begin{aligned} r_i &= \sqrt{\frac{(s-x)(s-y)(s-z)}{s}} \\ r_i &= \sqrt{\frac{(z+y-x)(z+x-y)(x+y-z)}{4(x+y+z)}} \\ r_i &= \sqrt{\frac{2xy(x+y-z)}{4(x+y+z)}} \end{aligned}$$

Nun ist wegen $z^2 = x^2 + y^2$ auch $(x+y)^2 = 2xy + z^2$, woraus dann

$$(x+y)^2 - z^2 = (x+y+z)(x+y-z) = 2xy$$

folgt. Damit ergibt sich also für r_i:

$$r_i = \frac{1}{2}(x+y-z) \tag{4}$$

Ein überraschend einfaches Ergebnis. Man erkennt schon hier, dass für alle pythagoräischen Dreiecke r_i eine natürliche Zahl sein muß: Für alle primitiven Tripel ist nämlich entweder x oder y ungerade und somit auch z. Sind sowohl x als auch y gerade, dann ist auch z gerade.

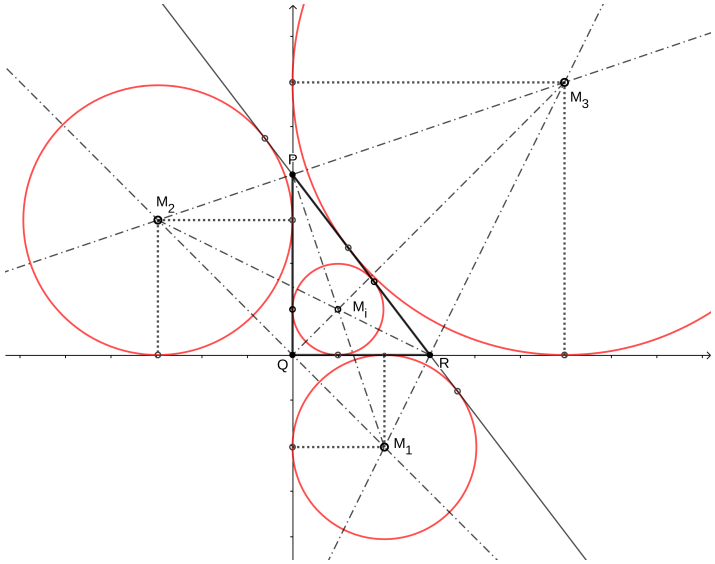

Abbildung 2: Ankreisrradien

Zur Berechnung der drei Ankreisradien r_1, r_2 und r_3 gehen wir von der geometrischen Figur der Abbildung 2 aus. Diese enthält alle Winkelhalbierenden der Innenwinkel und auch die drei äußeren Winkelhalbierenden. Mit Hilfe der eingezeichneten Quadrate lassen sich nun leicht diejenigen Strecken bestimmen, aus deren Proportionen unter Anwendung von Strahlensätzen sich die drei Ankreisradien berechnen lassen.

Berechnung von r_1:
2. Strahlensatz mit Zentrum P und den Strahlen PQ und PM_1

$$\frac{y - r_i}{y + r_1} = \frac{r_i}{r_1}$$

Daraus folgt

$$r_1 = \frac{r_i y}{y - 2r_i} \tag{5}$$

Berechnung von r_2:
2. Strahlensatz mit Zentrum R und den Strahlen RQ und RM_2

$$\frac{x - r_i}{x + r_2} = \frac{r_i}{r_2}$$

Daraus folgt

$$r_2 = \frac{r_i x}{x - 2r_i} \tag{6}$$

Berechnung von r_3:
2. Strahlensatz mit Zentrum R und den Strahlen RQ und RM_3

$$\frac{x - r_1}{r_3 - x} = \frac{r_1}{r_3}$$

Daraus folgt

$$r_3 = \frac{r_1 x}{2r_1 - x} \tag{7}$$

Die Formeln (5), (6) und (7) können noch umgeschrieben werden, indem man sich stärker auf das Ausgangstripel x, y und z bezieht. Es ist nämlich nach (4) und (5) z.B.

$$r_1 = \frac{r_i y}{y - x - y + z}$$
$$r_1 = \frac{r_i y}{z - x} \tag{8}$$

Entsprechend gilt

$$r_2 = \frac{r_i y}{z - y} \tag{9}$$
$$r_3 = \frac{xy}{(z - x)(z - y)} r_i \tag{10}$$

