

Zu den Primzahltypen

Alexander Stolzenburg

Glöckler unterscheidet die Primzahlen nach 4 Typen nach ihren Resten modulo 8. Das Motiv ist wohl die Möglichkeit, daraus Quadrat-n-tupel zu erzeugen, denn zu den 4 Typen gehören verschiedene Pell'sche Gleichungen – im allgemeinsten Sinne – : $x^2 - d \cdot y^2 = p$, diophantische Gleichungen, für die es in einigen Fällen für d und p Lösungsmethoden gibt.

Die 4 Typen nach Resten mod 8 haben verschiedene Darstellungen durch Quadratsummen:

Rest 5: $p = x^2 + y^2$ Rest 3: $q = x^2 + 2 \cdot y^2$ Rest 7: $r = x^2 - 2 \cdot y^2$ [so und nicht anders]

Rest 1: $u = x^2 + y^2$ oder $u = x^2 + 2 \cdot y^2$ oder $u = x^2 - 2 \cdot y^2$ oder $u = 2 \cdot x^2 - 1$

[universell: alle 3 Typen].

Beispiele:

Eine größere Tabelle, ganz in Glöcklers Sinne:

m	8m+1		Typ u				8m+3		Typ q		8m+5		Typ p		8m+7		Typ r	
	u = x ² + 2y ²		= x ² + y ²		= x ² - 2y ²		q = x ² + 2y ²		p = x ² + y ²		r = x ² - 2y ²							
	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y		
0	1	1	0	1	0	1	0	3 prim	1	1	5 prim	1	2	7 prim	3	1		
1	9 3 ²	1	2	3	0	3	0	11 prim	3	1	13 prim	3	2	15 3·5	-----			
2	17 prim	3	2	1	4	5	2	19 prim	1	3	21 3·7	-----	23 prim	5	1			
3	25 5 ²	5	0	3	4	5	0	27 3 ³	5	1	29 prim	5	2	31 prim	7	3		
4	33 3·11	1	4	-----	-----	-----	-----	35 5·7	-----	37 prim	1	6	39 3·13	-----				
5	41 prim	3	4	5	4	7	2	43 prim	5	3	45 3 ² ·5	3	6	47 prim	7	1		
6	49 7 ²	7	0	7	0	7	0	51 3·17	7	1	53 prim	7	2	55 5·11	-----			
7	57 3·19	5	4	-----	-----	-----	-----	59 prim	3	5	61 prim	5	6	63 3 ² ·7	9	3		
8	65 5·13	-----	1	8	-----	-----	-----	67 prim	7	3	69 3·23	-----	71 prim	11	5			
9	73 prim	1	6	3	8	9	2	75 3·5 ²	5	5	77 7·11	-----	79 prim	9	1			
10	81 3 ⁴	3	6	9	0	9	0	83 3·29	9	1	85 5·17	9	2	87 3·29	-----			
11	89 prim	9	2	5	8	11	4	91 7·13	-----	93 3·31	-----	95 5·19	-----					
12	97 prim	5	6	9	4	13	6	99 3 ² ·11	9	3	101 prim	1	10	103 prim	11	3		
13	105 3·5·7	-----	-----	-----	-----	-----	-----	107 prim	3	7	109 prim	3	10	111 3·37	-----			
14	113 prim	9	4	7	8	11	2	115 5·23	-----	117 3 ² ·13	9	6	119 7·17	11	1			
15	121 11 ²	7	6	11	0	11	0	123 3·41	11	1	125 5 ³	11	2	127 prim	15	7		
16	129 3·43	1	8	-----	-----	-----	-----	131 prim	9	5	133 7·19	-----	135 3 ³ ·5	-----				
17	137 prim	3	8	11	4	13	4	139 prim	11	3	141 3·47	-----	143 11·13	-----				
18	145 5·29	-----	1	12	-----	-----	-----	147 3·7 ²	7	7	149 prim	7	10	151 prim	13	3		
19	153 3 ² ·17	5	8	3	12	15	6	155 5·31	-----	157 prim	11	6	159 3·53	-----				
20	161 7·23	-----	-----	-----	-----	-----	-----	163 prim	1	9	165 3·5·11	-----	167 prim	13	1			
21	169 13 ²	13	0	5	12	13	0	171 3 ² ·19	13	1	173 prim	13	2	175 5 ² ·7	15	5		
22	177 3·59	7	8	-----	-----	-----	-----	179 prim	9	7	181 prim	9	10	183 3·61	-----			
23	185 5·37	-----	11	8	-----	-----	-----	187 11·17	13	3	189 3 ³ ·7	-----	191 prim	17	7			
24	193 prim	11	6	7	12	15	4	195 3·5·13	-----	197 prim	1	14	199 prim	19	9			
25	201 3·67	13	4	-----	-----	-----	-----	203 7·29	-----	205 5·41	3	14	207 3 ² ·23	15	3			
26	209 11·19	3	10	-----	-----	-----	-----	211 prim	7	9	213 3·71	-----	215 5·43	-----				
27	217 7·31	-----	-----	-----	-----	-----	-----	219 3·73	13	5	221 13·17	5	14	223 prim	15	1		
28	225 3 ² ·5 ²	5	10	9	12	15	0	227 prim	15	1	229 prim	15	2	231 3·7·11	-----			