Ein Beispiel: Es sei $45^2 + 28^2 = 53^2$ gegeben. Dann ist zunächst nach (4)

$$r_i = \frac{1}{2}(45 + 28 - 53) = 10$$

weiter ergibt sich

$$r_1 = \frac{10 \cdot 28}{28 - 2 \cdot 10} = 35 \qquad r_2 = \frac{10 \cdot 45}{45 - 2r_i} = 18 \qquad r_3 = \frac{35 \cdot 45}{2 \cdot 35 - 45} = 63$$

4.2 Zweite Berechnung der Radien der 4 Berührkreise

Bemerkenswert ist die Tasache, dass sich alle Radien aus den Tripelzahlen x, y und z unmittelbar berechnen lassen:
Zunächst ist nach (4)

$$r_i = \frac{1}{2}(x + y - z)$$

Aus (4) und (5) folgt dann weiter

$$r_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x + y - z)\, y}{y - x - y + z}$$
$$r_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{xy + y^2 - zy}{z - x}$$
$$r_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{xy + +z^2 - x^2 - zy}{z - x}$$
$$r_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{(z + x)(z - x) - y(z - x)}{z - x}$$
$$r_1 = \frac{1}{2}(z + x - y) \tag{11}$$

Entsprechend erhält man

$$r_2 = \frac{1}{2}(z + y - x) \tag{12}$$

$$r_3 = \frac{1}{2}(x + y + z) \tag{13}$$

4.3 Dritte und vierte Berechnung der Radien der 4 Berührkreise

Diese Berechnung ergibt sich unter Anwendung der Formeln (1) und (2). Wir fasssen die Ergebnisse in einer Rubrik zusammen.

$$\begin{array}{ccc} m & r_m = r(p,q) & r_m = r(n,\nu) \\ i & r_i = q(p-q) & = \nu(2n-1) \\ 1 & r_1 = p(p-q) & = (2n-1)(2n+\nu-1) \\ 2 & r_2 = q(p+q) & = \nu(2n+2\nu-1) \\ 3 & r_3 = p(p+q) & = (2n+\nu-1)(2n+2\nu-1) \end{array} \tag{14}$$

Spätestens hier erkennt man unmittelbar die erstaunliche Tatsache, dass alle Radien den Wert von natürlichen Zahlen haben.

Die pythagoräischen Dreiecke sind dadurch wesentlich charakterisiert, dass die Radien ihrer Berührkreise natürliche Zahlen sind. Dass diese Charakterisierung aber nicht ausschließlich für pythagoräische Dreiecke gilt, zeigt das folgende Beispiel eines allgemeinen Dreiecks:

$$a = 15 \qquad b = 14 \qquad c = 13$$

denn es ist zunächst

$$s = \frac{15 + 14 + 13}{2} = 21$$

und damit

$$r_i = \sqrt{\frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{21}} = 4$$

4.4 Einige Beispiele der Berechnung von Berührkreisradien

1. Für $p = 3$ und $q = 2$ ist $5^2 + 12^2 = 13^2$. Dann ist

$$\begin{aligned} r_i &= 2 \cdot (3-2) = 2 \\ r_1 &= 3 \cdot (3-2) = 3 \\ r_2 &= 2 \cdot (3+2) = 10 \\ r_3 &= 3 \cdot (3+2) = 15 \end{aligned}$$

2. Für $n = 3$ und $\nu = 2$ ist $45^2 + 28^2 = 53^2$. Dann ist

$$\begin{aligned} r_i &= 2 \cdot 5 = 10 \\ r_1 &= 5 \cdot 7 = 35 \\ r_2 &= 2 \cdot 9 = 18 \\ r_3 &= 9 \cdot 7 = 63 \end{aligned}$$

3. Für $x = 33$, $y = 56$ und $z = 65$ ist $33^2 + 56^2 = 65^2$. Dann ist

$$\begin{aligned} r_i &= \frac{1}{2}(33 + 56 - 65) = 12 \\ r_1 &= \frac{1}{2}(65 + 33 - 56) = 21 \\ r_2 &= \frac{1}{2}(65 + 56 - 33) = 44 \\ r_3 &= \frac{1}{2}(33 + 56 + 65) = 77 \end{aligned}$$

4. Für $x = 21$, $y = 20$ und $z = 29$ ist $21^2 + 20^2 = 29^2$. Dann ist

$$\begin{aligned} r_i &= \frac{1}{2}(21 + 20 - 29) = 6 \\ r_1 &= \frac{20}{8} \cdot 6 = 15 \\ r_2 &= \frac{21}{9} \cdot 6 = 14 \\ r_3 &= \frac{21 \cdot 20}{8 \cdot 9} \cdot 6 = 35 \end{aligned}$$

4.5 Speziell Aufgabe

Welche pythagoräischen Dreiecke haben den Inkreisradius $r_i = 36$?

Lösung: Wir legen die linke Formel in (14) zu Grunde, weil wir damit auch alle imprimitiven Tripel mit der vorgegebenen Eigenschaft erfassen können.

Dazu müssen wir die Zahl 36 in alle möglichen Produkte von 2 Faktoren zerlegen um sie mit dem Produkt $r_i = q\,(p - q)$ identifizieren zu können.

$$\begin{aligned} 36 &= 1 \cdot 36 \\ &= 2 \cdot 18 \\ &= 3 \cdot 12 \\ &= 4 \cdot 9 \\ &= 6 \cdot 6 \end{aligned}$$

Es ergeben sich also $9 = 3^2$ verschiedene pythagoräische Dreiecke mit dem Inkreisradius $r_i = 36$.[4]

[4] Im imprimitiven Fall hat Glöckler im Folgenden das zugehörige primitive Tripel und dessen Inkreisradius r_i berechnet (P.B.)

1. $q = 1$, $p - q = 36$, $p = 37$ und nach Formel (1)

$$1368^2 + 74^2 = 1370^2 \qquad \text{imprimitiv } (= i)$$
$$684^2 + 37^2 = 685^2 \qquad \text{primitive Form } (= \text{pF})$$

Entsprechend

2. $q = 36$, $p - q = 1$, $p = 37$

$$73^2 + 2664^2 = 2665^2 \qquad \text{pF}$$

3. $q = 2$, $p - q = 18$, $p = 20$

$$396^2 + 80^2 = 404^2 \qquad \text{i}$$
$$99^2 + 20^2 = 101^2 \qquad r_i = 9$$

4. $q = 18$, $p - q = 2$, $p = 20$

$$76^2 + 720^2 = 724^2 \qquad \text{i}$$
$$19^2 + 180^2 = 181^2 \qquad r_i = 9$$

5. $q = 3$, $p - q = 12$, $p = 15$

$$216^2 + 90^2 = 234^2 \qquad \text{i}$$
$$12^2 + 5^2 = 13^2 \qquad r_i = 2$$

6. $q = 12$, $p - q = 3$, $p = 15$

$$81^2 + 360^2 = 369^2 \qquad \text{i}$$
$$9^2 + 40^2 = 41^2 \qquad r_i = 4$$

7. $q = 4$, $p - q = 9$, $p = 13$

$$153^2 + 104^2 = 185^2 \qquad \text{pF}$$

8. $q = 9$, $p - q = 4$, $p = 13$

$$88^2 + 234^2 = 250^2 \qquad \text{i}$$
$$44^2 + 117^2 = 125^2 \qquad r_i = 18$$

9. $q = 6$, $p - q = 6$, $p = 12$

$$108^2 + 144^2 = 180^2 \qquad \text{i}$$
$$3^2 + 4^2 = 5^2 \qquad r_i = 1$$

4.6 Über die Beziehungen der 4 Berührradien untereinander und ihre Beziehungen zum Grund-Tripel x, y und z

1. Die folgenden Gleichungen folgen recht unmittelbar aus den Formeln (14):

$$r_3 = r_i + r_1 + r_2 \tag{15}$$
$$r_i : r_1 = r_2 : r_3 \tag{16}$$
$$r_i \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = [pq\,(p-q)\,(p+q)]^2 \tag{17}$$
$$r_i \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = [\nu\,(2n-1)\,(2n+2\nu-1)\,(2n+\nu-1)]^2 \tag{18}$$

$$r_i + r_1 + r_2 + r_3 = x + y + z \tag{19}$$
$$r_i^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 2z^2 \tag{20}$$
$$r_i \cdot (r_1 + r_2 + r_3) + r_1 \cdot r_2 + r_2 \cdot r_3 + r_3 \cdot r_1 = x \cdot y + y \cdot z + z \cdot x \tag{21}$$
$$r_1 \cdot r_2 + r_2 \cdot r_3 + r_3 \cdot r_1 = r_3^2 \tag{22}$$

2.

$$\begin{aligned} x &= r_3 - r_2 & z - x &= r_2 - r_i \\ y &= r_3 - r_1 & z - y &= r_1 - r_i \\ z &= r_3 - r_i & y - x &= r_2 - r_1 \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} (z-x) + (z-y) + (y-x) &= 2\,(z-x) \\ &= (2q)^2 \\ &= (2\nu)^2 \end{aligned} \tag{24}$$

Die Bedeutung der Differenzen als Abstände entsprechender Berührpunkte auf den Seiten des pythagoräischen Dreiecks ersehe man aus der Zeichnung[5] 3.