m	8m+1			Typ u			8m+3			Typ q			8m+5			Typ p			8m+7			Typ r		
	$u = x^2 + 2y^2$			$= x^2 + y^2$			$= x^2 - 2y^2$			$q = x^2 + 2y^2$			$p = x^2 + y^2$			$r = x^2 - 2y^2$								
	x	y		x	y		x	y		x	y		x	y		x	y		x	y				
33	265	5-53	-----	3	16	-----	267	3-89	13	7	269	prim	13	10	271	prim	17	3						
34	273	3-7-13	-----	-----	-----	-----	275	5 ² -11	15	5	277	prim	9	14	279	3 ² -31	21	9						
35	281	prim	9	10	5	16	17	2	283	prim	11	9	285	3-5-19	-----	287	7-41	17	1					
36	289	17 ²	1	12	15	8	17	0	291	3-97	17	1	293	prim	17	2	295	5-59	-----					
37	297	3 ³ -11	3	12	-----	-----	299	13-23	-----	-----	301	7-43	-----	303	3-101	-----								
38	305	5-61	-----	7	16	-----	307	prim	17	3	309	3-103	-----	311	prim	19	5							
39	313	prim	5	12	13	12	21	8	315	3 ² -5-7	-----	317	prim	11	14	319	11-29	-----						
40	321	3-107	11	10	-----	-----	323	17-19	15	7	325	5 ² -13	1	18	327	3-109	-----							
41	329	7-47	-----	-----	19	4	331	prim	13	9	333	3 ² -37	3	18	335	5-67	-----							
42	337	prim	7	12	9	16	25	12	339	3-113	17	5	341	11-31	-----	343	7 ³	19	3					
43	345	3-5-23	-----	-----	-----	-----	347	prim	3	13	349	prim	5	18	351	3 ³ -13	-----							
44	353	prim	15	8	17	8	19	2	355	5-71	-----	357	3-7-17	-----	359	prim	19	1						
45	361	19 ²	17	6	19	0	19	0	363	3-11 ²	19	1	365	5-73	19	2	367	prim	23	9				
46	369	3 ² -41	9	12	15	12	21	6	371	7-53	-----	373	prim	7	18	375	3-5 ³	-----						
47	377	13-29	-----	11	16	-----	379	prim	19	3	381	3-127	-----	383	prim	25	11							
48	385	5-7-11	-----	-----	-----	-----	387	3 ² -43	17	7	389	prim	17	10	391	17-23	21	5						
49	393	3-131	1	14	-----	-----	395	5-79	-----	-----	397	prim	19	6	399	3-7-19	-----							
50	401	prim	3	14	1	20	23	8	403	13-31	-----	405	3 ⁴ -5	9	18	407	11-37	-----						
51	409	prim	11	12	3	20	21	4	411	3-137	19	5	413	7-59	-----	415	5-83	-----						
52	417	3-139	5	14	-----	-----	419	prim	9	13	421	prim	15	14	423	3 ² -47	21	3						
53	425	5 ² -17	15	10	5	20	25	10	427	7-61	-----	429	3-11-13	-----	431	prim	23	7						
54	433	prim	19	6	17	12	21	2	435	3-5-29	-----	437	19-23	-----	439	prim	21	1						
55	441	3 ² -7 ²	7	14	21	0	21	0	443	prim	21	1	445	5-89	21	2	447	3-149	-----					
56	449	prim	21	2	7	20	29	14	451	11-41	17	9	453	3-151	-----	455	5-7-13	-----						
57	457	prim	13	12	21	4	23	6	459	3 ³ -17	21	3	461	prim	19	10	463	prim	25	9				
58	465	3-5-31	-----	-----	-----	-----	467	prim	15	11	469	7-67	-----	471	3-157	-----								
59	473	11-43	9	14	-----	-----	475	5 ² -19	5	15	477	3 ² -53	21	6	479	prim	23	5						
60	481	13-37	-----	9	20	-----	483	3-7-23	-----	-----	485	5-97	1	22	487	prim	27	11						
61	489	3-163	17	10	-----	-----	491	prim	21	5	493	17-29	3	22	495	3 ³ -5-11	-----							
62	497	7-71	-----	-----	23	4	499	prim	7	15	501	3-167	-----	503	prim	29	13							
63	505	5-101	-----	19	12	-----	507	3-13 ²	13	13	509	prim	5	22	511	7-73	23	3						
64	513	3 ³ -19	1	16	-----	-----	515	5-103	-----	-----	517	11-47	-----	519	3-173	-----								
65	521	prim	3	16	11	20	23	2	523	prim	19	9	525	3-5 ² -7	-----	527	17-31	23	1					
66	529	23 ²	23	0	23	0	23	0	531	3 ² -59	23	1	533	13-41	23	2	535	5-107	-----					
67	537	3-179	5	16	-----	-----	539	7 ² -11	21	7	541	prim	21	10	543	3-181	-----							
68	545	5-109	-----	17	16	-----	547	prim	23	3	549	3 ² -61	15	18	551	19-29	-----							
69	553	7-79	-----	-----	25	6	555	3-5-37	-----	-----	557	prim	19	14	559	13-43	-----							
70	561	3-11-17	7	16	-----	-----	563	prim	15	13	565	5-113	23	6	567	3 ⁴ -7	27	9						
71	569	prim	21	8	13	20	31	14	571	prim	11	15	573	3-191	-----	575	5 ² -23	25	5					
72	577	prim	17	12	1	24	33	16	579	3-193	23	5	581	7-83	-----	583	11-53	-----						
73	585	3 ² -5-13	-----	3	24	-----	587	prim	3	17	589	19-31	-----	591	3-197	-----								
74	593	prim	9	16	23	8	25	4	595	5-7-17	-----	597	3-199	-----	599	prim	29	11						
75	601	prim	23	6	5	24	27	8	603	3 ² -67	21	9	605	5-11 ²	11	22	607	prim	25	3				
76	609	3-7-29	-----	-----	-----	-----	611	13-47	-----	-----	613	prim	17	18	615	3-5-41	-----							
77	617	prim	15	14	19	16	25	2	619	prim	13	15	621	3 ³ -23	-----	623	7-89	25	1					
78	625	5 ⁴	25	0	7	24	25	0	627	3-11-19	25	1	629	17-37	25	2	631	prim	27	7				