3. Die Zeichnung 4 verdeutlicht die Teilung jeder Seite durch die Winkelhalbierende, die durch den Eckpunkt hindurchgeht, welcher der jeweiligen Seite des pyth. Dreiecks gegenüber liegt:

$$PT_R : T_RQ = z : x$$
$$QT_P : T_PR = y : z$$
$$RT_Q : T_QP = x : y$$

Den letzten Proportionen liegt der geometrische Sachverhalt zu Grunde, nach dem die Winelhalbierenden eines Dreiecks die gegenüber liegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt.

[5] Die Zeichnungen 3 und 4 sind im Manuskript nicht vorhanden (P.B.).

4. Einige bemerkenswerten Summen: Alle folgenden Summen lassen sich aus den Gleichungen (1) und (14) unmittelbar bestimmen.

$$\begin{aligned}
r_1 + r_3 &= z + x = 2\left(2n + \nu - 1\right)^2 \\
r_2 + r_3 &= z + y = \left(2n + 2\nu - 1\right)^2 \\
r_i + r_3 &= x + y = 2\left(2n + \nu - 1\right)^2 - \left(2n - 1\right)^2 \\
r_i + r_1 &= x \\
r_i + r_2 &= y
\end{aligned}$$

Bemerkung 1. Die Summe $x + y$ und die Differenz $|y - x|$ des pythagoräischen Tripels (x,y,z) sind Primzahlen der Form $p = 8n \pm 1$ oder das Produkt aus ihnen.

Zwei einfache Beispiele dazu:

$$\begin{aligned}
55^2 + 48^2 &= 73^2 \\
x + y &= 103 \\
&= 8 \cdot 13 - 1 \\
|y - x| &= 7 \\
&= 8 \cdot 1 - 1
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
99^2 + 20^2 &= 101^2 \\
x + y &= 119 \\
&= 7 \cdot 17 = (8 \cdot 1 - 1)(8 \cdot 2 + 1) \\
|y - x| &= 79 \\
&= 8 \cdot 10 - 1
\end{aligned}$$

$x_{n\nu} = (2n - 1)(2n + 2\nu - 1)$
$y_{n\nu} = 2\nu \cdot (2n + \nu - 1)$ wobei $x_{n\nu}^2 + y_{n\nu}^2 = z_{n\nu}^2$ gilt mit $n = 1, 2, 3, \cdots$ / $\nu = 1, 2, 3, \cdots$
$z_{n\nu} = \nu^2 + (2n + \nu - 1)^2$

n	ν = 1	ν = 2	ν = 3	ν = 4	ν = 5
1	$3^2 + 4^2 = 5^2$	$5^2 + 12^2 = 13^2$	$7^2 + 24^2 = 25^2$	$9^2 + 40^2 = 41^2$	$11^2 + 60^2 = 61^2$
2	$15^2 + 8^2 = 17^2$	$21^2 + 20^2 = 29^2$	$27^2 + 36^2 = 45^2$ $3^2 + 4^2 = 5^2$ i	$33^2 + 56^2 = 65^2$	$39^2 + 80^2 = 89^2$
3	$35^2 + 12^2 = 37^2$	$45^2 + 28^2 = 53^2$	$55^2 + 48^2 = 73^2$	$65^2 + 72^2 = 97^2$	$75^2 + 100^2 = 125^2$ $3^2 + 4^2 = 5^2$ i
4	$63^2 + 16^2 = 65^2$	$77^2 + 36^2 = 85^2$	$91^2 + 60^2 = 109^2$	$105^2 + 88^2 = 137^2$	$119^2 + 120^2 = 169^2$
5	$99^2 + 20^2 = 101^2$	$117^2 + 44^2 = 125^2$	$135^2 + 72^2 = 153^2$ $15^2 + 8^2 = 17^2$ i	$153^2 + 104^2 = 185^2$	$171^2 + 140^2 = 221^2$
6	$143^2 + 24^2 = 145^2$	$165^2 + 52^2 = 173^2$	$187^2 + 84^2 = 205^2$	$209^2 + 120^2 = 241^2$	$231^2 + 160^2 = 281^2$
7	$195^2 + 28^2 = 197^2$	$221^2 + 60^2 = 229^2$	$247^2 + 96^2 = 265^2$	$273^2 + 136^2 = 305^2$	$299^2 + 180^2 = 349^2$
8	$255^2 + 32^2 = 257^2$	$285^2 + 68^2 = 293^2$	$315^2 + 108^2 = 333^2$ $35^2 + 12^2 = 37^2$ i	$345^2 + 152^2 = 377^2$	$375^2 + 200^2 = 425^2$ $15^2 + 8^2 = 17^2$ i
9	$323^2 + 36^2 = 325^2$	$357^2 + 76^2 = 365^2$	$391^2 + 120^2 = 409^2$	$425^2 + 168^2 = 457^2$	$459^2 + 220^2 = 509^2$
10	$399^2 + 40^2 = 401^2$	$437^2 + 84^2 = 445^2$	$475^2 + 132^2 = 493^2$	$513^2 + 184^2 = 545^2$	$551^2 + 240^2 = 601^2$
11	$483^2 + 44^2 = 485^2$	$525^2 + 92^2 = 533^2$	$567^2 + 144^2 = 585^2$ $63^2 + 16^2 = 65^2$ i	$609^2 + 200^2 = 641^2$	$651^2 + 260^2 = 701^2$
12	$575^2 + 48^2 = 577^2$	$621^2 + 100^2 = 629^2$	$667^2 + 156^2 = 685^2$	$713^2 + 216^2 = 745^2$	$759^2 + 280^2 = 809^2$
13	$675^2 + 52^2 = 677^2$	$725^2 + 108^2 = 733^2$	$775^2 + 168^2 = 793^2$	$825^2 + 232^2 = 857^2$	$875^2 + 300^2 = 925^2$ $35^2 + 12^2 = 37^2$ i
14	$783^2 + 56^2 = 785^2$	$837^2 + 116^2 = 845^2$	$891^2 + 180^2 = 909^2$ $99^2 + 20^2 = 101^2$ i	$945^2 + 248^2 = 977^2$	$999^2 + 320^2 = 1049^2$
15	$899^2 + 60^2 = 901^2$	$957^2 + 124^2 = 965^2$	$1015^2 + 192^2 = 1033^2$	$1073^2 + 264^2 = 1105^2$	$1131^2 + 340^2 = 1181^2$
16	$1023^2 + 64^2 = 1025^2$	$1085^2 + 132^2 = 1093^2$	$1147^2 + 204^2 = 1165^2$	$1209^2 + 280^2 = 1241^2$	$1271^2 + 360^2 = 1321^2$
17	$1155^2 + 68^2 = 1157^2$	$1221^2 + 140^2 = 1229^2$	$1287^2 + 216^2 = 1305^2$ $143^2 + 24^2 = 145^2$ i	$1353^2 + 296^2 = 1385^2$	$1419^2 + 380^2 = 1469^2$