m	8m+	Typ u						8m+3	Typ q		8m+5	Typ p		8m+7	Typ r					
		$u = x^2 + 2y^2$		$= x^2 + y^2$		$= x^2 - 2y^2$			$q = x^2 + 2y^2$			$p = x^2 + y^2$			$r = x^2 - 2y^2$					
		x	y	x	y	x	y		x	y	x	y		x	y					
79	633	3-211	11	16	-----	-----	-----	635	5-127	-----	637	7 ² -13	21	14	639	3 ² -71	33	15		
80	641	prim	21	10	25	4	29	10	643	prim	25	3	645	3-5-43	-----	647	prim	35	17	
81	649	11-59	1	18	-----	-----	-----	651	3-7-31	-----	653	prim	13	22	655	5-131	-----	-----		
82	657	3 ² -73	3	18	9	24	27	6	659	prim	9	17	661	prim	25	6	663	3-13-17	-----	-----
83	665	5-7-19	-----	-----	-----	-----	-----	667	23-29	-----	669	3-223	-----	-----	671	11-61	-----	-----		
84	673	prim	5	18	23	12	31	12	675	3 ³ -5 ²	25	5	677	prim	1	26	679	7-97	27	5
85	681	3-227	13	16	-----	-----	-----	683	prim	21	11	685	5-137	3	26	687	3-229	-----	-----	
86	689	13-53	-----	-----	17	20	-----	691	prim	23	9	693	3 ² -7-11	-----	-----	695	5-139	-----	-----	
87	697	17-41	7	18	11	24	27	4	699	3-233	19	13	701	prim	5	26	703	19-37	-----	-----
88	705	3-5-47	-----	-----	-----	-----	-----	707	7-101	-----	709	prim	15	22	711	3 ² 79	27	3		
89	713	23-31	-----	-----	-----	-----	29	8	715	5-11-13	-----	717	3-239	-----	719	prim	31	11		
90	721	7-103	-----	-----	-----	-----	27	2	723	3-241	25	7	725	5 ² -29	7	26	727	prim	77	51
91	729	3 ⁶	9	18	27	0	27	0	731	17-43	27	1	733	prim	27	2	735	3-5-7 ²	-----	-----
92	737	11-67	15	16	-----	-----	-----	739	prim	17	15	741	3-13-19	-----	-----	743	prim	29	7	
93	745	5-149	-----	-----	13	24	-----	747	3 ² -83	27	3	749	7-107	-----	-----	751	prim	33	13	
94	753	3-251	19	14	-----	-----	-----	755	5-151	-----	757	prim	9	26	759	3-11-23	-----	-----		
95	761	prim	27	4	19	20	31	10	763	7-109	-----	765	3 ² -5-17	27	6	767	13-59	-----	-----	
96	769	prim	11	18	25	12	29	6	771	3-257	23	11	773	prim	17	22	775	5 ² -31	35	15
97	777	3-7-37	-----	-----	-----	-----	-----	779	19-41	27	5	781	11-71	-----	-----	783	3 ³ -29	-----	-----	
98	785	5-157	-----	-----	1	28	-----	787	prim	25	9	789	3-263	-----	-----	791	7-113	29	5	
99	793	13-61	-----	-----	3	28	-----	795	3-5-53	-----	797	prim	11	26	799	17-47	31	9		
100	801	3 ² -89	1	20	15	24	33	12	803	11-73	15	17	805	5-7-23	-----	-----	807	3-269	-----	-----