18	$1295^2 + 72^2 = 1297^2$	$1365^2 + 148^2 = 1373^2$	$1435^2 + 228^2 = 1453^2$	$1505^2 + 312^2 = 1537^2$	$1575^2 + 400^2 = 1625^2$ $63^2 + 16^2 = 65^2$ i
19	$1443^2 + 76^2 = 1445^2$	$1517^2 + 156^2 = 1525^2$	$1591^2 + 240^2 = 1609^2$	$1665^2 + 328^2 = 1697^2$	$1739^2 + 420^2 = 1789^2$
20	$1599^2 + 80^2 = 1601^2$	$1677^2 + 164^2 = 1685^2$	$1755^2 + 252^2 = 1773^2$ $195^2 + 28^2 = 197^2$ i	$1833^2 + 344^2 = 1865^2$	$1911^2 + 440^2 = 1961^2$
21	$1763^2 + 84^2 = 1765^2$	$1845^2 + 172^2 = 1853^2$	$1927^2 + 264^2 = 1945^2$	$2009^2 + 360^2 = 2041^2$	$2091^2 + 460^2 = 2141^2$
22	$1935^2 + 88^2 = 1937^2$	$2021^2 + 180^2 = 2029^2$	$2107^2 + 276^2 = 2125^2$	$2193^2 + 376^2 = 2225^2$	$2279^2 + 480^2 = 2329^2$
23	$2115^2 + 92^2 = 2117^2$	$2205^2 + 188^2 = 2213^2$	$2295^2 + 288^2 = 2313^2$ $255^2 + 32^2 = 257^2$ i	$2385^2 + 392^2 = 2417^2$	$2475^2 + 500^2 = 2525^2$ $99^2 + 20^2 = 101^2$ i
24	$2303^2 + 96^2 = 2305^2$	$2397^2 + 196^2 = 2405^2$	$2491^2 + 300^2 = 2509^2$	$2585^2 + 408^2 = 2617^2$	$2679^2 + 520^2 = 2729^2$
25	$2499^2 + 100^2 = 2501^2$	$2597^2 + 204^2 = 2605^2$	$2695^2 + 312^2 = 2713^2$	$2793^2 + 424^2 = 2825^2$	$2891^2 + 540^2 = 2941^2$
26	$2703^2 + 104^2 = 2705^2$	$2805^2 + 212^2 = 2813^2$	$2907^2 + 324^2 = 2925^2$ $323^2 + 36^2 = 325^2$ i	$3009^2 + 440^2 = 3041^2$	$3111^2 + 560^2 = 3161^2$
27	$2915^2 + 108^2 = 2917^2$	$3021^2 + 220^2 = 3029^2$	$3127^2 + 336^2 = 3145^2$	$3233^2 + 456^2 = 3265^2$	$3339^2 + 580^2 = 3389^2$
28	$3135^2 + 112^2 = 3137^2$	$3245^2 + 228^2 = 3253^2$	$3355^2 + 348^2 = 3373^2$	$3465^2 + 472^2 = 3497^2$	$3575^2 + 600^2 = 3625^2$ $143^2 + 24^2 = 145^2$ i
29	$3363^2 + 116^2 = 3365^2$	$3477^2 + 236^2 = 3485^2$	$3591^2 + 360^2 = 3609^2$ $399^2 + 40^2 = 401^2$ i	$3705^2 + 488^2 = 3737^2$	$3819^2 + 620^2 = 3869^2$
30	$3599^2 + 120^2 = 3601^2$	$3717^2 + 244^2 = 3725^2$	$3835^2 + 372^2 = 3853^2$	$3953^2 + 504^2 = 3985^2$	$4071^2 + 640^2 = 4121^2$
31	$3843^2 + 124^2 = 3845^2$	$3965^2 + 252^2 = 3973^2$	$4087^2 + 384^2 = 4105^2$	$4209^2 + 520^2 = 4241^2$	$4331^2 + 660^2 = 4381^2$
32	$4095^2 + 128^2 = 4097^2$	$4221^2 + 260^2 = 4229^2$	$4347^2 + 396^2 = 4365^2$ $483^2 + 44^2 = 485^2$ i	$4473^2 + 536^2 = 4505^2$	$4599^2 + 680^2 = 4649^2$