101	809	prim	3	20	5	28	29	4	811	prim	19	15	813	3-271	-----	-----	815	5-163	-----	-----
102	817	19-43	-----	-----	-----	-----	-----	819	3 ² -7-13	-----	821	prim	25	14	823	prim	29	3		
103	825	3-5 ² -11	-----	-----	-----	-----	-----	827	prim	27	7	829	prim	27	10	831	3-227	-----	-----	
104	833	7 ² -17	21	14	7	28	29	2	835	5-167	-----	837	3 ³ -31	-----	-----	839	prim	29	1	
105	841	29 ²	29	0	21	20	29	0	843	3-281	11	19	845	5-13 ²	29	2	847	7-11 ²	33	11
106	849	3-283	7	20	-----	-----	-----	851	23-37	-----	853	prim	23	18	855	3 ² -5-19	-----	-----		
107	857	prim	27	8	29	4	37	16	859	prim	29	3	861	3-7-41	-----	-----	863	prim	31	7
108	865	5-173	-----	-----	9	28	-----	867	3-17 ²	25	11	869	11-79	-----	-----	871	13-67	-----	-----	
109	873	3 ² -97	15	18	27	12	39	18	875	5 ³ -7	-----	877	prim	29	6	879	3-293	-----	-----	
110	881	prim	9	20	25	16	41	20	883	prim	1	21	885	3-5-59	-----	-----	887	prim	35	13
111	889	7-127	-----	-----	-----	-----	31	6	891	3 ⁴ -11	29	5	893	19-47	-----	-----	895	5-179	-----	-----
112	897	3-13-23	-----	-----	-----	-----	-----	899	29-31	-----	901	17-53	1	30	903	3-7-43	-----	-----		
113	905	5-181	-----	-----	11	28	-----	907	prim	5	21	909	3 ² -101	3	30	911	prim	31	5	
114	913	11-83	-----	-----	-----	-----	-----	915	3-5-61	-----	917	7-131	-----	-----	919	prim	37	15		
115	921	3-307	11	20	-----	-----	-----	923	13-71	-----	925	5 ² -37	5	30	927	3 ² -103	33	9		
116	929	prim	27	10	23	20	31	4	931	7 ² -19	7	21	933	3-311	-----	-----	935	5-11-17	-----	-----
117	937	prim	17	18	19	24	35	12	939	3-313	29	7	941	prim	29	10	943	23-41	31	3
118	945	3 ³ -5-7	-----	-----	-----	-----	-----	947	prim	15	19	949	13-73	7	30	951	3-317	-----	-----	
119	953	prim	21	16	13	28	31	2	955	5-191	-----	957	3-11-29	-----	-----	959	7-137	31	1	
120	961	31 ²	31	0	31	0	31	0	963	3 ² -107	31	1	965	5-193	31	2	967	prim	43	21
121	969	3-17-19	1	22	-----	-----	-----	971	prim	27	11	973	7-139	-----	-----	975	3-5 ² -13	-----	-----	
122	977	prim	3	22	31	4	37	14	979	11-89	31	3	981	3 ² -109	9	30	983	prim	35	11
123	985	5-197	-----	-----	27	16	-----	-----	987	3-7-47	-----	-----	989	23-43	-----	-----	991	prim	33	7
124	993	3-331	5	22	-----	-----	-----	-----	995	5-199	-----	-----	997	prim	31	6	999	3 ³ -37	-----	-----

Für den Typus "p" mit den Resten 5 und zugleich für die eine Darstellung für den Typus "u" gilt der schöne, im Wesentlichen schon Fermat bekannte Zwei-Quadrate-Satz betreffend die Lösbarkeit von $x^2 + y^2 = n$ mit $n \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{N}_0$.

Sei n eine Primzahl p :

Die (einzige gerade) Primzahl 2 hat die Darstellung $2 = 1^2 + 1^2$

Jede Primzahl $p \equiv 1 \pmod{4}$ besitzt eine (bis auf die Vertauschung von x und y) eindeutige Darstellung $p = x^2 + y^2$.

$p \equiv 3 \pmod{4}$ hat keine Lösungen.

$p \equiv 2 \pmod{4}$ oder $p \equiv 0 \pmod{4}$ ist nicht möglich für Primzahlen $p > 2$.

Es gilt auch die Umkehrung: Wenn p darstellbar ist durch $p = x^2 + y^2$, dann ist $p \equiv 1 \pmod{4}$.

Sei $n > 2$ keine Primzahl, $n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot p_3^{e_3} \cdot \dots \cdot p_k^{e_k}$.

Dann gilt: n ist dann und nur dann als Summe zweier Quadrate darstellbar, $n = x^2 + y^2$, wenn jeder Primfaktor p_i von n , der $\equiv 3 \pmod{4}$ ist, einen geradzahligem Exponenten e_i besitzt.