Tabelle 1: Pythagoräische Zahlentripel 1

$x_{n\nu} = (2n - 1)(2n + 2\nu - 1)$
$y_{n\nu} = 2\nu(2n + \nu - 1)$ wobei $x_{n\nu}^2 + y_{n\nu}^2 = z_{n\nu}^2$ gilt mit $n = 1, 2, 3, \cdots / \nu = 1, 2, 3, \cdots$
$z_{n\nu} = \nu^2 + (2n + \nu - 1)^2$

n	ν = 6	ν = 7	ν = 8	ν = 9	ν = 10
1	$13^2 + 84^2 = 85^2$	$15^2 + 112^2 = 113^2$	$17^2 + 144^2 = 145^2$	$19^2 + 180^2 = 181^2$	$21^2 + 220^2 = 221^2$
2	$45^2 + 108^2 = 117^2$ i $5^2 + 12^2 = 13^2$	$51^2 + 140^2 = 149^2$	$57^2 + 176^2 = 185^2$	$63^2 + 216^2 = 255^2$ i $7^2 + 24^2 = 25^2$	$69^2 + 260^2 = 269^2$
3	$85^2 + 132^2 = 157^2$	$95^2 + 168^2 = 193^2$	$105^2 + 208^2 = 233^2$	$115^2 + 252^2 = 277^2$	$125^2 + 300^2 = 325^2$
4	$133^2 + 156^2 = 205^2$	$147^2 + 196^2 = 245^2$ i $3^2 + 4^2 = 5^2$	$161^2 + 240^2 = 289^2$	$175^2 + 288^2 = 337^2$	$189^2 + 340^2 = 389^2$
5	$189^2 + 180^2 = 261^2$ i $21^2 + 20^2 = 29^2$	$207^2 + 224^2 = 305^2$	$225^2 + 272^2 = 353^2$	$243^2 + 324^2 = 405^2$ i $3^2 + 4^2 = 5^2$	$261^2 + 380^2 = 461^2$
6	$253^2 + 204^2 = 325^2$	$275^2 + 252^2 = 373^2$	$297^2 + 304^2 = 425^2$	$319^2 + 360^2 = 481^2$	$341^2 + 420^2 = 541^2$
7	$325^2 + 228^2 = 397^2$	$351^2 + 280^2 = 449^2$	$377^2 + 336^2 = 505^2$	$403^2 + 396^2 = 565^2$	$429^2 + 460^2 = 629^2$
8	$405^2 + 252^2 = 477^2$ i $45^2 + 28^2 = 53^2$	$435^2 + 308^2 = 533^2$	$465^2 + 368^2 = 593^2$	$495^2 + 432^2 = 657^2$ i $55^2 + 48^2 = 73^2$	$525^2 + 500^2 = 725^2$ $21^2 + 20^2 = 29^2$
9	$493^2 + 276^2 = 565^2$	$527^2 + 336^2 = 625^2$	$561^2 + 400^2 = 689^2$	$595^2 + 468^2 = 757^2$	$629^2 + 540^2 = 829^2$
10	$589^2 + 300^2 = 661^2$	$627^2 + 364^2 = 725^2$	$665^2 + 432^2 = 793^2$	$703^2 + 504^2 = 865^2$	$741^2 + 580^2 = 941^2$
11	$693^2 + 324^2 = 765^2$ i $77^2 + 36^2 = 85^2$	$725^2 + 392^2 = 833^2$ i $15^2 + 8^2 = 17^2$	$777^2 + 464^2 = 905^2$	$819^2 + 540^2 = 981^2$ i $91^2 + 60^2 = 109^2$	$861^2 + 620^2 = 1061^2$
12	$805^2 + 348^2 = 877^2$	$851^2 + 420^2 = 949^2$	$897^2 + 496^2 = 1025^2$	$943^2 + 576^2 = 1105^2$	$989^2 + 660^2 = 1189^2$
13	$925^2 + 372^2 = 997^2$	$975^2 + 448^2 = 1073^2$	$1025^2 + 528^2 = 1153^2$	$1075^2 + 612^2 = 1237^2$	$1125^2 + 700^2 = 1325^2$ $45^2 + 28^2 = 53^2$ i
14	$1053^2 + 396^2 = 1125^2$ i $117^2 + 44^2 = 125^2$	$1107^2 + 476^2 = 1205^2$	$1161^2 + 560^2 = 1289^2$	$1215^2 + 648^2 = 1377^2$ i $15^2 + 8^2 = 17^2$	$1269^2 + 740^2 = 1469^2$
15	$1189^2 + 420^2 = 1261^2$	$1247^2 + 504^2 = 1345^2$	$1305^2 + 592^2 = 1433^2$	$1363^2 + 684^2 = 1525^2$	$1421^2 + 780^2 = 1621^2$
16	$1333^2 + 444^2 = 1405^2$	$1395^2 + 532^2 = 1493^2$	$1457^2 + 624^2 = 1585^2$	$1519^2 + 720^2 = 1681^2$	$1581^2 + 820^2 = 1781^2$