Beweis: siehe Aigner – Ziegler [2003], Proofs from the BOOK, 3th edition, Seite 17 ff

Beispiele Primzahlen $p \equiv 1 \pmod{4}$: $5 = 2^2 + 1^2$; $13 = 3^2 + 2^2$; $17 = 4^2 + 1^2$; ... $997 = 31^2 + 6^2$

Beispiele Nichtprimzahlen, alle Primfaktoren $p_i \equiv 3 \pmod{4}$ mit geradem Exponenten:

$3^2 = 9 = 3^2 + 0^2$; dagegen $3^2 \cdot 11 = 99 =$ keine, aber $3^2 \cdot 13 = 117 = 9^2 + 6^2$; $3^2 \cdot 5^2 = 225 = 12^2 + 9^2$;
 $7^2 = 49 = 7^2 + 0^2$

Vom wechselseitigen Verhältnis typusspezifischer Primzahlen

Typisch für Glöcklers Vorgehen ist dann die Beobachtung, dass die Summe von 3, 5, 7 Primzahlen des einen Typus eine Primzahl eines anderen Typus ergibt:

Beispiele 3 u-Primzahlen: $17 + 41 + 73 = 131$ – eine q-Zahl

und 3 q-Primzahlen: $11 + 19 + 43 = 73$ – eine u-Zahl

oder 3 p-Primzahlen: $5 + 13 + 29 = 47$ – eine r-Zahl

und 3 r-Primzahlen: $7 + 23 + 31 = 61$ – eine p-Zahl

Beispiele 5 u-Primzahlen: $17 + 41 + 73 + 89 + 97 = 317$ – eine p-Zahl

und 5 p-Primzahlen: $5 + 13 + 29 + 37 + 53 = 137$ – eine u-Zahl

oder 5 q-Primzahlen $11 + 19 + 43 + 59 + 67 = 199$ – eine r-Zahl

und 5 r-Primzahlen: $7 + 23 + 31 + 47 + 71 = 179$ – eine q-Zahl

Dass das richtig ist, ist fast trivial:

u-Zahlen sind $\equiv 1$, also ist die Summe von 3 solcher Zahlen $\equiv 3 \cdot 1 = 3$, das Ergebnis also eine q Zahl und umgekehrt die Summe von 3 q-Zahlen $\equiv 3 \cdot 3 \equiv 1$, also eine u-Zahl.

Allerdings ist die Summe nicht immer wieder eine Primzahl, wohl aber hat sie den passenden 8er-Rest.

Es lässt sich leicht verallgemeinern:

Für die Anzahl 3: $3 \cdot 1 \equiv 3$ und $3 \cdot 3 \equiv 1$, also ergeben 3 u-Zahlen eine q-Zahl und 3 q-Zahlen eine u-Zahl.

und: $3 \cdot 5 \equiv 7$ und $3 \cdot 7 \equiv 5$, also ergeben 3 p-Zahlen eine r-Zahl und 3 r-Zahlen eine p-Zahl.

Für die Anzahl 5: $5 \cdot 1 \equiv 5$ und $5 \cdot 5 \equiv 1$, also ergeben 5 u-Zahlen eine p-Zahl und 5 p-Zahlen eine u-Zahl.

und: $5 \cdot 3 \equiv 7$ und $5 \cdot 7 \equiv 3$, also ergeben 5 q-Zahlen eine u-Zahl und 5 u-Zahlen eine q-Zahl.

Für die Anzahl 7: $7 \cdot 1 \equiv 7$ und $7 \cdot 7 \equiv 1$, also ergeben 7 u-Zahlen eine r-Zahl und 7 r-Zahlen eine u-Zahl.

und: $7 \cdot 5 \equiv 3$ und $7 \cdot 3 \equiv 5$, also ergeben 7 p-Zahlen eine q-Zahl und 7 q-Zahlen eine p-Zahl.

Für die Anzahl 9: $9 \cdot 1 \equiv 1$, also ergeben 9 u-Zahlen wieder eine u-Zahl.

und: entsprechend für die anderen Typen: Die Summe von 9 Zahlen eines Typus ist vom selben Typus.

Danach wiederholt sich alles modulo 8.