17	$1485^2 + 468^2 = 1557^2$ i $165^2 + 52^2 = 173^2$	$1551^2 + 560^2 = 1649^2$	$1617^2 + 656^2 = 1745^2$	$1683^2 + 756^2 = 1845^2$ i $187^2 + 84^2 = 205^2$	$1749^2 + 860^2 = 1949^2$
18	$1645^2 + 492^2 = 1717^2$	$1715^2 + 588^2 = 1813^2$ i $35^2 + 12^2 = 37^2$	$1785^2 + 688^2 = 1913^2$	$1855^2 + 792^2 = 2017^2$	$1925^2 + 900^2 = 2125^2$ $77^2 + 36^2 = 85^2$ i
19	$1813^2 + 516^2 = 1885^2$	$1887^2 + 616^2 = 1985^2$	$1961^2 + 720^2 = 2089^2$	$2035^2 + 828^2 = 2197^2$	$2109^2 + 940^2 = 2309^2$
20	$1989^2 + 540^2 = 2061^2$ i $221^2 + 60^2 = 229^2$	$2067^2 + 644^2 = 2165^2$	$2145^2 + 752^2 = 2273^2$	$2223^2 + 864^2 = 2385^2$ i $247^2 + 96^2 = 265^2$	$2301^2 + 980^2 = 2501^2$
21	$2173^2 + 564^2 = 2245^2$	$2255^2 + 672^2 = 2353^2$	$2337^2 + 784^2 = 2465^2$	$2419^2 + 900^2 = 2581^2$	$2501^2 + 1020^2 = 2701^2$
22	$2365^2 + 588^2 = 2437^2$	$2451^2 + 700^2 = 2549^2$	$2537^2 + 816^2 = 2665^2$	$2623^2 + 936^2 = 2785^2$	$2709^2 + 1060^2 = 2909^2$
23	$2565^2 + 612^2 = 2637^2$ i $285^2 + 68^2 = 293^2$	$2655^2 + 728^2 = 2753^2$	$2745^2 + 848^2 = 2873^2$	$2835^2 + 972^2 = 2997^2$ i $35^2 + 12^2 = 37^2$	$2925^2 + 1100^2 = 3125^2$ i $117^2 + 44^2 = 125^2$
24	$2773^2 + 636^2 = 2845^2$	$2867^2 + 756^2 = 2965^2$	$2961^2 + 880^2 = 3089^2$	$3055^2 + 1008^2 = 3217^2$	$3149^2 + 1140^2 = 3349^2$
25	$2989^2 + 660^2 = 3061^2$	$3087^2 + 784^2 = 3185^2$ i $63^2 + 16^2 = 65^2$	$3185^2 + 912^2 = 3313^2$	$3283^2 + 1044^2 = 3445^2$	$3381^2 + 1180^2 = 3581^2$
26	$3213^2 + 684^2 = 3285^2$ i $357^2 + 76^2 = 365^2$	$3315^2 + 812^2 = 3413^2$	$3417^2 + 944^2 = 3545^2$	$3519^2 + 1080^2 = 3681^2$ i $391^2 + 120^2 = 409^2$	$3621^2 + 1220^2 = 3821^2$
27	$3445^2 + 708^2 = 3517^2$	$3551^2 + 840^2 = 3649^2$	$3657^2 + 976^2 = 3785^2$	$3763^2 + 1116^2 = 3925^2$	$3869^2 + 1260^2 = 4069^2$
28	$3685^2 + 732^2 = 3757^2$	$3795^2 + 868^2 = 3893^2$	$3905^2 + 1008^2 = 4033^2$	$4015^2 + 1152^2 = 4177^2$	$4125^2 + 1300^2 = 4325^2$ i $165^2 + 52^2 = 173^2$
29	$3933^2 + 756^2 = 4005^2$ i $437^2 + 84^2 = 445^2$	$4047^2 + 896^2 = 4145^2$	$4161^2 + 1040^2 = 4289^2$	$4275^2 + 1188^2 = 4437^2$ i $475 + 132^2 = 493^2$	$4389^2 + 1340^2 = 4589^2$
30	$4189^2 + 780^2 = 4261^2$	$4307^2 + 924^2 = 4405^2$	$4425^2 + 1072^2 = 4553^2$	$4543^2 + 1224^2 = 4705^2$	$4661^2 + 1380^2 = 4861^2$
31	$4453^2 + 804^2 = 4525^2$	$4575^2 + 952^2 = 4673^2$	$4697^2 + 1104^2 = 4825^2$	$4819^2 + 1260^2 = 4981^2$	$4941^2 + 1420^2 = 5141^2$
32	$4725^2 + 828^2 = 4797^2$ i $525^2 + 92^2 = 533^2$	$4851^2 + 980^2 = 4949^2$ i $99^2 + 20^2 = 101^2$	$4977^2 + 1136^2 = 5105^2$	$5103^2 + 1296^2 = 5265^2$ i $63^2 + 16^2 = 65^2$	$5229^2 + 1460^2 = 5429^2$

Tabelle 2: Pythagoräische Zahlentripel 2